ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022-2023

Διάλεξη 9

Θεμελιώδεις υπόχωροι

Μιχάλης Ταρουδάκης

Βάση διανυσματικού χώρου

- Βάση ενός διανυσματικού χώρου $V \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων το οποίο
  - Παράγει τον υπόχωρο V
  - Είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Βάση διανυσματικού χώρου

- **ΛΗΜΜΑ**

Εάν $w_1, \ldots\ldots w_k$ είναι βάση του γραμμικού υπόχωρου V, τότε κάθε στοιχείο του V εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \ldots\ldots w_k$

$$v = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots\ldots c_k w_k$$

Εάν $u_1, \ldots\ldots u_k$ μια άλλη βάση του V

$$v = d_1 u_1 + d_2 u_2 + \ldots\ldots d_k u_k$$

Διάσταση διανυσματικού χώρου

Εάν ένας γραμμικός υπόχωρος U του $\mathbb{R}^n$ έχει μια βάση με k στοιχεία, τότε κάθε άλλη βάση του U έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο αριθμός των στοιχείων της βάσης ενός γραμμικού υπόχωρου V ονομάζεται διάσταση του V και συμβολίζεται με dim V

$\dim\{0\}=0$

Διάσταση διανυσματικού χώρου

Σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης k, κάθε σύνολο με περισσότερα από k διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένο και κάθε σύνολο με λιγότερα από k διανύσματα δεν μπορεί να παράγει το χώρο.

Κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του V μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση, επισυνάπτοντας εν ανάγκη περισσότερα διανύσματα

Κάθε σύνολο που παράγει τον V ανάγεται σε μία βάση αγνοώντας εν ανάγκη ορισμένα διανύσματα.

Μερικές παρατηρήσεις

Εάν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots.. \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνο αν το διάνυσμα **v** δεν παράγεται από τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots. \mathbf{v}_k$

Κάθε μη μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ έχει μία βάση.

Θεμελιώδεις υπόχωροι

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ $\qquad A^T \in \mathrm{Mat}_{nm}(\mathbb{R})$

$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ldots \mathbf{a}_n)$ Είναι οι στήλες του πίνακα *A*

Ο χώρος των στηλών $R(A) \quad \subseteq \mathbb{R}^m$

$$R(A) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ldots \mathbf{a}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$$

Θεμελιώδεις υπόχωροι

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ $A^T \in \mathrm{Mat}_{nm}(\mathbb{R})$

Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\mathbf{x}=0$ $N(A)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : A\mathbf{x}=0\right\}$

Θεμελιώδεις υπόχωροι

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ $\quad A^T \in \mathrm{Mat}_{nm}(\mathbb{R})$

$(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\ldots \mathbf{A}_m)$ Είναι οι γραμμές του πίνακα

Ο χώρος των γραμμών $R\left(A^{\mathrm{T}}\right) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$R(A^T) = \mathrm{Span}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\ldots \mathbf{A}_m) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Θεμελιώδεις υπόχωροι

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ $\quad A^T \in \mathrm{Mat}_{nm}(\mathbb{R})$

Ο αριστερός μηδενόχωρος είναι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A^T\mathbf{x}=0$

$$N(A^{\mathrm{T}}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x}^T A = \mathbf{0}^T \right\}$$

Θεμελιώδεις υπόχωροι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Χώρος στηλών : διανύσματα $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = 0$

Ευθεία που περνά από το $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Χώρος γραμμών *A*= Χώρος στηλών του *A*^{T} : διανύσματα $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ευθεία που περνά από το $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Θεμελιώδεις υπόχωροι

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **Μηδενόχωρος του *A*** : περιέχει τα $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Επίπεδο

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **Αριστερός μηδενόχωρος του *A* περιέχει το** $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ευθεία

Χώρος των γραμμών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r = 2$$

Ο χώρος των γραμμών του U έχει διάσταση 2

Ο χώρος των γραμμών του A έχει επίσης διάσταση 2

Χώρος των γραμμών

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9 & 5\\ -1 & -3 & 3 & 0\end{bmatrix} \Longrightarrow U=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ο χώρος των γραμμών του A έχει την ίδια διάσταση r με τον χώρο των γραμμών του U.

Οι δύο χώροι ταυτίζονται.

Χώρος των γραμμών

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Κάθε γραμμή του U προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A.

Επομένως κάθε γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του U μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A.

Συνεπώς ο χώρος των γραμμών του U εμπεριέχεται στο χώρο των γραμμών του A.

$$R\left(U^T\right) \subseteq R\left(A^T\right)$$

Χώρος των γραμμών

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Η διαδικασία απαλοιφής είναι αντιστρέψιμη :

Κάθε γραμμή του A προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του U.

Επομένως κάθε γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του U.

Συνεπώς ο χώρος των γραμμών του A εμπεριέχεται στο χώρο των γραμμών του U.

$$R\left(A^T\right) \subseteq R\left(U^T\right)$$

Άρα $$\boxed{R\left(A^T\right) = R\left(U^T\right)}$$

Χώρος των γραμμών

$$R\left(A^T\right) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\dim R\left(A^T\right) = r$$

Ως βάση μπορούμε να θεωρήσουμε τις μη μηδενικές γραμμές του αντίστοιχου πίνακα U

Μηδενόχωρος

Ο μηδενόχωρος του *A* είναι ίσος με το μηδενόχωρο του $\underline{U}$.

Τα διανύσματα που υπολογίζονται βάζοντας την τιμή 1 σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή και 0 στις υπόλοιπες.

Επομένως είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αφού κανένα δεν μπορεί να προέλθει από γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων.

Τα διανύσματα αυτά αποτελούν τη βάση του μηδενόχωρου.

Η διάσταση του μηδενόχωρου είναι $k=n-r$

$$\dim N(A) = n - r$$

Μηδενόχωρος

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & x_2 & & x_4 \end{array} \\ U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ελεύθερες μεταβλητές στις στήλες 2 και 4 x_2, x_4

$$x_2 = 1, x_4 = 0, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = 0, x_4 = 1, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Βάση του μηδενόχωρου $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$