ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
2022-2023

Διάλεξη 20

Εφαρμογές Οριζουσών

Μιχάλης Ταρουδάκης

Βασικές Ιδιότητες

Ορίζουσα : Συνάρτηση (απεικόνιση)

$$\det : \mathrm{Mat}_n \to \mathbb{R}$$

Η Ορίζουσα καθορίζεται από τρεις βασικές ιδιότητες :

1. Η Ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από τη πρώτη γραμμή του πίνακα

2. Η Ορίζουσα αλλάζει πρόσημο εάν εναλλαγούν οι γραμμές του πίνακα

3. Η Ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι 1

Υπολογισμός Ορίζουσας

Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή

$$a_{1j}\left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{2\sigma(2)}.....a_{n\sigma(n)} \det\left(P_\sigma\right)\right) = \alpha_{1j}C_{1j}$$

C_{1j} Διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο από την ορίζουσα του πίνακα A_{1j} που προκύπτει εάν από τον πίνακα *A* αφαιρέσουμε την πρώτη γραμμή και την *j* στήλη.

$$C_{1j} = (-1)^{1+j} \det\left(A_{1j}\right)$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

Θεωρούμε όλες τις μεταθέσεις σ του {1,2,…n}

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} \det\left(P_\sigma\right) \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την πρώτη γραμμή

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots\ldots + a_{1n}C_{1n}$$

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την *i* γραμμή

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την *j* στήλη

Υπολογισμός Ορίζουσας

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ελάσσων πίνακας του στοιχείου a_{ij}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{ij}\right)$$

Αλγεβρικό συμπλήρωμα ή συμπαράγοντας του στοιχείου a_{ij}

Συζυγής πίνακας

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Εάν $\mathbf{b} = \left(b_1, \ldots., b_n\right)$ και

$$B^i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$b_1 C_{i1} + b_2 C_{i2} + \cdots + b_n C_{in} = \left|B^i\right|$$

Συζυγής πίνακας

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα όταν το διάνυσμα **b** αντικαταστήσει την *j* στήλη του πίνακα Α δημιουργώντας τον πίνακα B_j

$$b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj} = \left| B_j \right|$$

Συζυγής πίνακας

Πρόταση : $$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = \det A \cdot I_n$$

$$i, j: \quad a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

$i = j$ Άθροισμα = det *A*

$i \neq j$ Άθροισμα = det *A'*

A' προκύπτει από τον A εάν αντικαταστήσομε την *i* γραμμή στην *j* γραμμή.

Δύο γραμμές ίδιες : Οριζουσα 0

$$A(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{bmatrix}$$

Συζυγής πίνακας

Πρόταση : $$A\left(\operatorname{adj} A\right) = \left(\operatorname{adj} A\right) A = \det A \cdot I_n$$

Θεώρημα : Εάν $\det A \neq 0$ $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(\operatorname{adj} A\right)$$

Λύση γραμμικού συστήματος

Κανόνας του Cramer :

Λύση γραμμικού συστήματος $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

$$\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,.....x_n\right) \qquad x_j=\frac{\det B_j}{\det A}$$

όπου ο πίνακας B_j προκύπτει εάν αντικαταστήσομε το **b** στη j στήλη του A

Απόδειξη

$$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}=\frac{1}{\det A}\left(\operatorname{adj}A\right)\mathbf{b}$$

$$x_j=\frac{1}{\det A}\left(C_{1j}b_1+C_{2j}b_2+\cdots+C_{nj}b_n\right)=\frac{\det B_j}{\det A}$$

Λύση γραμμικού συστήματος

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές

Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}$

Για ποιες τιμές του λ ο πίνακας *A* είναι ιδιόμορφος ;

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = A' - \lambda I_3$$

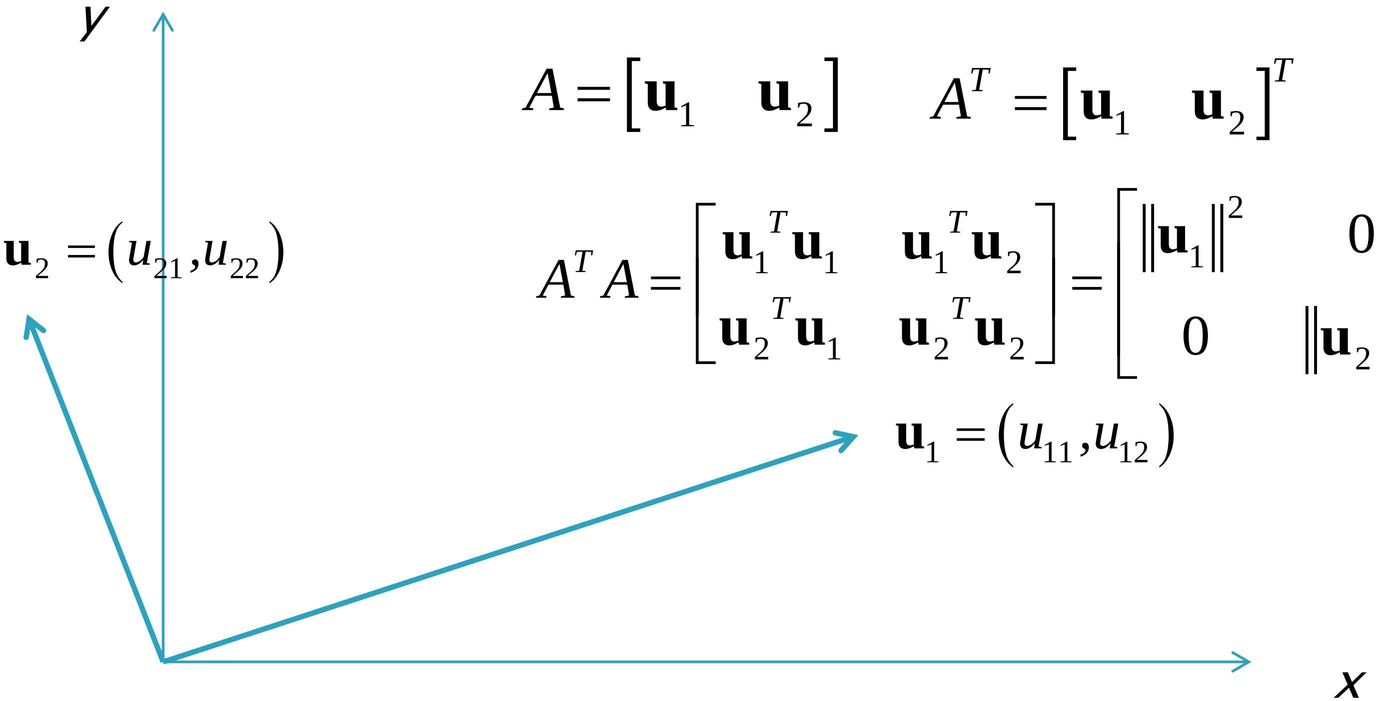
Για πίνακα *A* ιδιόμορφο $A\mathbf{x} = 0$ έχει μη μηδενική λύση.

