



Διακριτά Αντίστροφα Προβλήματα 2021-2022

Διάλεξη 1

Εισαγωγή

Μιχάλης Ταρουδάκης

Αντίστροφα Προβλήματα στις Φυσικές Επιστήμες

Αντίστροφα προβλήματα συναντώνται πρακτικά σε όλες τις εφαρμογές των φυσικών επιστημών.

Επιλύονται χρησιμοποιώντας σύγχρονα μαθηματικά εργαλεία αλλά ακόμη διαίσθηση και εμπειρία!

Τι είναι ένα αντίστροφο πρόβλημα

- ▶ Εκτίμηση παραμέτρων που εμπλέκονται σε ένα μαθηματικό (φυσικό, οικονομικό, ιατρικό, κοινωνικό) πρόβλημα χρησιμοποιώντας μετρήσεις συγκεκριμένων ποσοτήτων που σχετίζονται με το πρόβλημα και τις προς ανάκτηση παραμέτρους

Τι είναι ένα αντίστροφο πρόβλημα

- ▶ Οι μετρήσεις σχετίζονται με τις προς ανάκτηση παραμέτρους μέσω κάποιας σχέσης (γραμμικής ή μη γραμμικής) που προκύπτει από την μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος και τη χρήση ενός κατάλληλου μοντέλου.

Περιεχόμενα

- ▶ 1. Εισαγωγή
 - 1.1 Ευθέα και Αντίστροφα Προβλήματα στις Φυσικές Επιστήμες.
 - 1.2 Κατηγοριοποίηση αντιστρόφων προβλημάτων.
 - 1.3 Αλλά παραδείγματα από τα μαθηματικά τη μηχανική και την ιατρική τεχνολογία.

Περιεχόμενα

- ▶ 2. Στοιχεία θεωρίας πιθανοτήτων.
- ▶ 3. Επίλυση γραμμικών αντιστρόφων προβλημάτων με εναλλακτικές μεθόδους.
 - 3.1 Μέθοδος μηκών.
 - 3.2 Γενικευμένες μέθοδοι.
 - 3.3 Μέθοδοι μέγιστης πιθανοφάνειας.
- ▶ 4. Εφαρμογές σε διανυσματικούς χώρους.

Περιεχόμενα

- ▶ 5. Μη γραμμικά αντίστροφα προβλήματα.
- ▶ 6. Τεχνικές επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης.
 - 6.1 Γενετικοί αλγόριθμοι.
 - 6.2 Νευρωνικά δίκτυα.
- ▶ 7. Εφαρμογές από τις φυσικές επιστήμες.
 - 7.1 Ακουστική Τομογραφία.
 - 7.2 Εντοπισμός επίκεντρου σεισμού.

Βιβλιογραφία

- ▶ **W. Menke**, *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Problems* , Academic Press 1989.
- ▶ **A. Papoulis**, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill , 2001.
- ▶ **A. Tarantola**, *Inverse Problem Theory*, SIAM, 2005.

