ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022-2023

Διάλεξη 19

Υπολογισμός της Ορίζουσας

Μιχάλης Ταρουδάκης

Βασικές Ιδιότητες

Ορίζουσα : Συνάρτηση (απεικόνιση)

$$\det : \mathrm{Mat}_n \to \mathbb{R}$$

Η Ορίζουσα καθορίζεται από τρεις βασικές ιδιότητες :

1. Η Ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από τη πρώτη γραμμή του πίνακα
2. Η Ορίζουσα αλλάζει πρόσημο εάν εναλλαγούν οι γραμμές του πίνακα
3. Η Ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι 1

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Μη ιδιόμορφος

$$PA = LDU'$$

$$A = P^{-1}LDU'$$

$$\det A = \det P^{-1} \det L \det D \ \det U'$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Μη ιδιόμορφος

$$L = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & d_i & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

P πίνακας μετάθεσης $\det P = \pm 1$

$$\det A = \det P^{-1} \det L \det D \det U'$$

$$\boxed{\det A = \pm 1\left(d_1 d_2 \ldots . d_n\right)}$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & (ad - bc)/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = ad - bc$$

$$A^{'} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a/c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & (cb - da)/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A' = cb - da = -det\ A$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} = L\begin{bmatrix} 2 & 0 & & & & \\ 0 & 3/2 & 0 & & & \\ & 0 & 4/3 & 0 & & \\ & & \cdot & \cdot & 0 & \\ & & & 0 & (n+1)/n & \end{bmatrix}U$$

Τριδιαγώνιος πίνακας – πεπερασμένες διαφορές

$$\det A = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\ldots\left(\frac{n+1}{n}\right) = n+1$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός με βάση τις ιδιότητες της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + ad + \left(-bc\right) + 0 = ad - bc$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Επέκταση σε ένα *n*x*n* πίνακα

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα στην πρώτη γραμμή

$$\left[a_{11} \ldots a_{1n}\right] = \left[a_{11}\ 0 \ldots 0\right] + \left[0\ a_{12}\ 0 \ldots 0\right] + \cdots + \left[0 \ldots 0\ a_{1n}\right]$$

Η ορίζουσα του πίνακα προκύπτει από το άθροισμα των οριζουσών *n* πινάκων των οποίων η πρώτη γραμμή έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο.

Υπολογισμός Ορίζουσας

Επέκταση σε ένα nxn πίνακα

Επανάληψη της διαδικασίας για 2η γραμμή : n^2 πίνακες

$$\left[a_{21}\ldots a_{2n}\right]=\left[a_{21}\;0\ldots 0\right]+\left[0\;a_{22}\;0\ldots 0\right]+\cdots+\left[0\ldots 0\;a_{2n}\right]$$

Τελικά θα έχομε άθροισμα οριζουσών n^n πινάκων

Καθένας έχει το πολύ n μη μηδενικά στοιχεία.

Εάν δύο από αυτά βρίσκονται σε μία στήλη θα υπάρχει στήλη με μόνο μηδενικά και συνεπώς με μηδενική ορίζουσα.

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$\left[a_{i1}\ldots a_{in}\right]=\ldots+\left[0\,....a_{ij_i}\,\ldots 0\right]+\cdots$$

Εάν στην *i* γραμμή το στοιχείο που δεν είναι μηδενικό βρίσκεται στην j_i στήλη, το χαρακτηρίζομε με a_{ij_i}

Υπάρχουν n! δυνατές μεταθέσεις του συνόλου {1,…,n} ώστε να έχομε τα στοιχεία σε διαφορετικές γραμμές/στήλες

Υπολογισμός Ορίζουσας

Εφαρμογή σε πίνακα 3x3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Σε ποιες στήλες υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία ;

(1,2,3)(2,3,1)(3,1,2)(1,3,2)(2,1,3)(3,2,1)

Υπολογισμός Ορίζουσας

Εφαρμογή σε πίνακα 3x3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Μετάθεση $\sigma : \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$

Υπολογισμός Ορίζουσας

Εφαρμογή σε πίνακα 3x3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\det A = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \det\left(P_{\sigma}\right)$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

Εφαρμογή σε πίνακα 3x3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

P_σ Πίνακας μετάθεσης σ των γραμμών του ταυτοτικού πίνακα 3x3

$$\det\left(P_\sigma\right) = \pm 1$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

Εφαρμογή σε πίνακα 3x3

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{vmatrix} \leftarrow \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{vmatrix} \leftarrow \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}$$

Ζυγός αριθμός μεταθέσεων (2)

$$\det\left(P_{\sigma}\right) = 1$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

Εφαρμογή σε πίνακα 3x3

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \leftarrow \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}$$

