ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
2022-2023

Διάλεξη 6

Διανυσματικοί Χώροι – Εισαγωγή

Μιχάλης Ταρουδάκης

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

Διαδικασία επίλυσης :

Ανάγουμε το σύστημα $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ στο $U\mathbf{x}=\mathbf{c}$

Μηδενίζουμε τις ελεύθερες μεταβλητές και βρίσκουμε μια ειδική λύση.

Στο ομογενές σύστημα βάζουμε διαδοχικά στις ελεύθερες μεταβλητές την τιμή 1 και στις υπόλοιπες 0 και βρίσκομε τη λύση του ομογενούς συστήματος.

Η γενική λύση είναι το άθροισμα της ειδικής λύσης και της λύσης του ομογενούς.

Λύση συστήματος *m* εξισώσεων με *n* αγνώστους

Έστω ότι υπάρχουν r οδηγοί.

Τότε οι μηδενικές γραμμές του πίνακα U θα είναι $m-r$.

Το σύστημα θα έχει λύση όταν οι τελευταίες $m-r$ συνιστώσες του διανύσματος **c** θα είναι 0.

Εάν $r=m$ τότε υπάρχει πάντοτε λύση.

Η λύση της ομογενούς αποτελείται από το γραμμικό συνδυασμό $n-r$ διανυσμάτων (όσες και οι ελεύθερες μεταβλητές).

Εάν $r=n$ δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές και η λύση του ομογενούς συστήματος είναι μόνο η τετριμμένη.

Τάξη πίνακος

Ο αριθμός r λέγεται **τάξη** (rank) του πίνακα A

Ορισμός

- Ένα σύνολο $V \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ εάν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες
  - $V \neq \varnothing$
  - Το σύνολο είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση :

$$\mathbf{v},\mathbf{w} \in V \rightarrow \mathbf{v}+\mathbf{w} \in V$$

  - Το σύνολο είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό.

$$\mathbf{v} \in V, c \in \mathbb{R} \rightarrow c\mathbf{v} \in V$$

Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα

- Το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\left\{ \left(0, \ldots., 0\right) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

- Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

Παραδείγματα διανυσματικών υπόχωρων από τη Γεωμετρία

- Κάθε γραμμή που περνά από την αρχή του $\mathbb{R}^n$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$l = \{t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$$

$$\delta = \{(x, y) - 3x + 2y = 0\}$$

- Κάθε επίπεδο που περνά από την αρχή του $\mathbb{R}^n$.

$$\Pi = \{(u, v, w)\, 2u + v + w = 0\}$$

Παραδείγματα από τη Γεωμετρία συνόλων που δεν αποτελούν υπόχωρο

Ευθεία $\varepsilon = \left\{ \left(x, y \right) - 3x + 2y = 6 \right| \right\}$

Επίπεδο $\Pi = \left\{ \left(u, v, w \right) 2u + v + w = 5 \right\}$

Διανυσματικοί χώροι και συστήματα εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Εάν υπάρχει λύση (u_0 ,v_0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Γραμμικός συνδυασμός στηλών

Διανυσματικοί χώροι και συστήματα εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Σύνολο γραμμικού συνδυασμού στηλών :

$$V = \left\{ \lambda_1 \left(1,5,2\right) + \lambda_2 \left(0,4,4\right) \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$;

Διανυσματικοί χώροι και συστήματα εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Το σύνολο δεν είναι κενό.

Είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό.

Η ανωτέρω παρατήρηση μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό :

Διανυσματικοί χώροι και συστήματα εξισώσεων

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών ενός πίνακα *A* διάστασης mxn είναι διανυσματικός χώρος του $\mathbb{R}^m$

Ονομάζεται : **Χώρος στηλών του *A*** : $\Re(A)$

Ένα διάνυσμα **b** ανήκει στο χώρο των στηλών του *A* εάν προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό των στηλών, που σημαίνει ότι το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση.