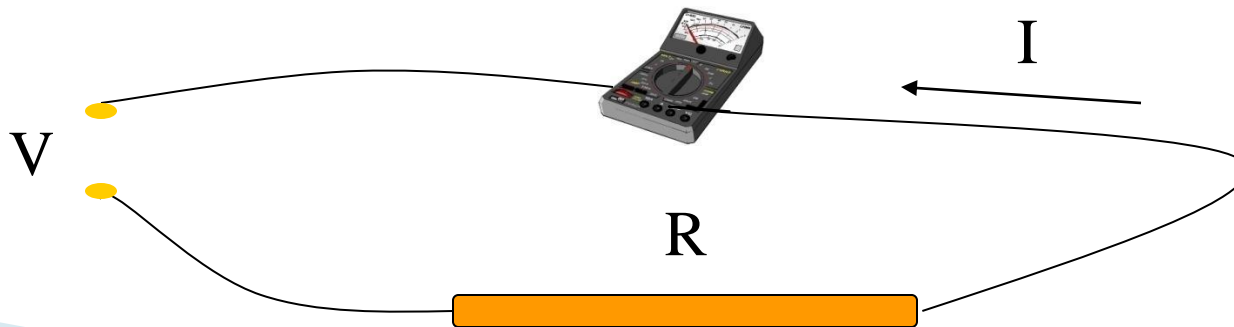
Ιστοσελίδα

- ▶ <http://users.math.uoc.gr/~taroud/Discrete2022.htm>

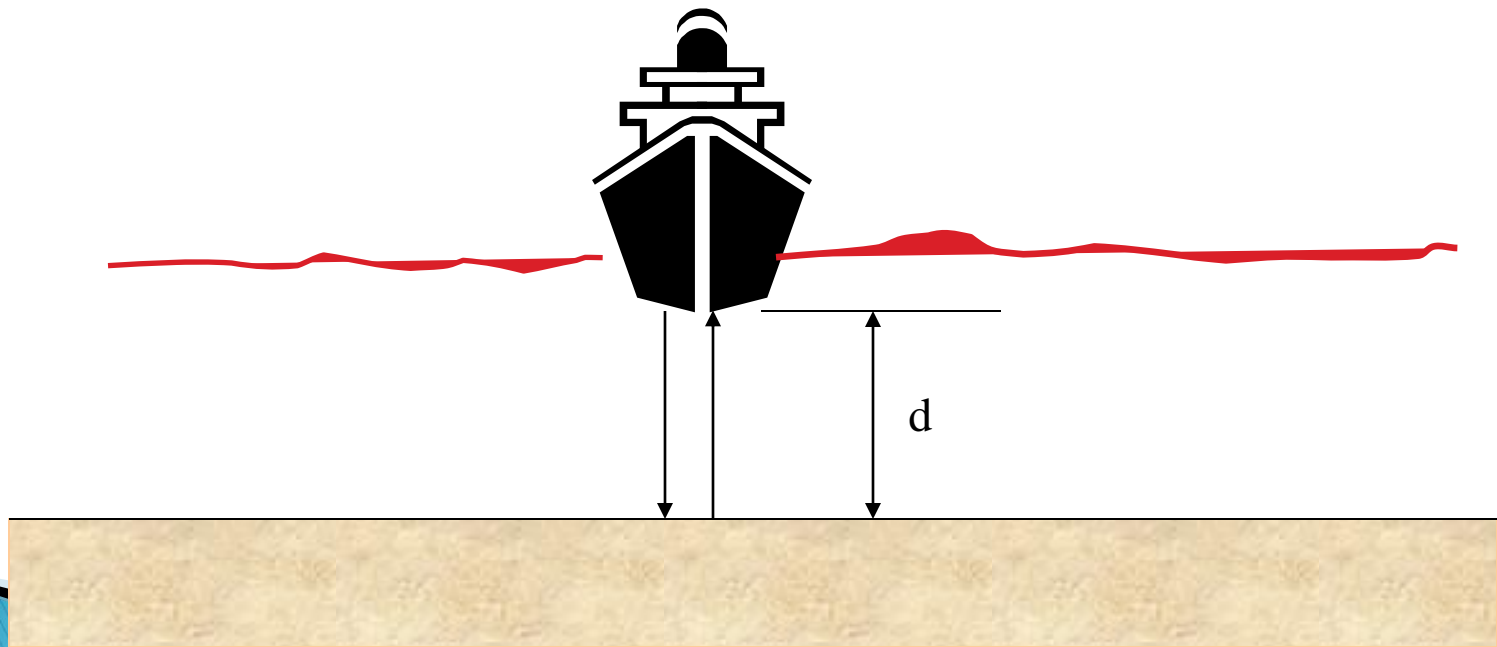
Μερικά απλά παραδείγματα

Υπολογισμός της αντίστασης ενός κυκλώματος :