Μονός αριθμός μεταθέσεων (2)

$$\det\left(P_\sigma\right) = -1$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

Εφαρμογή σε πίνακα *n*x*n*

$$\det A = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} \det\left(P_{\sigma}\right)$$

P_{σ} Πίνακας μετάθεσης σ των γραμμών του ταυτοτικού πίνακα *n*x*n*

$$\det\left(P_{\sigma}\right) = \pm 1$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{11} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} \det\left(P_\sigma\right)$$

$$a_{11}\left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} \det\left(P_\sigma\right)\right) = \alpha_{11} C_{11}$$

C_{11} Είναι η ορίζουσα του πίνακα A_{11} που προκύπτει εάν από τον πίνακα *A* αφαιρέσουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη

Υπολογισμός Ορίζουσας

Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{12} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} \det\left(P_\sigma\right)$$

$$a_{12}\left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} \det\left(P_\sigma\right)\right) = \alpha_{12} C_{12}$$

C_{12} Διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο από την ορίζουσα του πίνακα A_{12} που προκύπτει εάν από τον πίνακα *A* αφαιρέσουμε την πρώτη γραμμή και την δεύτερη στήλη

Υπολογισμός Ορίζουσας

Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή

$$a_{1j}\left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{2\sigma(2)}.....a_{n\sigma(n)}\det\left(P_\sigma\right)\right)=\alpha_{1j}C_{1j}$$

C_{1j} Διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο από την ορίζουσα του πίνακα A_{1j} που προκύπτει εάν από τον πίνακα *A* αφαιρέσουμε την πρώτη γραμμή και την *j* στήλη.

$$C_{1j}=(-1)^{1+j}\det\left(A_{1j}\right)$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

Θεωρούμε όλες τις μεταθέσεις σ του {1,2,…n}

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} \det\left(P_\sigma\right) \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την πρώτη γραμμή

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots\ldots + a_{1n}C_{1n}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την *i* γραμμή

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την *i* γραμμή

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την *j* στήλη

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ελάσσων πίνακας του στοιχείου a_{ij}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{ij}\right)$$

Αλγεβρικό συμπλήρωμα ή συμπαράγοντας του στοιχείου a_{ij}

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A_4 = \sum_{j=1}^{4} a_{1j} C_{1j}$$

$$\det A_4 = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_4)_{11} = \det(A_4)_{11}$$

$$C_{12} = (-1)^{2+1} \det(A_4)_{12} = -\det(A_4)_{12}$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A_4)_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A_3$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_4)_{11} = \det(A_4)_{11}$$

$$C_{12} = (-1)^{2+1} \det(A_4)_{12} = -\det(A_4)_{12}$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(A_4\right)_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & A_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \left(-1\right)^{1+1} \det\left(A_4\right)_{11} = \det\left(A_4\right)_{11}$$

$$C_{12} = \left(-1\right)^{2+1} \det\left(A_4\right)_{12} = -\det\left(A_4\right)_{12}$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$(A_4)_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A_3$$

$$\det(A_4)_{11} = \det A_3 = b_{11}C_{11}' + b_{12}C_{12}'$$

$$C_{11}' = (-1)^{1+1}\det(A_3)_{11} = \det(A_3)_{11}$$

$$C_{12}' = (-1)^{2+1}\det(A_3)_{12} = -\det(A_3)_{12}$$

$$(A_3)_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (A_3)_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_3)_{11} = 3 \qquad \det(A_3)_{12} = -2$$

$$\det(A_4)_{11} = 2\cdot 3 + (-1)(-1)(-2) = 4$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$(A_4)_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & A_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{12}'' = 0$$

$$(A_2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2) = 3$$

$$\det(A_4)_{12} = c_{11}C_{11}'' + c_{12}C_{12}''$$

$$\det(A_4)_{12} = c_{11}C_{11}''$$

$$C_{11}'' = (-1)^{1+1}\det(A_2) = \det(A_2)$$

$$\det(A_4)_{12} = (-1)\det(A_2)$$

$$\det(A_4)_{12} = -3$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A_4 = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12}$$

$$\det A_4 = 2C_{11} + (-1)C_{12}$$

$$\det A_4 = 2\det(A_4)_{11} + (-1)(-1)\det(A_4)_{12}$$

$$\det(A_4)_{11} = 4 \qquad \det(A_4)_{12} = -3$$

$$\det A_4 = 2\det(A_4)_{11} + \det(A_4)_{12} = 5$$

$$\det A_4 = 2\det(A_3) - \det(A_2)$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

Για ένα nxn τριδιαγώνιο πίνακα αυτής της μορφής

$$\det A_n = 2\det A_{n-1} - \det A_{n-2}$$