Μικρότερος δυνατός χώρος στηλών : Ο χώρος στηλών του $A=0$

Ο χώρος στηλών του ταυτοτικού πίνακα I_m είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}^m$

Διανυσματικοί χώροι και συστήματα εξισώσεων

Ο χώρος στηλών κάθε μη ιδιόμορφου πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{mm}$ είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}^m$

Η λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ υπάρχει $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

Διανυσματικοί χώροι και συστήματα εξισώσεων

$A\mathbf{x} = 0$ Ομογενές σύστημα

x=0 αποτελεί λύση

Εάν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ λύσεις του συστήματος τότε

$$A\left(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\right) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = 0$$

$$A\left(\lambda \mathbf{x}_1\right) = \lambda A\mathbf{x}_1 = 0$$

Το σύνολο των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $A\mathbf{x} = 0$ με $A \in \mathrm{Mat}_{mn}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ο υπόχωρος αυτός ονομάζεται **Μηδενόχωρος του *A*** $N \quad A$

Διανυσματικοί χώροι και συστήματα εξισώσεων

$$A\mathbf{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{r}(A) = 2 = n$$

Η μόνη λύση είναι $\left(u, v\right) = \left(0, 0\right), \quad N\left(A\right) = \left\{0 \in \mathbb{R}^2\right\}$

Διανυσματικοί χώροι και συστήματα εξισώσεων

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

$$\lambda\mathbf{b}_1 + \lambda\mathbf{b}_2 - \lambda\mathbf{b}_3 = 0$$

Παρατηρούμε ότι λύση του συστήματος $B\mathbf{x} = 0$ είναι κάθε πολλαπλάσιο του $\mathbf{x} = (1,1,-1)$

Διανυσματικοί χώροι και συστήματα εξισώσεων

$$B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$r=2$ ελεύθερη μεταβλητή η w. Θέτομε $w=1$

$$4v + 4w = 0 \Rightarrow v = -1$$
$$u + w = 0 \Rightarrow u = -1$$

$$N(B) = \left\{ \lambda(-1,-1,1) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Είδαμε ότι $\mathbf{x} = (1,1,-1)$

Γραμμική ανεξαρτησία

$$3x + 5y + 2z = 0$$
$$2x + y - z = 0$$
$$x + 4y + 3z = 0$$

Σύνολο λύσεων : $U = \left\{ (t, -t, t) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

Θεωρώντας μόνο τις δύο πρώτες εξισώσεις η λύση παραμένει η ίδια !

Η τρίτη εξίσωση είναι η διαφορά της πρώτης από τη δεύτερη. Επομένως δεν προσφέρει κάτι καινούργιο.

Γραμμική ανεξαρτησία

$$3x + 5y + 2z = 0$$
$$2x + y - z = 0$$
$$x + 4y + 3z = 0$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Παρατηρούμε ότι $A_3 = A_2 - A_1$

Η τρίτη γραμμή είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων

Γραμμική ανεξαρτησία

Ορισμός : Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, εάν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές $c_1, c_2, \ldots. c_n$ οι οποίοι δεν είναι όλοι 0 τέτοιος ώστε $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots c_n\mathbf{v}_n = 0$

Εάν $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ είναι οι στήλες ενός πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ το σύστημα $A\mathbf{c} = 0$ έχει λύση διάφορη της μηδενικής

Γραμμική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα. Με άλλα λόγια η $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots c_n\mathbf{v}_n = 0$ ικανοποιείται μόνο με όλα τα $c_1, c_2, \ldots. c_n$ να είναι 0.

Το ομογενές σύστημα $A\mathbf{c} = 0$ έχει λύση μόνο τη μηδενική.

Γραμμική ανεξαρτησία

Παραδείγματα

Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1=\left(1,2,-1\right),\mathbf{u}_2=\left(3,6,-3\right),\mathbf{u}_3=\left(3,9,3\right)$
είναι γραμμικά εξαρτημένα $\mathbf{u}_2=3\mathbf{u}_1$

Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1=\left(1,2,-1\right),\mathbf{u}_2=\left(3,4,-3\right),\mathbf{u}_3=\left(1,4,-1\right)$
είναι γραμμικά εξαρτημένα $4\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3=0$

Γραμμική ανεξαρτησία

Έλεγχος

Σχηματίζομε τον πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ με στήλες τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ Προσπαθούμε να βρούμε λύση του συστήματος

$$A\mathbf{c} = 0$$

Εάν υπάρχει λύση διάφορη της μηδενικής, τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Διαφορετικά τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.