ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2022-2023

Διάλεξη 17

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Μιχάλης Ταρουδάκης

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Πρόταση

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και

$\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\ldots \mathbf{e}_n\}$ την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

Εάν *A* είναι ο πίνακας $A \in \mathrm{Mat}_{mxn}(\mathbb{R})$ με στήλες τα διανύσματα

$$f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_1), \ldots\ldots, f(\mathbf{e}_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Τότε $f = L_A$

Ουσιαστικά έχομε επιλέξει και για τον $\mathbb{R}^m$ την αντίστοιχη κανονική βάση

Πίνακας αλλαγής βάσης

Αναφερόμαστε σε απεικονίσεις $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Εάν $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots \mathbf{v}_n\}$ $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\ldots \mathbf{e}_n\}$

$[T]_{B_1}$ Πίνακας της απεικόνισης ως προς B_1

$[T]_{\varepsilon}$ Πίνακας της απεικόνισης ως προς ϵ

$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$

$$[T]_{\varepsilon} P = P [T]_{B_1}$$

$$[T]_{B_1} = P^{-1} [T]_{\varepsilon} P$$

Πίνακας αλλαγής βάσης

Αναφερόμαστε σε απεικονίσεις $f : V \to W$

Εάν $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots \mathbf{v}_n\}$ $C_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots., \mathbf{w}_n\}$

$B_1' = \{\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \ldots\ldots \mathbf{v}_n'\}$ $C_1' = \{\mathbf{w}_1', \mathbf{w}_2', \ldots., \mathbf{w}_n'\}$

P Πίνακας αλλαγής βάσης από B_1 σε B_1'

Q Πίνακας αλλαγής βάσης από C_1 σε C_1'

$[T]_{B_1}^{C_1}$ Πίνακας της απεικόνισης από B_1 σε C_1

$[T]_{B_1'}^{C_1'}$ Πίνακας της απεικόνισης από B_1' σε C_1'

$$[T]_{B_1'}^{C_1'} = Q^{-1} [T]_{B_1}^{C_1} P$$

Πίνακας αλλαγής βάσης

$$[T]_{B_1} = P^{-1}[T]_{\varepsilon}\, P$$

Οι πίνακες $[T]_{B_1}$ και $[T]_{\varepsilon}$ χαρακτηρίζονται ως «όμοιοι» (similar)

Δύο τετραγωνικοί πίνακες A και B χαρακτηρίζονται ως όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε να ισχύει :

$$B = P^{-1}AP$$

Πίνακες γραμμικής απεικπονισης

- Παράδειγμα

Για τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από το νόμο $f(x,y)=(2y,3x-y)$ βρείτε τους πίνακες της απεικόνισης ως προς την κανονική βάση και ως προς τη βάση $S=\{\mathbf{u}_1=(1,3),\mathbf{u}_2=(2,5)\}$

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Στροφή των διανυσμάτων κατά 90ο

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

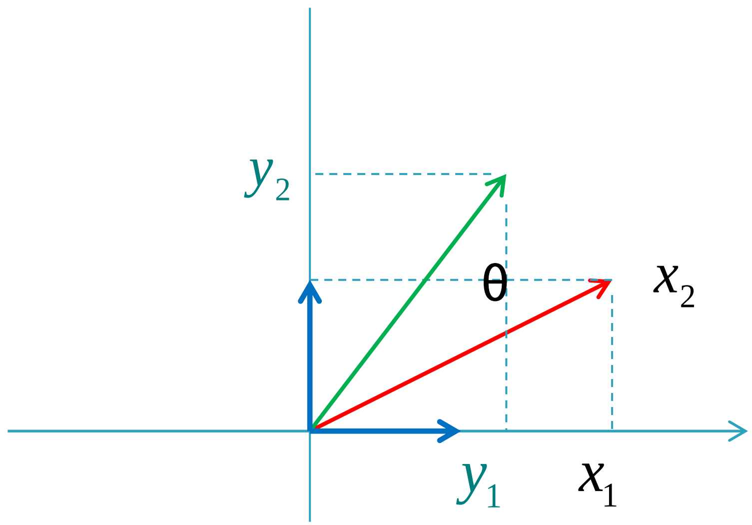
Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$Q_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$Q_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$Q_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$



$$\left[Q_\theta\right] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Στροφή των διανυσμάτων κατά θ