Το κύκλωμα τίθεται υπό την επιρροή κάποιας γνωστής τάσης και μετράμε το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό. Γνωρίζουμε τη σχέση που συνδέει τάση V , ρεύμα I και αντίσταση R που είναι $V=IR$. Η αντίσταση υπολογίζεται από την απλή σχέση $R=V/I$



Το βάθος της θάλασσας κάτω από τον πυθμένα του πλοίου υπολογίζεται με χρήση ακουστικών παλμών οι οποίοι ανακλώμενοι στον πυθμένα της θάλασσας επιστρέφουν στο σημείο εκπομπής. Μετράται ο χρόνος t που έχει διαρρέψει από την εκπομπή μέχρι την λήψη του παλμού. Γνωρίζοντας την ταχύτητα του ήχου c , εκτιμάμε το βάθος d από την απλή σχέση που διέπει την μέση ταχύτητα του ήχου $c = 2d/t$.
Συνεπώς $d=ct/2$



- ▶ *Ξαφνικά ακούμε πίσω μας μια φωνή*
- ▶ *Προσπαθούμε να καταλάβουμε ποιός μας καλεί*
- ▶ *Η αναγνώριση της πηγής ήχου ισοδυναμεί με την επίλυση ενός αντίστροφου προβλήματος !*



Oh ! Είναι η Μαίρη !

Παίρνουμε δεδομένα από τις ιατρικές εξετάσεις ενός ασθενή. Αναλύοντας τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας γνωστά εμπειρικά ή αναλυτικά μοντέλα, την εμπειρία και την διαίσθηση μας προσπαθούμε να εντοπίσουμε μια πιθανή ασθένεια. Λύνουμε και πάλι αντίστροφο πρόβλημα !



Μερικές εφαρμογές

Mathematics	(Curve reconstruction from points)
Seismology	(Estimation of the strength and epicenter of an earthquake)
Geophysics	(Identification of the parameters of the subsurface layers)
Oceanography	(Monitoring changes in the ocean)
Medicine	(Technology in the diagnosis)
Materials strength	(Non destructive test of material)
Biology	(Recognition of the molecular structure)
Archaeology	(Estimation of the age of a finding)

Μερικές ακόμα παρατηρήσεις

- *Η λύση ενός αντίστροφου προβλήματος μπορεί να είναι μία ή περισσότερες μαθηματικές συναρτήσεις, μια ομάδα από διακριτούς αριθμούς που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες φυσικές ή μαθηματικές παραμέτρους ή ακόμη μία ... έννοια .*
- *Στην περίπτωση αναζήτησης διακριτών παραμέτρων :*
 - *Οι παράμετροι μπορεί να είναι περισσότερες από μία.*
 - *Οι παράμετροι εκτιμώνται άμεσα ή έμμεσα*

Μερικές ακόμα παρατηρήσεις

Οι παράμετροι που εκτιμώνται μέσα από ένα χώρο \mathcal{X} μπορεί να είναι συνεχείς (π.χ. $f(\vec{x}), \vec{x} \in \mathcal{X}$)

διακριτές (π.χ. $f_i, i = 1, \dots, N$)

