ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2022-2023

Διάλεξη 2

Πράξεις Πινάκων – Αντίστροφος Πίνακας

Μιχάλης Ταρουδάκης

Πίνακες

Γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n &= b_i \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A_1} \cdot \mathbf{x} = b_1
$$

$$
\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} = b_2
$$

$$
\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} = b_i
$$

$$
\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{x} = b_m
$$

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1j} \ldots . \; a_{1n} \\
\vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\
a_{i1} \; a_{i2} \ldots \boxed{a_{ij}} \ldots . a_{in} \\
\vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\
a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots . a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right)
$$

Πίνακας *m* x *n*

$$
A = \left[\, a_{ij} \,\right]
$$

Πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1j} \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Τετραγωνικός πίνακας $m=n$

Παραλληλόγραμμος πίνακας $m\neq n$

Ταυτοτικός Πίνακας I_n

Τετραγωνικός πίνακας nxn

$$\alpha_{ij}=0, \quad i\neq j$$

$$\alpha_{ii}=1$$

Πίνακες

Πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό *c*

$$cA = c\left[a_{ij}\right]$$

$$cA = c\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1j}\ldots.\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2j}\ldots. a_{2n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mj}\ldots. a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11}\ ca_{12}\ldots ca_{1j}\ldots.\ ca_{1n} \\ ca_{21}\ ca_{22}\ldots ca_{2j}\ldots. ca_{2n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ ca_{m1}\ ca_{m2}\ldots ca_{mj}\ldots. ca_{mn} \end{bmatrix}$$

Πίνακες

Πρόσθεση Πινάκων m x n $\quad A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1j}\ldots.\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2j}\ldots.a_{2n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mj}\ldots.a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11}\ b_{12}\ldots b_{1j}\ldots.\ b_{1n} \\ b_{21}\ b_{22}\ldots b_{2j}\ldots.b_{2n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ b_{m1}\ b_{m2}\ldots b_{mj}\ldots.b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}\cdots a_{1j}+b_{1j}\cdots a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{i1}+b_{i1}\cdots a_{ij}+b_{ij}\cdots a_{in}+b_{in} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}+b_{m1}\cdots a_{mj}+b_{mj}\ldots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \qquad (A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

Πίνακες

Ιδιότητες αθροίσματος – πολλαπλασιασμού με πραγματικό αριθμό

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\bigcirc + A = A$$

$$\exists -A : A + (-A) = \bigcirc$$

$$c\left(dA\right) = \left(cd\right)A$$

$$c(A + B) = cA + cB$$

$$\left(c + d\right)A = cA + dA$$

$\bigcirc$ Πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι 0

Πίνακες

Ένα διάνυσμα *n* στοιχείων θεωρείται πίνακας *n* x1

Γινόμενο πίνακα *A* με διάνυσμα x

Πίνακας *A*: *m* x *n*   Διάνυσμα **x**, *n* στοιχείων (πίνακας *n* x1)

Διάνυσμα **y** στοιχείων (πίνακας *m* x1)

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \left(y_1, y_2, \ldots y_i, \ldots., y_m \right)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Εσωτερικό γινόμενο *i* γραμμής του *A* με το **x**

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots . a_{in}x_n$$

$$y_i = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}$$

$$\left(A\mathbf{x} \right)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Πίνακες

Γινόμενο πίνακα *A* με διάνυσμα x

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{i1} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$y_i = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}$$

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots a_{in}x_n$$

Παράδειγμα στον πίνακα

Πίνακες

Γινόμενο πίνακα *A* με πίνακα *B*

Πίνακας *A*: *m* x *n* Πίνακας *B*: *n* x p

$$\left(AB\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \; i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots.,p$$

Εσωτερικό γινόμενο *i* γραμμής του *A* με την *j* στήλη του *B*

$$\left(AB\right)_{ij} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{b}_j$$

Πίνακες

Γινόμενο πίνακα *A* με πίνακα *B*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\ \ldots a_{1j}\ldots .\ a_{1n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{i1}\ \ldots a_{ij}\ldots . a_{in} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}\ \ldots a_{mj}\ldots . a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11}\ \ldots b_{1j}\ldots . b_{1p} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ b_{i1}\ \ldots b_{ij}\ldots . b_{ip} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ b_{n1}\ \ldots b_{nj}\ldots . b_{np} \end{bmatrix}$$

Στοιχείο *ij* του *AB* : Εσωτερικό γινόμενο *i* γραμμής του *A* με την *j* στήλη του *B*

$$\left(AB\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad i=1,\ldots,m \quad j=1,\ldots.,p$$

Πίνακες

Γινόμενο πίνακα *A* με πίνακα *B*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots . \, a_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{i1} \ldots a_{ij} \ldots . \, a_{in} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mj} \ldots . \, a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \ldots b_{1j} \ldots . \, b_{1p} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ b_{i1} \ldots b_{ij} \ldots . \, b_{ip} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ b_{n1} \ldots b_{nj} \ldots . \, b_{np} \end{bmatrix}$$