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

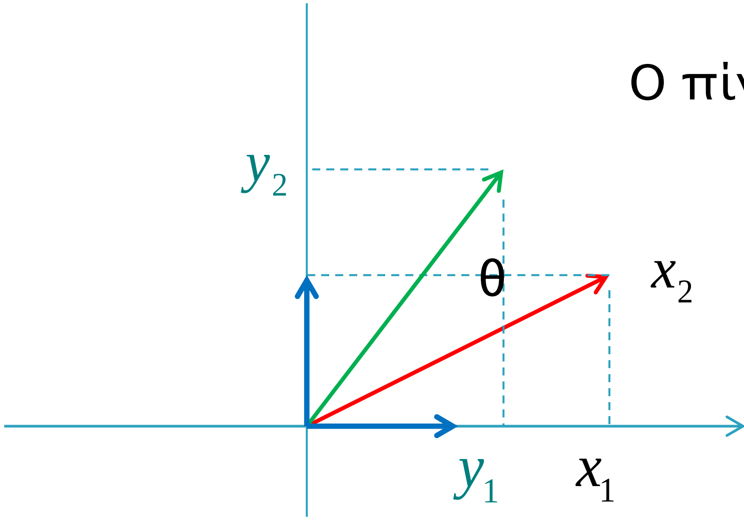
$$[Q_\theta] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$Q_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Υπάρχει αντίστροφη απεικόνιση ;

NAI

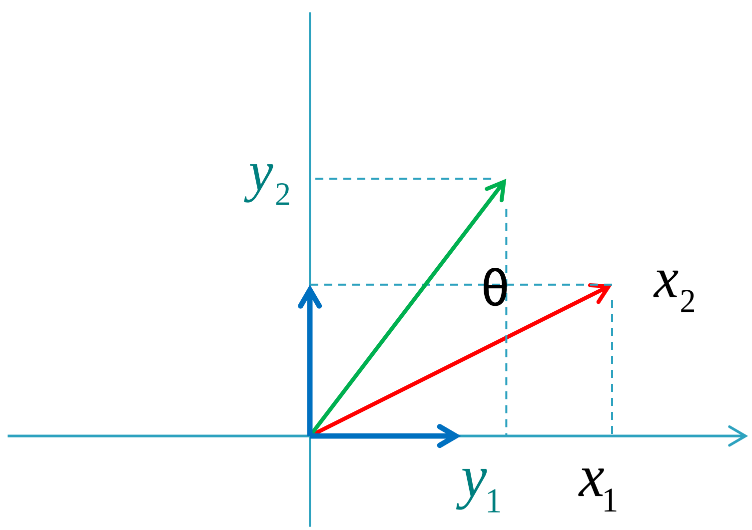
Ο πίνακάς της ;



$$[Q_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = [Q_{-\theta}]$$

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

$$[Q_\theta]=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix} \quad [Q_{-\theta}]=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$



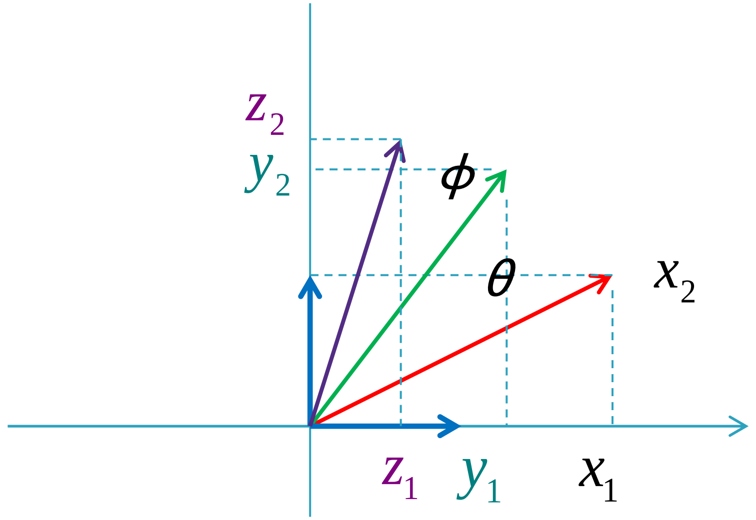
Η αντίστροφη απεικόνιση είναι στροφή κατά αντίθετη γωνία σε σχέση με την αρχική

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Στροφή κατά γωνία θ και μετά κατά γωνία ϕ

