ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022-2023

Διάλεξη 3

Αντίστροφοι Πίνακες – Συνέχεια – Ανάστροφοι Πίνακες –Διαδικασία Απαλοιφής Gauss

Μιχάλης Ταρουδάκης

Αντίστροφοι Πίνακες

Θεωρούμε **τετραγωνικό πίνακα** A nxn

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας πίνακας B τέτοιος ώστε να ισχύει

$BA = I_n$ και $AB = I_n$

Ο Πίνακας B ονομάζεται **αντίστροφος** **(inverse)** του A και συμβολίζεται με A^{-1}

Υπάρχει το πολύ ένας αντίστροφος πίνακας του Α

Αντίστροφοι Πίνακες

Αντίστροφος του Πίνακα *A* 1x1 $\left[a\right]$

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$$

Πότε υπάρχει ;

Αντίστροφοι Πίνακες

Αντίστροφος ενός διαγώνιου πίνακα A

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Αντίστροφοι Πίνακες

Αντίστροφος ενός πίνακα 2x2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Πότε δεν ορίζεται ;

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Επαλήθευση

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφοι Πίνακες

Αντίστροφος ενός πίνακα 2x2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \qquad ad-bc=0$$

Δεν υπάρχει αντίστροφος (γιατί ;)

Αντίστροφοι Πίνακες

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$EE' = E'E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ε : Στοιχειώδης πίνακας $\quad E \equiv E_{32}\left(-1\right)$

Ανάστροφοι Πίνακες

Εάν A είναι ένας πίνακας mxn, ονομάζομε ανάστροφο **(transpose)** του A, τον πίνακα nxm του οποίου οι στήλες είναι οι γραμμές του A. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με A^T.

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Ανάστροφοι Πίνακες

ΠΡΟΤΑΣΗ :

Εάν *A* και *B* είναι mxn πίνακες και *C* είναι nxp πίνακας τότε :

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$\left(A+B\right)^{\mathrm{T}} = A^T + B^T$$

$$\left(AC\right)^{\mathrm{T}} = C^T A^T$$

Εάν *A* αντιστρέψιμος, τότε $\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(A^T\right)^{-1}$

Ανάστροφοι Πίνακες

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : $\left(AC\right)^{\mathrm{T}} = C^T A^T$ $\quad A: m \times n \quad C: n \times p$

Οι διαστάσεις συμφωνούν:

$\left(AC\right): m \times p,\ \left(AC\right)^T : p \times m \qquad C^T : p \times n,\ \ A^T : n \times m,\ \ C^T A^T : p \times m$

$$\left(AC\right)_{ji} = \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{c}_i = \left(\left(AC\right)^T\right)_{ij}$$

$$\left(C^T A^T\right)_{ij} = \mathbf{C}_i^{\ T} \cdot \mathbf{a}^T{}_j = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{A}_j \Longrightarrow \left(AC\right)^{\mathrm{T}} = C^T A^T$$

Ανάστροφοι Πίνακες

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **συμμετρικός** εάν $A^T = A$

$$(A)_{ij} = (A)_{ji} \quad \forall i, j$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **αντισυμμετρικός** εάν

$A^T = -A$

$$(A)_{ij} = -(A)_{ji} \quad \forall i, j$$

Ανάστροφοι Πίνακες

Παράδειγμα συμμετρικού πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα αντισυμμετρικού πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακες (συμπλήρωμα)

Συμβολισμός : Το σύνολο των πινάκων που αναφέρονται στο σώμα k των πραγματικών $\mathbb{R}$ ή μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ συμβολίζεται με $\mathrm{M}_{mn}(k)$ ή $\mathrm{Mat}_{mn}(k)$

‘Όταν m=n τότε το σύνολο συμβολίζεται με ένα δείκτη : $\mathrm{M}_{n}(k)$

Εμείς θα αναφερθούμε σε πραγματικούς αριθμούς, επομένως οι πίνακες στους οποίους αναφερόμαστε θα ανήκουν στο σύνολο $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ και εάν m=n για οικονομία συμβολισμού στο σύνολο $\mathrm{M}_{n}(\mathbb{R})$

Γραμμικά Συστήματα

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n = b_i$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Γραμμικά Συστήματα

Βασικές πράξεις που δεν αλλάζουν τη λύση

- Εναλλαγή της σειράς των εξισώσεων
- Πολλαπλασιασμός μιας εξίσωσης με μη μηδενικό πραγματικό αριθμό
- Αντικατάσταση μιας εξίσωσης με το άθροισμα της εξίσωσης αυτής με ένα πολλαπλάσιο κάποιας άλλης

Διαδικασία απαλοιφής Gauss

Στόχος : Ισοδύναμο σύστημα που λύνεται με διαδοχικές απλές πράξεις.