Στήλη *j* του *AB* : Γινόμενο *A* με την *j* στήλη του *B*

$$(\mathbf{ab})_j = A\mathbf{b}_j$$

Πίνακες

Γινόμενο πίνακα *A* με πίνακα *B*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\ \dots a_{1j}\dots.\ a_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{i1}\ \dots a_{ij}\dots.a_{in} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}\ \dots a_{mj}\dots.a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11}\ \dots b_{1j}\dots.\ b_{1p} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ b_{i1}\ \dots b_{ij}\dots.b_{ip} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ b_{n1}\ \dots b_{nj}\dots.b_{np} \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1. Η *i* γραμμή του πίνακα *AB* είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του *B* με συντελεστές τις συνιστώσες της *i* γραμμής του *A*.
Πρόταση 2. Η *j* στήλη του πίνακα *AB* είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των στηλών του *A* με συντελεστές τις συνιστώσες της *j* στήλης του *B*

Πίνακες

Γινόμενο πίνακα *A* με πίνακα *B*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\;\dots a_{1j}\dots.\;a_{1n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{i1}\;\dots a_{ij}\dots.\;a_{in} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}\;\dots a_{mj}\dots.\;a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11}\;\dots b_{1j}\dots.\;b_{1p} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ b_{i1}\;\dots b_{ij}\dots.\;b_{ip} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ b_{n1}\;\dots b_{nj}\dots.\;b_{np} \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1. Η *i* γραμμή του πίνακα *AB* είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του *B* με συντελεστές τις συνιστώσες της *i* γραμμής του *A*.

Απόδειξη :

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \quad i=1,\dots,m \qquad j=1,\dots.,p$$

$$\left[(AB)_{i1}\cdots(AB)_{ip}\right]=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k1}\cdots\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kp}\right]=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left[b_{k1}\cdots b_{kp}\right]$$

Πίνακες

Γινόμενο πίνακα *A* με πίνακα *B*

Πρόταση 1. Η i γραμμή του πίνακα AB είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του B με συντελεστές τις συνιστώσες της i γραμμής του A.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα στον πίνακα

Πίνακες

Γινόμενο πίνακα *A* με πίνακα *B*

Ο πολλαπλασιασμός πίνακα A με B μπορεί να είναι δυνατός αλλά όχι ο πολλαπλασιασμός πίνακα B με A.

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι μεταθετικός.

Άσκηση : Αναφέρετε περιπτώσεις που ο πολλαπλασιασμός πίνακα A με B είναι δυνατός και άλλες στις οποίες δεν είναι.

Πίνακας A^{κ}

Ορίζεται στην περίπτωση τετραγωνικού πίνακα μόνο.

Πίνακες

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Πινάκων

$$A, A' : m \times n \quad B, B' : n \times p \quad C : p \times q$$

$$(AB)C = A(BC)$$ Προσεταιριστική Ιδιότητα

$$(cA)B = c(AB) = A(cB)$$ Επιμεριστική Ιδιότητα

$$(A + A')B = (AB) + (A'B)$$

$$A(B + B') = AB + AB'$$

$$AI_n = A = I_m A$$

Πίνακες

Επιμεριστική Ιδιότητα $\quad (AB)C = A(BC)$

$A : m\times n \quad B : n\times p \quad C : p\times q$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad i = 1,\dots,m \quad j = 1,\dots.,p$$

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (BC)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{t=1}^{p} b_{kt} c_{tj} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{p} a_{ik} b_{kt} c_{tj}$$

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{t=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kt} c_{tj}$$

$$= \sum_{t=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kt} \right) c_{tj}$$

$$= \sum_{t=1}^{p} (AB)_{it}\, c_{tj} = ((AB)C)_{ij}$$

Πίνακες

- Πίνακες μετάθεσης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Εναλλαγή γραμμών

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Εναλλαγή στηλών

Αντίστροφοι Πίνακες

Θεωρούμε πίνακα A mxn

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ένας πίνακας B διάστασης nxm ονομάζεται δεξιός αντίστροφος του A εάν ισχύει : $AB = I_m$

Ένας πίνακας C διάστασης nxm ονομάζεται αριστερός αντίστροφος του A εάν ισχύει $CA = I_n$

Παράδειγμα στον πίνακα

Αντίστροφοι Πίνακες

Θεωρούμε **τετραγωνικό πίνακα** A nxn

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας πίνακας B τέτοιος ώστε να ισχύει

$BA = I_n$ και $AB = I_n$

Ο Πίνακας B ονομάζεται αντίστροφος **(inverse)** του A και συμβολίζεται με A^{-1}

Υπάρχει το πολύ ένας αντίστροφος πίνακας του Α

Απόδειξη : Στον πίνακα

Αντίστροφοι Πίνακες

Θεωρούμε **τετραγωνικό πίνακα** A nxn

ΠΡΟΤΑΣΗ : Το γινόμενο δύο αντιστρέψιμων πινάκων A και B είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Απόδειξη : Στον πίνακα