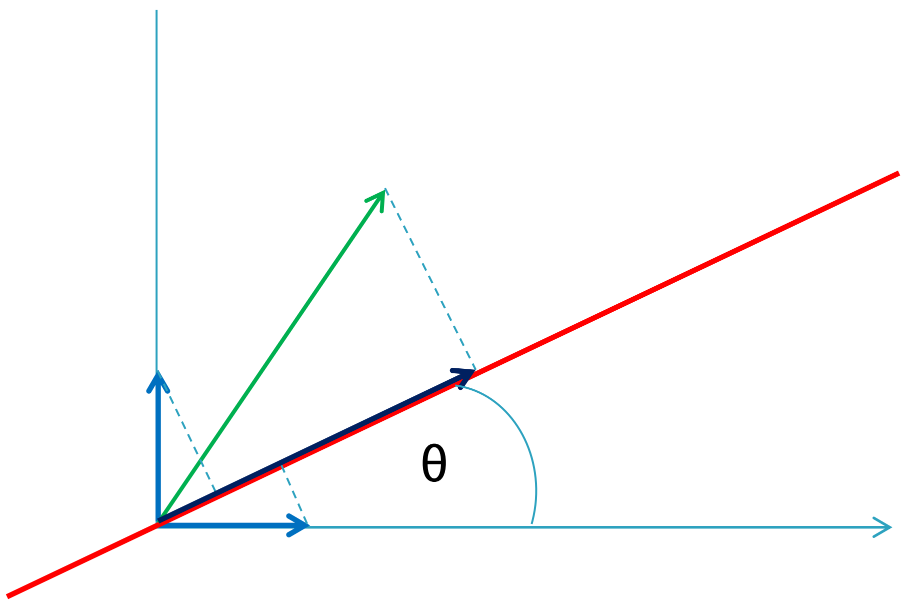
Σύνθεση της Q_θ με την Q_φ $\quad Q_\varphi \circ Q_\theta$

$$\left[Q_\varphi \circ Q_\theta\right] = \left[Q_\varphi\right]\left[Q_\theta\right] = \left[Q_{\varphi+\theta}\right]$$



Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Προβολή σε ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον x άξονα



$$P_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta \\ \cos\theta\,\sin\theta \end{bmatrix}$$

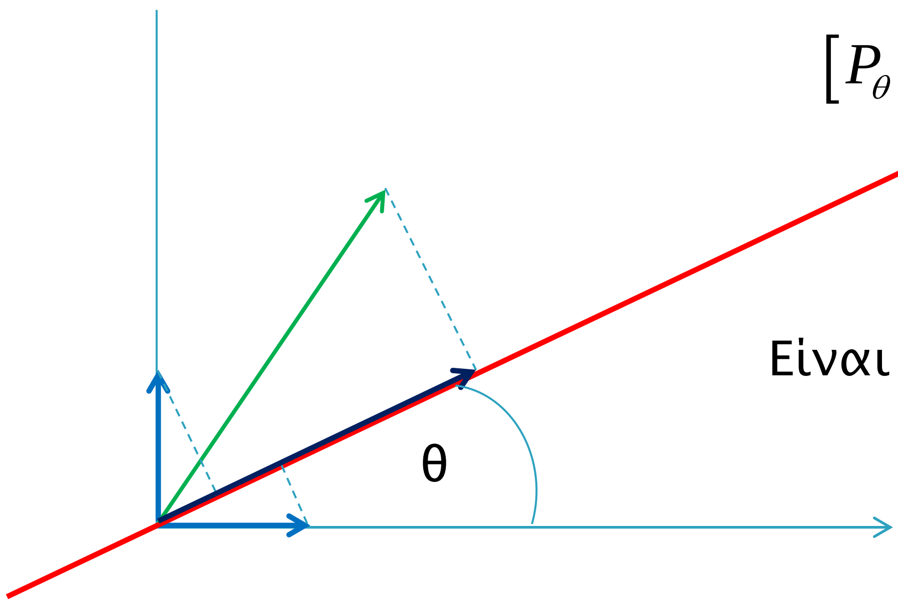
$$P_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\left[P_\theta\right] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Προβολή σε ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον x άξονα