Carl Friedrich Gauß 1777-1855

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 5 \\
4x - 6y &= -2 \\
-2x + 7y + 2z &= 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-4x - 2y - 2z &= -10 \\
4x - 6y &= -2 \\
-2x + 7y + 2z &= 9
\end{aligned}
$$

Πολλ. 1ης Εξίσωσης με -2

Διαδικασία απαλοιφής Gauss

$$\begin{aligned}
-4x-2y-2z &= -10\\
4x-6y &= -2\\
-2x+7y+2z &= 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4x-2y-2z &= -10\\
-8y-2z &= -12\\
-2x+7y+2z &= 9
\end{aligned}$$

Αντικατάσταση της 2ης με το άθροισμά της με τη νέα πρώτη.

$$\begin{aligned}
2x+y+z &= 5\\
-8y-2z &= -12\\
-2x+7y+2z &= 9
\end{aligned}$$

Επαναφορά της πρώτης =

Αντικατάσταση της 2ης με το άθροισμά της με τ0 (-2)xπρώτη

Διαδικασία απαλοιφής Gauss

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 5 \\
-8y - 2z &= -12 \\
-2x + 7y + 2z &= 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 5 \\
-8y - 2z &= -12 \\
8y + 3z &= 14
\end{aligned}
$$

Αντικατάσταση 3ης με το άθροισμά της με την 1η

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 5 \\
-8y - 2z &= -12 \\
z &= 2
\end{aligned}
$$

Αντικατάσταση 3ης με το άθροισμά της με την 2η

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss

$$\begin{aligned} \mathbf{2}x + y + z \quad &= 5 \\ -\mathbf{8}y - 2z &= -12 \\ \mathbf{1}z &= 2 \end{aligned}$$

Νέο ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Αντικατάσταση του *z* στη 2

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Αντικατάσταση των *y* και *z* στη 2

Ανάδρομη αντικατάσταση

Γραμμικά Συστήματα και Πίνακες

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n = b_i$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Γραμμικά Συστήματα και Πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1j} \ldots\ a_{1n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Έκφραση Γραμμικού Συστήματος με Πίνακες-Διανύσματα

Γραμμικά Συστήματα και Πίνακες

$$\left[A \middle| \mathbf{b}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Επαυξημένος πίνακας

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ 4x - 6y &= -2 \\ -2x + 7y + 2z &= 9 \end{aligned}$$

Οδηγοί

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{-8} & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}$$

Θέλομε πλήρες σύνολο οδηγών για μοναδική λύση στο σύστημα

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Σημασία των οδηγών

$$u_{44}x_4 = c_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{c_4}{u_{44}}$$

Προφανώς θέλομε $u_{44} \neq 0$

$$u_{33}x_3 + u_{34}x_4 = c_3 \Rightarrow x_3 = \frac{c_3 - u_{34}x_4}{u_{33}}$$

Προφανώς θέλομε $u_{33} \neq 0$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ 2x+2y+5z &= b \\ 4x+4y+8z &= c \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 5 & b \\ 4 & 4 & 8 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 & -2a+b \\ 0 & 0 & 4 & -4a+c \end{bmatrix}$$

Δεν υπάρχει πλήρες σύνολο οδηγών για μοναδική λύση στο σύστημα

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss

$$\begin{aligned} x + y + z \quad &= a \\ 2x + 2y + 5z &= b \\ 4x + 4y + 8z &= c \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 5 & b \\ 4 & 4 & 8 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 & -2a+b \\ 0 & 0 & 4 & -4a+c \end{bmatrix}$$

Εάν $-2a+b=6$ και $-4a+c=7$ $\Longrightarrow$ $\begin{aligned} 3z &= 6 \\ 4z &= 7 \end{aligned}$

Ασυμβίβαστο σύστημα

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ 2x+2y+5z &= b \\ 4x+4y+8z &= c \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 5 & b \\ 4 & 4 & 8 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 & -2a+b \\ 0 & 0 & 4 & -4a+c \end{bmatrix}$$

Εάν $-2a+b=6$ και $-4a+c=8$ $\Rightarrow$ $\begin{aligned} 3z &= 6 \\ 4z &= 8 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $z=2$

Απροσδιόριστο σύστημα $x+y+2=a$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ 4x - 6y &= -2 \\ -2x + 7y + 2z &= 9 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y - 2z &= -12 \\ z &= 2 \end{aligned} \rightarrow A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$$

A A'

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Καταλήξαμε σε ένα ισοδύναμο σύστημα με τον πίνακα A’ να είναι άνω τριγωνικός !

Ομογενή συστήματα

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ 4x - 6y &= 0 \\ -2x + 7y + 2z &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ -8y - 2z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \rightarrow A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$$

Ομογενές σύστημα !

Επίλυση με ανάδρομη αντικατάσταση :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Υπάρχει πλήρες σύνολο οδηγών άρα μοναδική λύση.
Το ομογενές σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση !

Ομογενή συστήματα

$$\begin{aligned} x + y + z \quad &= 0 \\ 2x + 2y + 5z &= 0 \\ 4x + 4y + 8z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 5 & b \\ 4 & 4 & 8 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3z &= 0 \\ 4z &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow z = 0$$

$$x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$ Άπειρες λύσεις $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Πρώτα συμπεράσματα

Θέλομε πλήρες σύνολο οδηγών για μοναδική λύση σε γραμμικό σύστημα *n* εξισώσεων με *n* αγνώστους

Ένα ομογενές σύστημα *n* εξισώσεων με *n* αγνώστους με πλήρες σύνολο οδηγών έχει μόνο τη μηδενική λύση