ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2022-2023

Διάλεξη 18

Ορίζουσες

Μιχάλης Ταρουδάκης

Βασικές Ιδιότητες

Ορίζουσα : Συνάρτηση (απεικόνιση)

$$\det : \mathrm{Mat}_n \to \mathbb{R}$$

Η Ορίζουσα καθορίζεται από τρεις βασικές ιδιότητες :

1. Η Ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από τη πρώτη γραμμή του πίνακα
2. Η Ορίζουσα αλλάζει πρόσημο εάν εναλλαγούν οι γραμμές του πίνακα
3. Η Ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι 1

Βασικές Ιδιότητες

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

1. Η Ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από τη πρώτη γραμμή του πίνακα

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = (a+a')d - (b+b')c$$

$$= (ad - bc) + (a'd - b'c) =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Βασικές Ιδιότητες

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

1. Η Ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από τη πρώτη γραμμή του πίνακα

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = tad - tbc$$

$$= t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Βασικές Ιδιότητες

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2. Η Ορίζουσα αλλάζει πρόσημο εάν εναλλαγούν οι γραμμές του πίνακα

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - da = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Βασικές Ιδιότητες

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

3. Η Ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Πρόσθετες Ιδιότητες

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Η Ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c+c' & d+d' \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c' & d' \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή κανόνων 1 και 2

Πρόσθετες Ιδιότητες

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

4. Εάν δύο γραμμές του A είναι ίδιες, τότε det$A=0$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

Εφαρμογή του κανόνα 2

Πρόσθετες Ιδιότητες

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

5. Εάν αφαιρέσουμε πολλαπλάσιο μιας γραμμής από μια άλλη, η ορίζουσα παραμένει αμετάβλητη

$$\begin{vmatrix} a - lc & b - ld \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Εφαρμογή του κανόνα 1

Πρόσθετες Ιδιότητες

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

6. Εάν ο *A* έχει μηδενική γραμμή τότε det *A*=0

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

Εφαρμογή κανόνων 1 και 5

Για γενικό τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det I_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

3. Η Ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι 1

Για γενικό τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

2. Εάν ο πίνακας *B* προκύπτει από τον *A* με εναλλαγή δύο γραμμών τότε det *B*=−det*A*

3. Η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή του πίνακα –
κάθε γραμμή του πίνακα ξεχωριστά

Για γενικό τετραγωνικό πίνακα

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}$$

7. Διαγώνιος πίνακας

$$\det D = d_1 d_2 \ldots . d_n$$

Εφαρμογή κανόνων 1 και 3

Για γενικό τετραγωνικό πίνακα

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

8. Άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας

$$\det D = d_{11} d_{22} .... d_{nn}$$

Εφαρμογή κανόνων 1 και 7

Για γενικό τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

Εάν A ιδιόμορφος, τότε det$A=0$

Εάν A μη ιδιόμορφος, τότε det$A\neq 0$

Για γενικό τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

Για δύο οποιουσδήποτε τετραγωνικούς πίνακες διάστασης *n*

$$\det AB = (\det A)(\det B)$$

Προσοχή : για $n \neq 1$

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

$$\det(tA) \neq t \det A$$

Για γενικό τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

Εάν ο πίνακας είναι μη ιδιόμορφος

$$(\det A)\left(\det A^{-1}\right) = \det AA^{-1} = \det I = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Για γενικό τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det A^{\mathrm{T}} = \det A$$