$$[P_\theta] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$



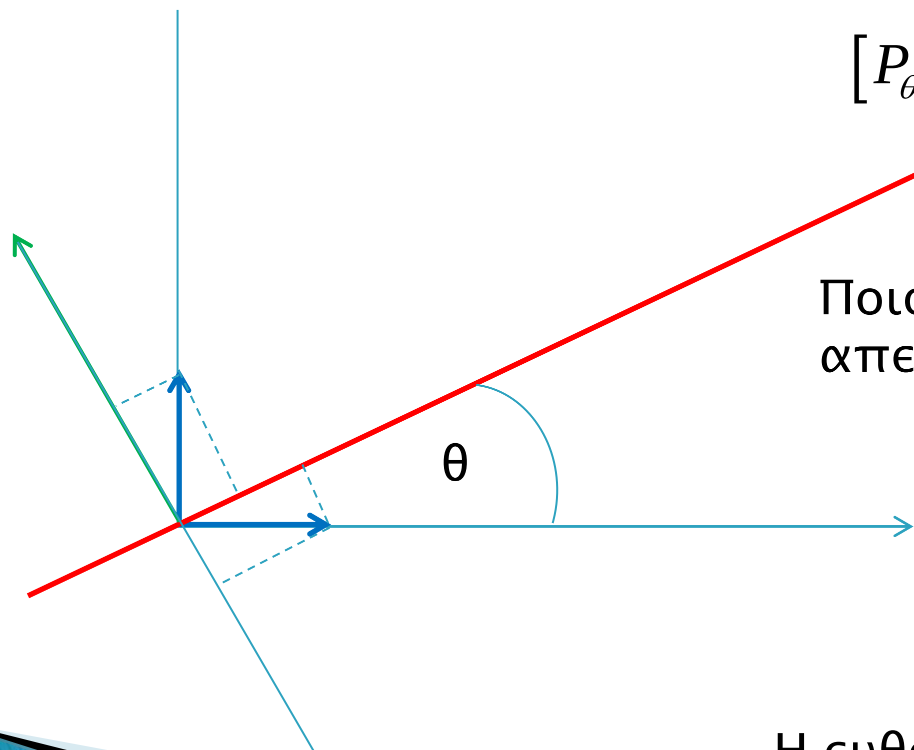
Είναι η απεικόνιση αντιστρέψιμη ;

ΟΧΙ

Ο πίνακας $[P_\theta]$ δεν είναι αντιστρέψιμος

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Προβολή σε ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον x άξονα



$$\left[P_\theta\right]=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$$

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης ;

$$\left[P_\theta\right]\mathbf{v}=0$$

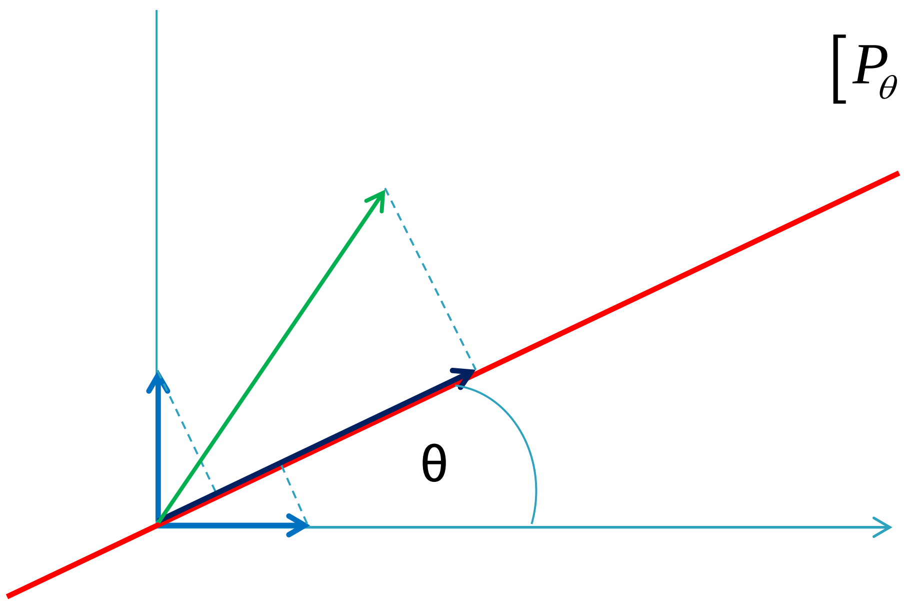
$$\mathbf{v}=c\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)$$

Η ευθεία που σχηματίζει γωνία π/2 με την ευθεία θ

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Προβολή σε ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον x άξονα

