ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022-2023

Διάλεξη 5

Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα
Διαδικασία Απαλοιφής Gauss σε παραλληλόγραμμους πίνακες. Τάξη πίνακα

Μιχάλης Ταρουδάκης

Θεώρημα

- Έστω ένα σύστημα *n* εξισώσεων με *n* αγνώστους $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$
- Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα
  - Εάν ο πίνακας *A* είναι ιδιόμορφος, καμία αναδιάταξη γραμμών δεν μπορεί να παράγει πλήρες σύνολο οδηγών.
  - Εάν ο πίνακας *A* δεν είναι ιδιόμορφος, τότε υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης που κατά τη διαδικασία απαλοιφής δεν εμφανίζει 0 στις θέσεις των οδηγών. Τότε
    - Το σύστημα έχει μοναδική λύση.
    - Ο πίνακας *PA* παραγοντοποιείται ως $PA=LDU'$ με τους πίνακες *L, D, U'* να έχουν τις ιδιότητες που είδαμε.

Παράδειγμα

$$A=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$$

Μη Ιδιόμορφος

$$P_{13}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad P_{23}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$PA=\begin{bmatrix}d & e & f\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix} \quad PA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & e & f\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=LDU'$$

Παράδειγμα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Ιδιόμορφος

Δεν έχει πλήρες σύνολο οδηγών

$$P_{13}B = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Έπίλυση γραμμικού συστήματος και αντίστροφος πίνακας

Έστω γραμμικό σύστημα

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

με πίνακα A τετραγωνικό μη ιδιόμορφο.

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Η λύση του συστήματος μπορεί να προσδιοριστεί ως :

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Υπολογισμός του αντίστροφου ενός Πίνακα με τη διαδικασία Gauss-Jordan

$$AA^{-1} = I$$

$\mathbf{x}_i$ στήλη i αντιστρόφου $$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i\,,\ i = 1,\ldots,n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πρέπει να λύσουμε τρία συστήματα

Και στα τρία, ο πίνακας A είναι ο ίδιος

Υπολογισμός του αντίστροφου ενός Πίνακα με τη διαδικασία Gauss–Jordan

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός του αντίστροφου ενός Πίνακα με τη διαδικασία Gauss–Jordan

$$[A \quad \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ακολουθούμε τη διαδικασία Gauss που είδαμε στη λύση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & L^{-1} \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός του αντίστροφου ενός Πίνακα με τη διαδικασία Gauss-Jordan

$$L^{-1} = GFEI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = GFEA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = E^{-1}F^{-1}G^{-1}I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός του αντίστροφου ενός Πίνακα με τη διαδικασία Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} U & L^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε 2 φορές την τρίτη γραμμή στη δεύτερη γραμμή και αφαιρούμε την τρίτη από την πρώτη.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 12/8 & -5/8 & -6/8 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε 1/8 φορές την δεύτερη γραμμή στην πρώτη.

Υπολογισμός του αντίστροφου ενός Πίνακα με τη διαδικασία Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 12/8 & -5/8 & -6/8 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Διαιρούμε με τους οδηγούς

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 12/16 & -5/16 & -6/16 \\ 0 & 1 & 0 & 4/8 & -3/8 & -2/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός του αντίστροφου ενός Πίνακα με τη διαδικασία Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλ. με $F_1 F_2 F_3 \ldots F_k$ $\quad F_1 F_2 F_3 \ldots F_k A = I$

$$F_1 F_2 F_3 \ldots F_k I = B$$

$$F_1 F_2 F_3 \ldots F_k = A^{-1} = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 12/16 & -5/16 & -6/16 \\ 0 & 1 & 0 & 4/8 & -3/8 & -2/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B \end{bmatrix}$$

Αντίστροφοι πίνακες (συν.)

Λήμμα 1. Εάν B και C είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν BAC αντιστρέψιμος

Λήμμα 2. Ένας πίνακας με μία μηδενική στήλη, δεν είναι αντιστρέψιμος.

Λήμμα 3. Εάν ο άνω τριγωνικός πίνακας U έχει ένα στοιχείο στη διαγώνιο 0, δεν είναι αντιστρέψιμος.