Υπολογισμός όγκου n-διάστατου παραλληλεπιπέδου

$$V = \|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{u}_2\|$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}^T$$

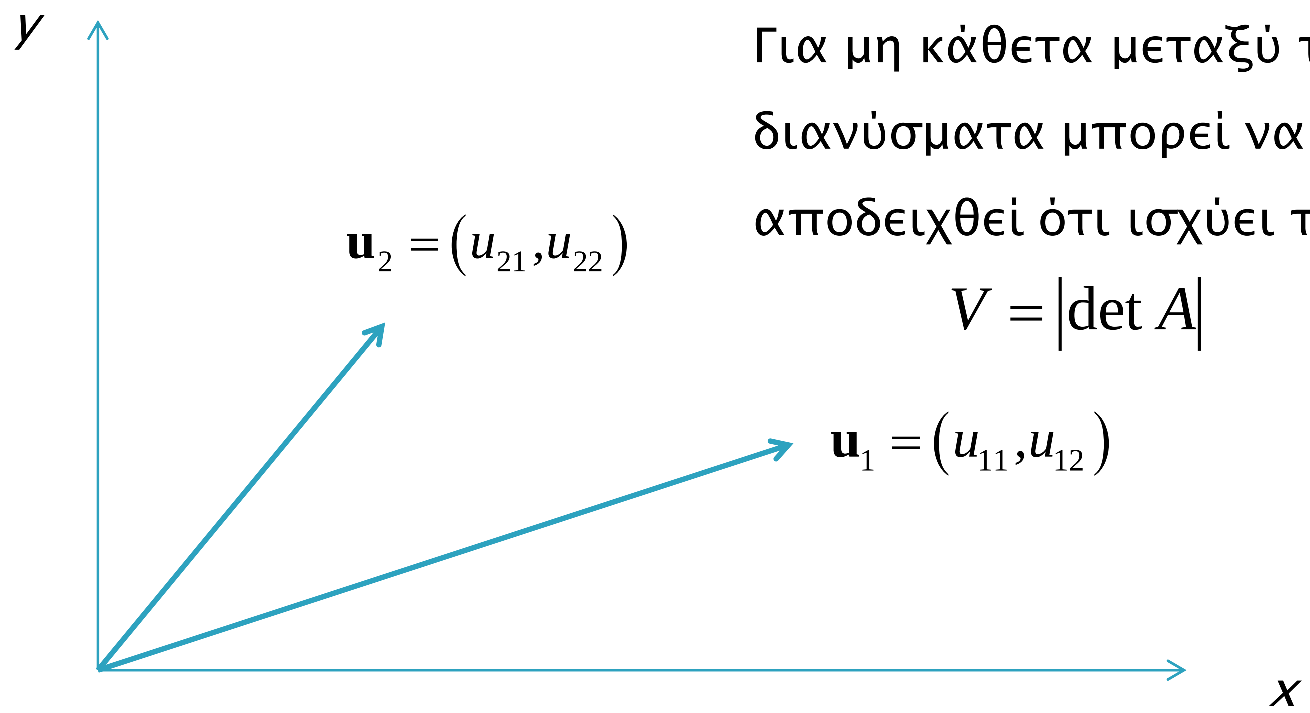
$$A^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1{}^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1{}^T \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2{}^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2{}^T \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_1\|^2 & 0 \\ 0 & \|\mathbf{u}_2\|^2 \end{bmatrix}$$



$$V^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 \|\mathbf{u}_2\|^2 = \det\left(A^T A\right) = (\det A)^2$$

$$V = |\det A|$$

Υπολογισμός όγκου n-διάστατου παραλληλεπιπέδου



$$\mathbf{u}_2 = \left(u_{21}, u_{22}\right)$$

$$\mathbf{u}_1 = \left(u_{11}, u_{12}\right)$$

Για μη κάθετα μεταξύ τους διανύσματα μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει το ίδιο

$$V = \left|\det A\right|$$

Υπολογισμός όγκου n-διάστατου παραλληλεπιπέδου

Επέκταση στις n διαστάσεις

$$\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \ldots\ldots \mathbf{u}_n\right)$$

Εάν τα διανύσματα είναι ορθογώνια

$$A = \left[\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n\right] \qquad V = \left|\det A\right|$$

Ισχύει και για διανύσματα μη κάθετα μεταξύ τους !