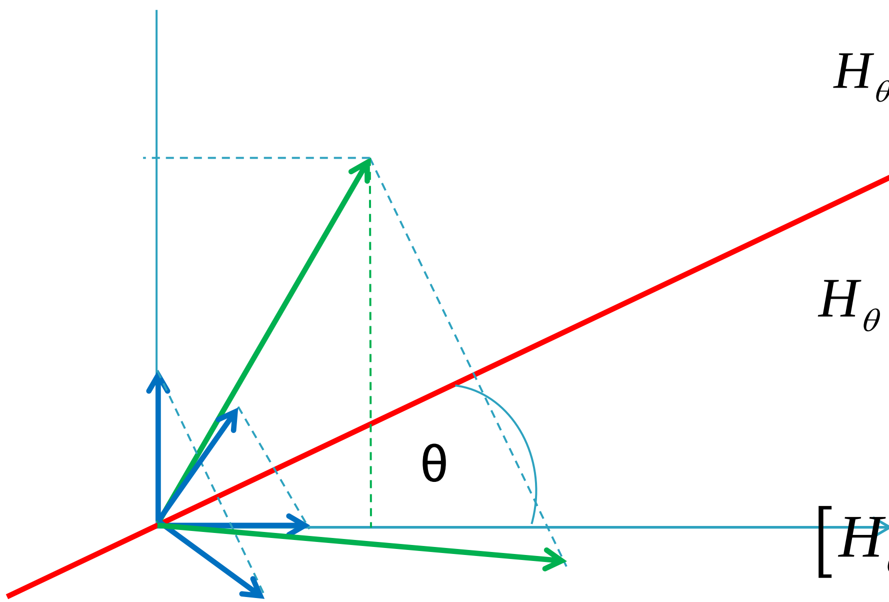
$$[P_\theta] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$



$$[P_\theta]^2 = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}^2 = [P_\theta]$$

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Ανάκλαση σε ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον x άξονα



$$H_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta - 1 \\ 2\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}$$

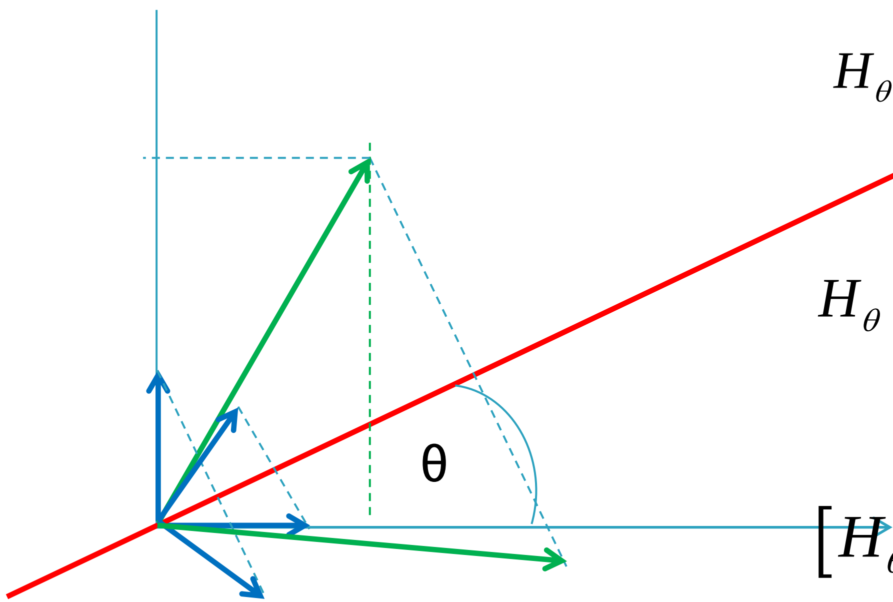
$$H_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\sin^2\theta - 1 \end{bmatrix}$$

$$[H_\theta] = \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta - 1 & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & 2\sin^2\theta - 1 \end{bmatrix}$$

$$[H_\theta]^2 = I_2 = [H_\theta][H_\theta]^{-1} \qquad [H_\theta]^{-1} = [H_\theta]$$

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Ανάκλαση σε ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον x άξονα



$$H_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta - 1 \\ 2\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$H_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\sin^2\theta - 1 \end{bmatrix}$$

$$[H_\theta] = \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta - 1 & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & 2\sin^2\theta - 1 \end{bmatrix}$$

$$[H_\theta] = 2[P_\theta] - I \quad [H_\theta]^2 = \left(2[P_\theta] - I\right)^2 = 4[P_\theta]^2 - 4[P_\theta] + I = I$$

