ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
2022-2023

Διάλεξη 8

Παραγωγή Υπόχωρου, Βάση, Διάσταση

Μιχάλης Ταρουδάκης

Ορισμός Διανυσματικού Υπόχωρου

- Ένα σύνολο $V \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ εάν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες
  - $V \neq \varnothing$
  - Το σύνολο είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση :

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$$

  - Το σύνολο είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό.

$$\mathbf{v} \in V, c \in \mathbb{R} \rightarrow c\mathbf{v} \in V$$

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Ορισμός : Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, εάν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές $c_1, c_2, \ldots. c_n$ οι οποίοι δεν είναι όλοι 0 τέτοιος ώστε $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots c_n\mathbf{v}_n = 0$

Εάν $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ είναι οι στήλες ενός πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{mxn}(\mathbb{R})$ το σύστημα $A\mathbf{c} = 0$ έχει λύση διάφορη της μηδενικής

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα. Με άλλα λόγια η $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots c_n\mathbf{v}_n = 0$ ικανοποιείται μόνο με όλα τα $c_1, c_2, \ldots. c_n$ να είναι 0.

Το ομογενές σύστημα $A\mathbf{c} = 0$ έχει λύση μόνο τη μηδενική.

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Πρόταση

Σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, οι μη μηδενικές γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει και για τις στήλες που περιέχουν οδηγούς.

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Πόρισμα

Εάν $n > m$, ένα σύνολο n διανυσμάτων στον χώρο $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Αιτιολόγηση :

Ο πίνακας $\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}_{mxn}(\mathbb{R})$ με στήλες τα ως άνω διανύσματα, έχει το πολύ $r = m$ οδηγούς. Επομένως θα υπάρχουν $n - r$ ελεύθερες μεταβλητές και το σύστημα $A\mathbf{c} = 0$ θα έχει πάντα λύση

Παραγωγή διανυσματικού υπόχωρου

- Εάν $\mathbf{w}_1,.....\mathbf{w}_k$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, κάθε γραμμικός συνδυασμός τους παράγει διανύσματα, το σύνολο των οποίων είναι ο χώρος των διανυσμάτων.

- Ο χώρος των διανυσμάτων αυτών είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

Παραγωγή διανυσματικού υπόχωρου

Θεωρούμε γραμμικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^n$. Τα διανύσματα $\mathbf{w}_1,\ldots..\mathbf{w}_k$ του $\mathbb{R}^n$ παράγουν τον υπόχωρο $V \subseteq \mathbb{R}^n$ εάν

$$\mathbf{w}_j \in V, \quad \text{για κάθε } j = 1,\ldots.k$$

Κάθε διάνυσμα του V εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{w}_1,\ldots..\mathbf{w}_k$, με άλλα λόγια εάν για κάθε $\mathbf{v} \in V$ υπάρχουν αριθμοί $c_1,\ldots..c_k$ τέτοιοι ώστε

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \ldots.. + c_k\mathbf{w}_k$$

Το κενό σύνολο $\varnothing$ παράγει το μηδενικό υπόχωρο $\{0 \in \mathbb{R}^n\}$

Παραγωγή διανυσματικού υπόχωρου

- Τα διανύσματα (1,0),(1,1) και (−1,0), παράγουν τον $\mathbb{R}^2$;

NAI

- Τα διανύσματα (1,0) και (−1,0) παράγουν τον $\mathbb{R}^2$;

OXI

- Τα διανύσματα (1,0,1),(0,1,0) και (0,2,1), παράγουν τον $\mathbb{R}^3$;

NAI

- Τα διανύσματα (1,0,1),(0,1,0) ,(0,2,1), (1,1,2) παράγουν τον $\mathbb{R}^3$;

NAI

- Τα διανύσματα (1,0,1),(0,1,0) ,(1,1,1) παράγουν τον $\mathbb{R}^3$;

OXI

Βάση διανυσματικού χώρου

- Βάση ενός διανυσματικού χώρου $V \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων το οποίο
  - Παράγει τον υπόχωρο V
  - Είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Βάση διανυσματικού χώρου

- ΛΗΜΜΑ

Εάν $\mathbf{w}_1,.....\mathbf{w}_k$ είναι βάση του γραμμικού υπόχωρου *V*, τότε κάθε στοιχείο του *V* εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{w}_1,.....\mathbf{w}_k$

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + ...c_k\mathbf{w}_k$$

Εάν $\mathbf{u}_1,.....\mathbf{u}_k$ μια άλλη βάση του V

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{u}_1 + d_2\mathbf{u}_2 + ...d_k\mathbf{u}_k$$

Βάση διανυσματικού χώρου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΒΑΣΕΩΝ

Κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι η $\mathbf{e}_1, \ldots\ldots \mathbf{e}_n$ αλλά δεν είναι η μοναδική. Οι στήλες κάθε nxn αντιστρέψιμου πίνακα, αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^n$.

Οι στήλες που περιέχουν οδηγούς σε ένα κλιμακωτό πίνακα αποτελούν μια βάση του χώρου των στηλών του πίνακα.

Βάση διανυσματικού χώρου

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$m=3$, $n=4$, $r=2$

Στήλες με οδηγούς : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ Γραμμικά ανεξάρτητες ;

Έλεγχος $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$ $\quad c_1 = c_2 = 0$

Βάση διανυσματικού χώρου

- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$m=3$, $n=4$, $r=2$

Οι υπόλοιπες στήλες παράγονται από τις δυο άλλες

$$\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_4 = \frac{1}{3}\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_1$$

Διάσταση διανυσματικού χώρου

Εάν ένας γραμμικός υπόχωρος U του $\mathbb{R}^n$ έχει μια βάση με k στοιχεία, τότε κάθε άλλη βάση του U έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο αριθμός των στοιχείων της βάσης ενός γραμμικού υπόχωρου V ονομάζεται διάσταση του V και συμβολίζεται με $\dim\{V\}$

$\dim\{0\}=0$