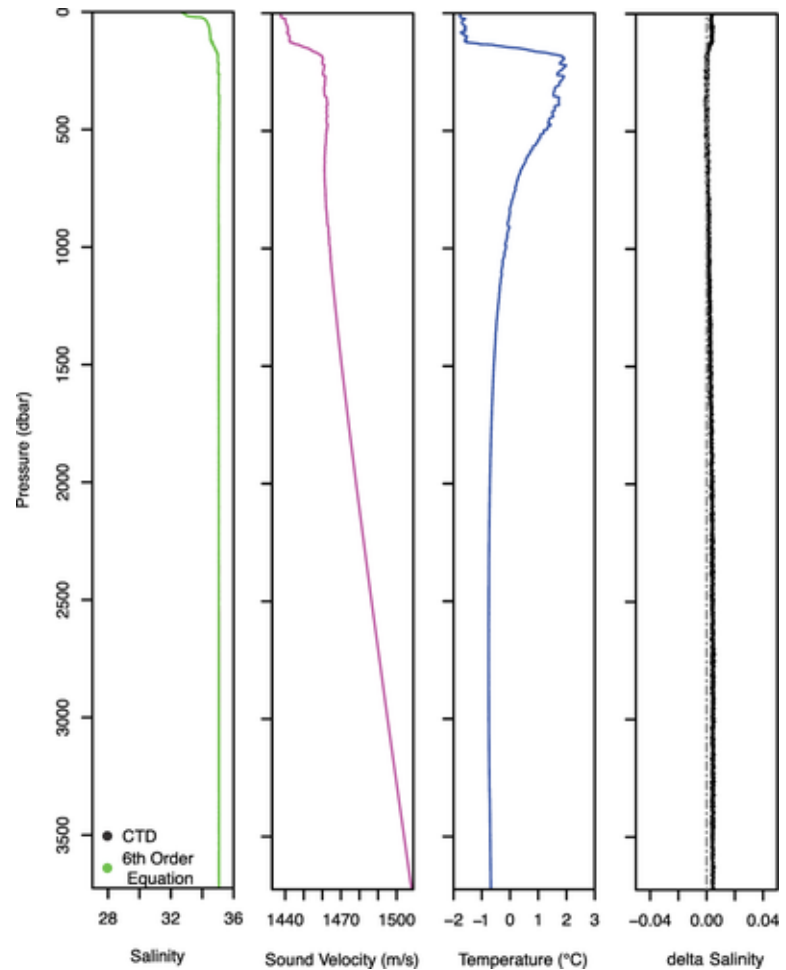
Μερικές ακόμα παρατηρήσεις

Οι παράμετροι που ανακτώνται μέσω μιας διαδικασίας αντιστροφής των μετρήσεων μπορεί να είναι σε μερικές περιπτώσεις ενδιάμεσα αποτελέσματα μέσω των οποίων οδηγούμαστε στις παραμέτρους του φυσικού προβλήματος ακολουθώντας μια πρόσθετη διαδικασία επεξεργασίας αποτελεσμάτων (post-processing procedure).

Παράδειγμα 1

- ▶ Ακουστικός χαρακτηρισμός ενός θαλάσσιου περιβάλλοντος. Εκτιμάται άμεσα η ταχύτητα διάδοσης του ήχου $c(\vec{x})$
- ▶ Η φυσική παράμετρος που ενδιαφέρει τους ωκεανογράφους είναι η θερμοκρασία του νερού.
- ▶ Η ταχύτητα του ήχου στο νερό και η θερμοκρασία συνδέονται με σχέση της μορφής
$$c(\vec{x}) = f(t(\vec{x}), z, S(\vec{x}))$$
- ▶ Συνεπώς η θερμοκρασία υπολογίζεται έμμεσα.