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Διαδικασία απαλοιφής όπως και στις περιπτώσεις πινάκων nxn

Αφαιρούμε 2 φορές την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη και προσθέτουμε την πρώτη στην τρίτη

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Αφαιρούμε 2 φορές τη γραμμή 2 από την 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας άνω τριγωνικής μορφής

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \boxed{*} & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οδηγοί

Πίνακας κλιμακωτής μορφής

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπάρχει κάτω τριγωνικός πίνακας τέτοιος ώστε $A=LU$;

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad L: mxm$$

Σε κάθε πίνακα *mxn* Α, αντιστοιχεί ένας πίνακας *P* και ένας *L* κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο καθώς και ένας *mxn* κλιμακωτός πίνακας τέτοιος ώστε $PA=LU$

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

$$U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ομογενές σύστημα

Βασικές μεταβλητές αυτές που αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς. *u* και *w* στην περίπτωσή μας. Οι υπόλοιπες είναι οι ελεύθερες μεταβλητές.

Η λύση του ομογενούς συστήματος προκύπτει με απόδοση αυθαίρετων τιμών στις ελεύθερες μεταβλητές.

Η μηδενική λύση (τετριμμένη) ασφαλώς αποτελεί λύση του ομογενούς συστήματος.

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

$$U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3w + y = 0 \rightarrow w = -\left(1/3\right) y$$

$$u + 3v + 3w + 2y = 0 \rightarrow u = 3v - y$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3v - y \\ v \\ -\dfrac{1}{3} y \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\dfrac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Διπλή απειρία λύσεων

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3v - y \\ v \\ -\frac{1}{3}y \\ y \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επιλέγοντας την τιμή 1 σε μία ελεύθερη μεταβλητή και 0 στις υπόλοιπες παίρνομε μία λύση του ομογενούς

Η γενική λύση είναι ο συνδυασμός όλων των ως άνω λύσεων

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

Εάν είχαμε ένα *nxn* σύστημα με τον πίνακα Α να μην είναι ιδιόμορφος υπάρχει δυνατότητα ελεύθερων μεταβλητών ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : Όχι αφού έχομε ένα πλήρες σύνολο οδηγών.

Η μοναδική λύση ενός ομογενούς συστήματος με τον πίνακα *A* να είναι μη ιδιόμορφος είναι η τετριμμένη.

Εάν $n>m$ θα υπάρχει οπωσδήποτε και μία μη τετριμμένη λύση σε ένα ομογενές σύστημα .

Στην πραγματικότητα έχομε άπειρες λύσεις.

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

Μη ομογενές σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε λύση στο σύστημα όταν και μόνον όταν $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$

Τότε, το σύστημα είναι συνεπές (consistent)

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

Μη ομογενές σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι συνεπές (consistent)

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

$$U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3w + y = 3 \rightarrow w = 1 - \frac{1}{3} y$$

$$u + 3v + 3w + 2y = 1 \rightarrow u = -2 - 3v - y$$

Διπλή απειρία λύσεων

Λύση συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους

$$3w + y = 3 \rightarrow w = 1 - \frac{1}{3}y$$

$$u + 3v + 3w + 2y = 1 \rightarrow u = -2 - 3v - y$$

$$\mathbf{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Ειδική λύση}} + \underbrace{v\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Λύση ομογενούς}}$$

$$\mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} -3v - y \\ v \\ -\frac{1}{3}y \\ y \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ειδική λύση

Λύση ομογενούς

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

Διαδικασία επίλυσης :

Ανάγουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ στο $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$

Μηδενίζουμε τις ελεύθερες μεταβλητές και βρίσκουμε μια ειδική λύση

Στο ομογενές σύστημα βάζουμε διαδοχικά στις ελεύθερες μεταβλητές την τιμή 1 και στις υπόλοιπες 0 και βρίσκομε τη λύση του ομογενούς συστήματος.

Η γενική λύση είναι το άθροισμα της ειδικής λύσης και της λύσης του ομογενούς.

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

Έστω ότι υπάρχουν r οδηγοί.

Τότε οι μηδενικές γραμμές του πίνακα U θα είναι $m-r$

Το σύστημα θα έχει λύση όταν οι τελευταίες $m-r$ συνιστώσες του διανύσματος **c** θα είναι 0.

Εάν $r=m$ τότε υπάρχει πάντοτε λύση.

Η λύση της ομογενούς αποτελείται από το γραμμικό συνδυασμό $n-r$ διανυσμάτων (όσες και οι ελεύθερες μεταβλητές).

Εάν $r=n$ δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές και η λύση του ομογενούς συστήματος είναι μόνο η τετριμμένη.

Τάξη πίνακος

Ο αριθμός *r* λέγεται **τάξη** (rank) του πίνακα *A*