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Ανάκλαση διανύσματος ως προς την ευθεία θ και στη συνέχεια περιστροφή κατά 90°

$$Q_{\pi/2} \circ H_\theta$$

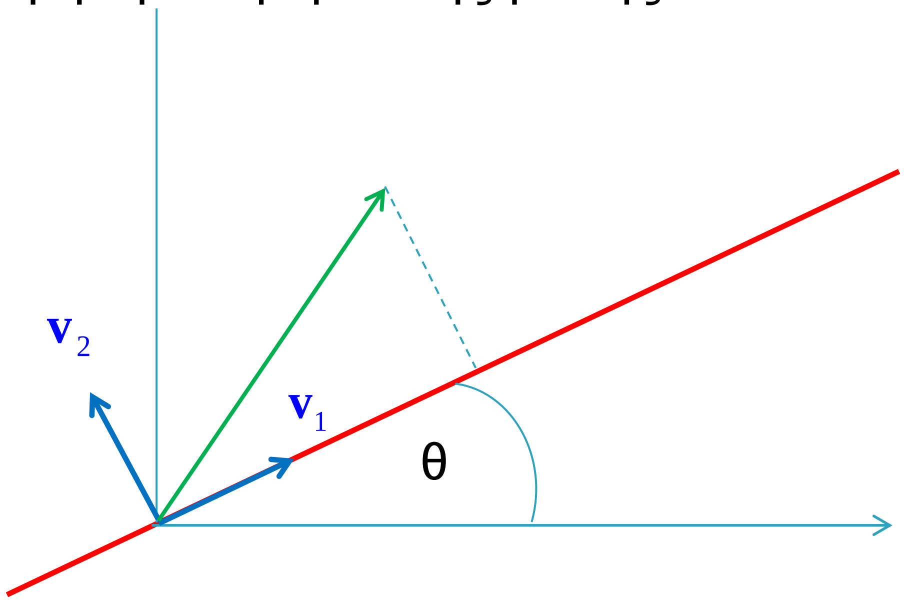
$$\left[Q_{\pi/2} \circ H_\theta\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta - 1 & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & 2\sin^2\theta - 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[Q_{\pi/2} \circ H_\theta\right] = \begin{bmatrix} -2\cos\theta\sin\theta & 1\text{-}2\sin^2\theta \\ 2\cos^2\theta - 1 & 2\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}$$

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Προβολή σε ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον x άξονα

Χρήση διαφορετικής βάσης



$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T_\theta\left(\mathbf{v}_1\right) = \mathbf{v}_1$$

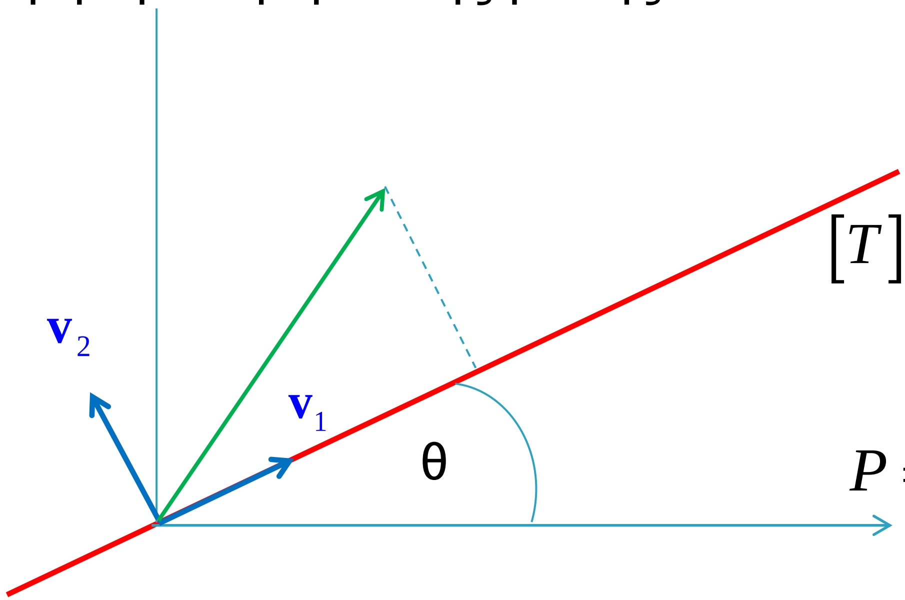
$$B_1 = \left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right\}$$

$$T_\theta\left(\mathbf{v}_2\right) = 0$$

Γραμμικές Απεικονίσεις Επιπέδου

Προβολή σε ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον x άξονα

Χρήση διαφορετικής βάσης



$$[T]_{B_1} = P^{-1}[T]_{\varepsilon} P$$

$$[T]_{\varepsilon} = [P_\theta] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[T]_{B_1} = P^{-1}[T]_{\varepsilon} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$