ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
2022-2023

Διάλεξη 7

Γραμμική Ανεξαρτησία-Γραμμική Εξάρτηση Διανυσμάτων,

Μιχάλης Ταρουδάκης

Γραμμική ανεξαρτησία

Ορισμός : Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, εάν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές $c_1, c_2, \ldots. c_n$ οι οποίοι δεν είναι όλοι 0 τέτοιος ώστε $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots c_n\mathbf{v}_n = 0$

Εάν $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ είναι οι στήλες ενός πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{mxn}(\mathbb{R})$ το σύστημα $A\mathbf{c} = 0$ έχει λύση διάφορη της μηδενικής

Γραμμική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα. Με άλλα λόγια η $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots c_n\mathbf{v}_n = 0$
ικανοποιείται μόνο με όλα τα $c_1, c_2, \ldots. c_n$ να είναι 0.

Το ομογενές σύστημα $A\mathbf{c} = 0$ έχει λύση μόνο τη μηδενική.

Γραμμική ανεξαρτησία

Παραδείγματα

Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = (1,2,-1), \mathbf{u}_2 = (3,6,-3), \mathbf{u}_3 = (3,9,3)$
είναι γραμμικά εξαρτημένα $\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{u}_1$

Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = (1,2,-1), \mathbf{u}_2 = (3,4,-3), \mathbf{u}_3 = (1,4,-1)$
είναι γραμμικά εξαρτημένα $4\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = 0$

Γραμμική ανεξαρτησία

Έλεγχος

Σχηματίζομε τον πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{mxn}\left(\mathbb{R}\right)$ με στήλες τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ Προσπαθούμε να βρούμε λύση του συστήματος

$$A\mathbf{c} = 0$$

Εάν υπάρχει λύση διάφορη της μηδενικής, τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Διαφορετικά τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Γραμμική ανεξαρτησία

Παράδειγμα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άνω τριγωνικός πίνακας με πλήρες σύνολο οδηγών

Λύση του ομογενούς μόνο η μηδενική

Γραμμικά ανεξάρτητα

Γραμμική ανεξαρτησία

Παράδειγμα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Τάξη του πίνακα r(A)=3, n=4

Στο σύστημα $A\mathbf{c} = 0$ υπάρχει μία ελεύθερη μεταβλητή (c_4)

Υπάρχει λύση διάφορη της μηδενικής

Επομένως είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Γραμμική ανεξαρτησία

Πρόταση

Σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, οι μη μηδενικές γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει και για τις στήλες που περιέχουν οδηγούς.

Γραμμική ανεξαρτησία

Απόδειξη

Στήλες με οδηγούς

$$U = \begin{array}{c} \begin{matrix} j_1 & j_2 & & j_3 & & & & j_r \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Γραμμική ανεξαρτησία

Απόδειξη

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} j_1 & j_2 & & j_3 & & & & j_r \end{array} \\ \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c = \left(c_1, c_2, \ldots\ldots c_r\right) \quad U^T c = c^T U = 0$$

Γραμμική ανεξαρτησία

Απόδειξη

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} j_1 & j_2 & & j_3 & & & & j_r \end{matrix} \\ U = & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$a_{1j_1} \neq 0$ Υπόλοιπα στοιχεία στήλης $j_1 = 0$ $\quad c_1 a_{1j_1} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Υποθέτουμε $\quad c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0, \quad k < r$

$a_{k+1\,j_{k+1}} \neq 0$ p>k+1 $\quad a_{pj_{k+1}} = 0 \quad c_{\kappa+1} a_{\kappa+1\,j_{\kappa+1}} = 0 \Rightarrow c_{\kappa+1} = 0$

Γραμμική ανεξαρτησία

Απόδειξη

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} j_1 & j_2 & & j_3 & & & & j_r \end{array} \\
U = & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$U\mathbf{x} = 0$$

Ελεύθερες μεταβλητές 0   Ανάδρομη αντικατάσταση 0

Γραμμική ανεξαρτησία

Πόρισμα

Εάν n>m, ένα σύνολο n διανυσμάτων στον χώρο $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Αιτιολόγηση :

Ο πίνακας $\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}_{mxn}(\mathbb{R})$ με στήλες τα ως άνω διανύσματα, έχει το πολύ $r=m$ οδηγούς. Επομένως θα υπάρχουν $n-r$ ελεύθερες μεταβλητές και το σύστημα $A\mathbf{c}=0$ θα έχει πάντα λύση