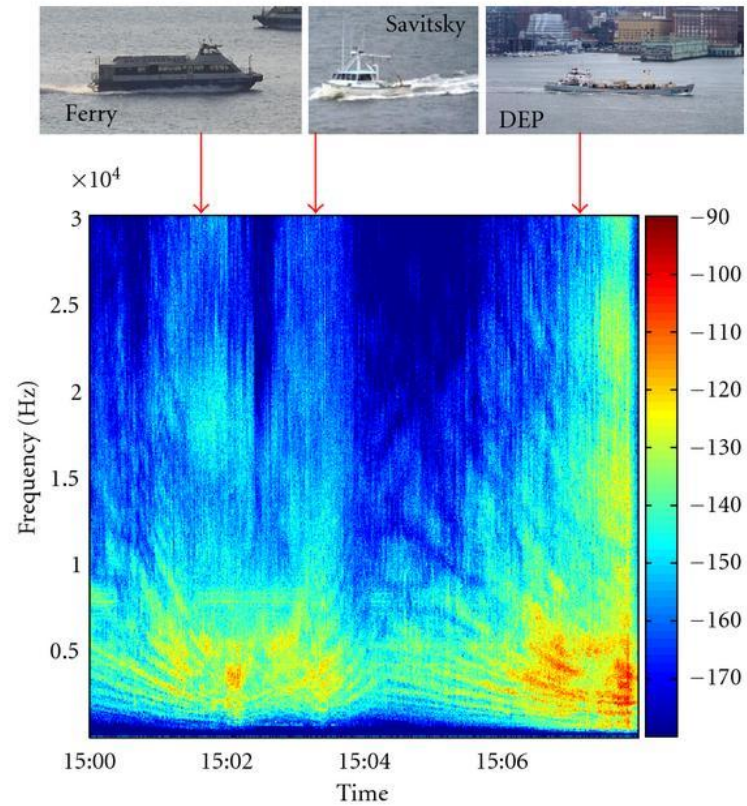
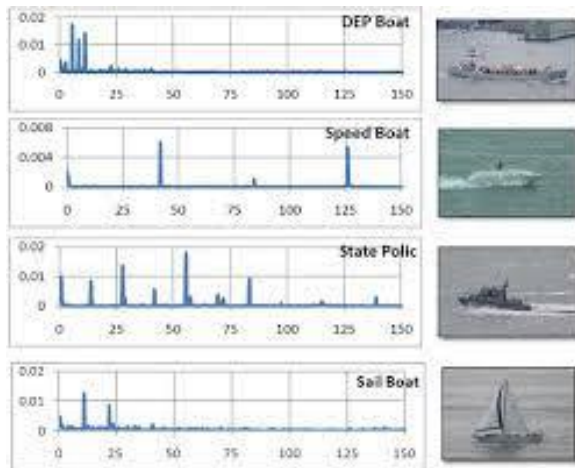
Παράδειγμα 1



Παράδειγμα 2

- ▶ Τα υποβρύχια αναγνωρίζουν την ταυτότητα ενός σκάφους (υποβρύχιο ή επιφανείας) μετρώντας την ηχητική του υπογραφή.
- ▶ Η ηχητική υπογραφή είναι ένα περίπλοκο ακουστικό σήμα που περιλαμβάνει αναλλοίωτα στοιχεία χαρακτηριστικά της πηγής προέλευσής της.
- ▶ Η αναγνώριση των αναλλοίωτων χαρακτηριστικών προκύπτει άμεσα από την διαδικασία αντιστροφής των μετρήσεων ενώ η ταυτότητα του σκάφους προκύπτει έμμεσα.

Παράδειγμα 2



Βασική προϋπόθεση !

- ▶ *Για να επιλυθεί ένα αντίστροφο πρόβλημα απαιτείται ο καθορισμός ενός μοντέλου που θα περιγράφει το φυσικό φαινόμενο στο οποίο αναφέρεται .*

Μοντελοποίηση !

- Παρατήρηση
- Φυσική κατανόηση
- Μαθηματική προσομοίωση
- Εφαρμογή μεθόδων επίλυσης
- Πιστοποίηση του μοντέλου

Ευθέα και Αντίστροφα Προβλήματα

Ευθύ πρόβλημα



Αντίστροφο πρόβλημα

Ευθύ πρόβλημα

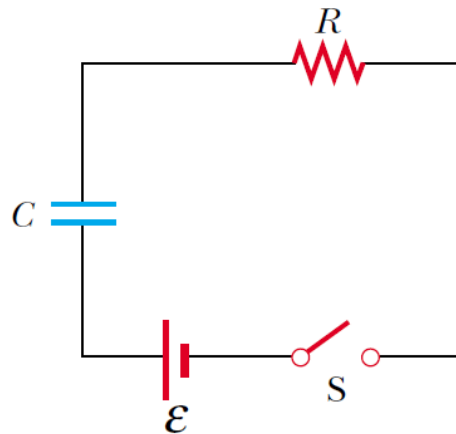
- ▶ Διατυπώνουμε το πρόβλημα
- ▶ Γνωρίζουμε τις παραμέτρους ενός προβλήματος.
- ▶ Εφαρμόζουμε το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο.
- ▶ Χρησιμοποιούμε τεχνικές επίλυσης (αναλυτικές – αριθμητικές)
- ▶ Στον αιτιατό κόσμο το μοντέλο πρέπει να μας οδηγεί σε μοναδική λύση του προβλήματος (καλώς τεθειμένο πρόβλημα)

