ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022-2023

Διάλεξη 4

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss με Πίνακες. Παραγοντοποίηση *LU*.

Μιχάλης Ταρουδάκης

Γραμμικά Συστήματα

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots + a_{in}x_n = b_i$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Γραμμικά Συστήματα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1j} \ldots . \; a_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{i1} \; a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots . a_{in} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots . a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Γραμμικά Συστήματα

$$\left[A\middle|\mathbf{b}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Επαυξημένος πίνακας

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ 4x - 6y &= -2 \\ -2x + 7y + 2z &= 9 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y - 2z &= -12 \\ z &= 2 \end{aligned} \rightarrow A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Καταλήξαμε σε ένα ισοδύναμο σύστημα με τον πίνακα *Α΄* να είναι άνω τριγωνικός !

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ 4x - 6y &= -2 \\ -2x + 7y + 2z &= 9 \end{aligned}$$

Οδηγοί

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{-8} & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}$$

Θέλομε πλήρες σύνολο οδηγών για μοναδική λύση στο σύστημα μέσω ανάδρομης αντικατάστασης.

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

Στοιχειώδης Πίνακας $E_{ij}\left(\lambda\right)$: τετραγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο και λ σε κάποια θέση ij με $i \neq j$

Πολλαπλασιασμός από δεξιά ενός πίνακα A :

Αφαίρεση $-\lambda$ φορές τη στήλη i του A από τη στήλη j
Πρόσθεση λ φορές τη στήλη i του A στη στήλη j

A $\qquad$ $E_{12}\,(-1)$ $\qquad$ AE_{12}

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

Στοιχειώδης Πίνακας $E_{ij}(\lambda)$: τετραγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο και λ σε κάποια θέση ij με $i \neq j$

Πολλαπλασιασμός από αριστερά ενός πίνακα A :

Αφαίρεση $-\lambda$ φορές τη γραμμή j του A από τη γραμμή i
Πρόσθεση λ φορές τη γραμμή j του A στη γραμμή i

$E_{12}\ (-1) \qquad A \qquad\qquad E_{12}A$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

Στοιχειώδης Πίνακας $E_{ij}(\lambda)$: τετραγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο και λ σε κάποια θέση ij με $i \neq j$

$$E_{21}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή στον $[A : \mathbf{b}]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Αφαίρεση 2 φορές τη γραμμή 1 του $[A : \mathbf{b}]$ από την γραμμή 2

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$E_{21}(-2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$E_{31}(1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$E_{32}(1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$GFEA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad GFE\left[A : \mathbf{b}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$GFEA=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -8 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad GFE\left[A:\mathbf{b}\right]=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -8 & -2 & -12\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

$$GFEA\mathbf{x}=GFE\mathbf{b}$$

Προσέχομε ότι *GFEA* είναι άνω τριγωνικός πίνακας

$$GFEA=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -8 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=U \qquad GFE\mathbf{b}=\begin{bmatrix}5\\ -12\\ 2\end{bmatrix}=\mathbf{c}$$

Λύνομε το ισοδύναμο σύστημα $U\mathbf{x}=\mathbf{c}$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

Ανάδρομη αντικατάσταση : Αναίρεση των προηγούμενων βημάτων

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο G^{-1} είναι αντίστροφος του G !

Αντίστοιχα

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$E^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Ξαναβρήκαμε τον αρχικό επαυξημένο πίνακα $\left[A : \mathbf{b}\right]$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c}$$ Ισοδύναμο σύστημα

$$E^{-1}F^{-1}G^{-1}U = A$$

$$L = E^{-1}F^{-1}G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Κάτω τριγωνικός πίνακας !

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c}$$ Ισοδύναμο σύστημα

$$LU = A$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Α παραγοντοποιείται σε ένα άνω τριγωνικό και ένα κάτω τριγωνικό πίνακα.

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b} = L\mathbf{c}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$L = E^{-1}F^{-1}G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = GFEA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b} = L\mathbf{c}$$

Βρίσκομε το διάνυσμα που ικανοποιεί το $L\mathbf{c}=\mathbf{b}$ και κατόπιν το διάνυσμα που ικανοποιεί το $U\mathbf{x}=\mathbf{c}$

Εάν έχομε ένα πλήρες σύστημα οδηγών, η ευθεία και η ανάδρομη αντικατάσταση εξασφαλίζουν μοναδική λύση στα συστήματα.

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$L\mathbf{c} = \mathbf{b} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Με ευθεία αντικατάσταση $c_1 = 5$, $c_2 = -12$, $c_3 = 2$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Με ανάδρομη αντικατάσταση $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα διαγώνιο πίνακα *D* με τα διαγώνια στοιχεία να είναι οι οδηγοί. Τότε ο άνω τριγωνικός πίνακας *U* παραγοντοποιείται σε *DU'*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = DU'$$

$$LU = A = LDU'$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$LU = A = LDU'$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Η παραγοντοποίηση αυτή είναι μοναδική !

Προσοχή ! *L* και *U’* έχουν διαγώνια στοιχεία ίσα με 1

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

Υπάρχει περίπτωση να χρειαστεί εναλλαγή γραμμών

Στην περίπτωση αυτή θα χρειαστεί πολλαπλασιασμός του *A* με ένα πίνακα μετάθεσης *P*

$$PA = LDU'$$

Η παραγοντοποίηση είναι πάλι μοναδική

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Η πρώτη εξίσωση έχει 0 στη θέση του οδηγού. Δεν μας κάνει αυτή η διάταξη

Θέλομε εναλλαγή της πρώτης με τη δεύτερη γραμμή

Ο κατάλληλος πίνακας μετάθεσης είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

Νέο ισοδύναμο σύστημα $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$

Το διάνυσμα **x** δεν αλλάζει

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

Άλλο παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Εναλλάσσομε τη γραμμή 3 με τη γραμμή 1

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{13}A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$$

Χρειαζόμαστε και άλλη αλλαγή για πλήρες σύνολο οδηγών

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{23}P_{13}A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

Ακόμη ένα παράδειγμα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Εναλλάσσομε τη γραμμή 3 με τη γραμμή 1

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{13}B = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Δεν μπορούμε να κάνομε άλλη αλλαγή για πλήρες σύνολο οδηγών !

Διαδικασία Απαλοιφής Gauss μέσω πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{23}P_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Ιδιόμορφος Πίνακας

- Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι ιδιόμορφος (singular), εάν η διαδικασία απαλοιφής με πιθανές εναλλαγές γραμμών, καταλήγει σε ένα άνω τριγωνικό πίνακα με περισσότερα μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο. Αντίθετα, εάν η διαδικασία απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών, ο πίνακας A καλείται μη ιδιόμορφος (non singular).

$$P_{13}B = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \qquad PA = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

B ιδιόμορφος $\qquad$ A μη ιδιόμορφος