



# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2022–2023

Διάλεξη 16

Αντίστροφες Απεικονίσεις – Δεξιός και  
Αριστερός Αντίστροφος–Αλλαγή βάσης

Μιχάλης Ταρουδάκης

# Χαρακτηρισμός Ισομορφισμού

$$f:V \rightarrow W$$

Γραμμική απεικόνιση

$V$  και  $W$  έχουν ίδιες διαστάσεις  $n$

## Θεώρημα I

Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Η απεικόνιση είναι μονομορφισμός
2. Η απεικόνιση είναι επιμορφισμός
3. Η απεικόνιση είναι ισομορφισμός
4. Η εικόνα μιας βάσης του  $V$  είναι μία βάση του  $W$

# Χαρακτηρισμός Ισομορφισμού

## Θεώρημα II

Δύο διανυσματικοί χώροι έχουν την ίδια διάσταση εάν και μόνο εάν είναι ισομορφικοί

# Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Πρόταση : Πυρήνας και εικόνα της γραμμικής απεικόνισης  $f = L_A$

1. Ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης αποτελείται από τις λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. Η εικόνα της απεικόνισης είναι ο χώρος των στηλών του  $A$  που είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}^m$
3.  $\text{rank}(A) = \dim(\text{Im } L_A)$

# Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Πρόταση :  $f = L_A$   $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$

Η απεικόνιση είναι

1. Μονομορφισμός εάν και μόνο εάν  $r = n : N(A) = \{0\}$
2. Επιμορφισμός εάν και μόνο εάν  $r = m : R(A) = \mathbb{R}^m$
3. Ισομορφισμός εάν και μόνο εάν  $r = m = n$

# Αντίστροφη Απεικόνιση και Ισομορφισμός

$$f: V \rightarrow W$$

Η γραμμική απεικόνιση  $f$  είναι ισομορφισμός εάν και μόνο εάν υπάρχει μία απεικόνιση  $f^{-1}: W \rightarrow V$  (αντίστροφη απεικόνιση) που ικανοποιεί  $(f^{-1} \circ f) = I_V$ ,  $(f^{-1} \circ f)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  και

$$(f \circ f^{-1}) = I_W, \quad (f \circ f^{-1})(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$$

# Αντίστροφη Απεικόνιση και Ισομορφισμός

Η γραμμική απεικόνιση  $L_A$  είναι ισομορφισμός εάν και μόνο εάν ο πίνακας  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  και  $r = n$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

$$L_A^{-1} \circ L_A = L_A \circ L_A^{-1} = I_{\mathbb{R}_n}$$

$$\text{Ker } L_A = \{0\}$$

$$\text{Im } L_A = \mathbb{R}^n$$

# Αριστερός και δεξιός αντίστροφος απεικόνισης

$$f: N \rightarrow M$$

Η απεικόνιση  $f$  έχει αριστερό αντίστροφο  $g: M \rightarrow N$  τέτοιο ώστε  $g \circ f = I_N$  εάν και μόνο εάν η  $f$  είναι μονομορφισμός.

Η απεικόνιση  $f$  έχει δεξιό αντίστροφο  $h: M \rightarrow N$  τέτοιο ώστε  $f \circ h = I_M$  εάν και μόνο εάν η  $f$  είναι επιμορφισμός

# Αριστερός και δεξιός αντίστροφος πίνακας

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Ο πίνακας  $B \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  είναι αριστερός αντίστροφος του  $A$  εάν  $BA = I_n$ .

Θα πρέπει  $\text{rank}(A) = n \leq m$

Ο πίνακας  $C \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  είναι δεξιός αντίστροφος του  $A$  εάν  $AC = I_m$ .

Θα πρέπει  $\text{rank}(A) = m \leq n$

# Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

## Πρόταση

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  και

$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  την κανονική βάση του  $\mathbb{R}^n$

Εάν  $A$  είναι ο πίνακας  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  με στήλες τα διανύσματα

$$f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\text{Τότε } f = L_A$$

Ουσιαστικά έχουμε επιλέξει και για τον  $\mathbb{R}^m$  την αντίστοιχη κανονική βάση

# Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Γενίκευση

$$f : V \rightarrow W$$

$$B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad \text{Βάση του } V$$

$$B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\} \quad \text{Βάση του } W$$

Να βρούμε τον πίνακα  $A$  του μετασχηματισμού ως προς τις εν λόγω βάσεις

$$f(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{w}_m$$

$$f(\mathbf{v}_2) = a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{w}_m$$

$\vdots$

$$f(\mathbf{v}_n) = a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{w}_m$$

# Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Γενίκευση

$$f : V \rightarrow W$$

$$B_1 = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \} \quad \text{Βάση του } V$$

$$B_2 = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m \} \quad \text{Βάση του } W$$

$$A = (f : B_1, B_2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [T]_{B_1}^{B_2}$$

# Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

$$\mathbf{v} \in V$$

Απόδειξη

$$f(\mathbf{v}) = f(x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n) = x_1 f(\mathbf{v}_1) + x_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{v}_n)$$

$$f(\mathbf{v}_1) = a_{11} \mathbf{w}_1 + a_{21} \mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1} \mathbf{w}_m$$

$$f(\mathbf{v}_2) = a_{12} \mathbf{w}_1 + a_{22} \mathbf{w}_2 + \dots + a_{m2} \mathbf{w}_m$$

$\vdots$

$$f(\mathbf{v}_n) = a_{1n} \mathbf{w}_1 + a_{2n} \mathbf{w}_2 + \dots + a_{mn} \mathbf{w}_m$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= x_1 (a_{11} \mathbf{w}_1 + a_{21} \mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1} \mathbf{w}_m) + \dots + x_n (a_{1n} \mathbf{w}_1 + a_{2n} \mathbf{w}_2 + \dots + a_{mn} \mathbf{w}_m) \\ &= (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}) \mathbf{w}_1 + \dots + (x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn}) \mathbf{w}_m \end{aligned}$$

# Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

$$\mathbf{v} \in V$$

$$\begin{aligned} [f(\mathbf{v})]_{B_2} &= \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (f : B_1, B_2)[v]_{B_1} \end{aligned}$$

# Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

## ► Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  που ορίζεται από τον τύπο

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y - z \\ 3x - 2y + 4z \end{bmatrix}$$

Ως προς τις βάσεις

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{και} \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

# Πίνακας αλλαγής βάσης

Αναφερόμαστε σε απεικονίσεις  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Εάν  $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$   $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$

$[T]_{B_1}$  Πίνακας της απεικόνισης ως προς  $B_1$

$[T]_{\mathcal{E}}$  Πίνακας της απεικόνισης ως προς  $\mathcal{E}$

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$$

$$[T]_{\mathcal{E}} P = P [T]_{B_1}$$

$$[T]_{B_1} = P^{-1} [T]_{\mathcal{E}} P$$