(Υπάρχει και στοχαστική θεώρηση)

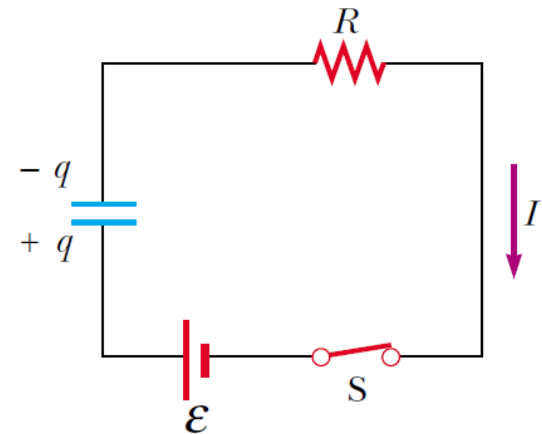
Ευθύ πρόβλημα

- ▶ Διατυπώνουμε το πρόβλημα

Σε ένα κύκλωμα RC που είναι αρχικά ανοικτό κλείνουμε το διακόπτη. Πόσο είναι το ρεύμα που θα διαρρέει το κύκλωμα 1 sec μετά το κλείσιμο του διακόπτη ;



(b) $t < 0$

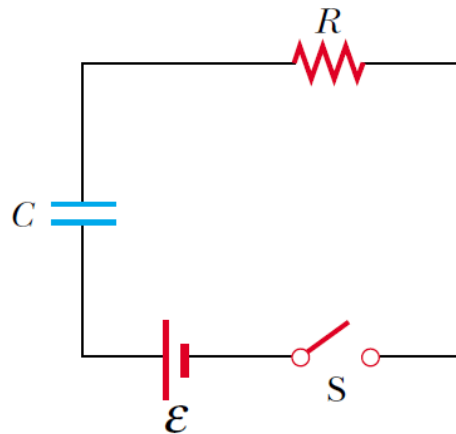


(c) $t > 0$

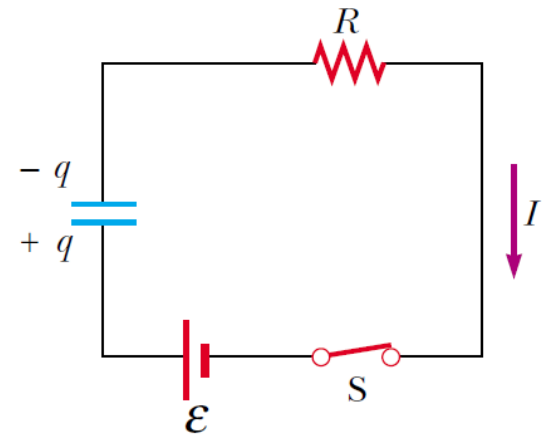
Ευθύ πρόβλημα

- Γνωρίζουμε τις παραμέτρους ενός προβλήματος.

$$\varepsilon = 10 \text{ V}, C = 0.1 \text{ F}, R = 50 \text{ Ohm}$$



(b) $t < 0$



(c) $t > 0$

Ευθύ πρόβλημα

- ▶ Εφαρμόζουμε το κατάλληλο μαθηματικό/φυσικό μοντέλο.

Νόμος Kirchhoff

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - IR = 0$$

Ευθύ πρόβλημα

- ▶ Χρησιμοποιούμε τεχνικές επίλυσης (αναλυτικές – αριθμητικές)

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} = 0$$

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - IR = 0$$

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\int_0^t \frac{1}{RC} dt$$

$$q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

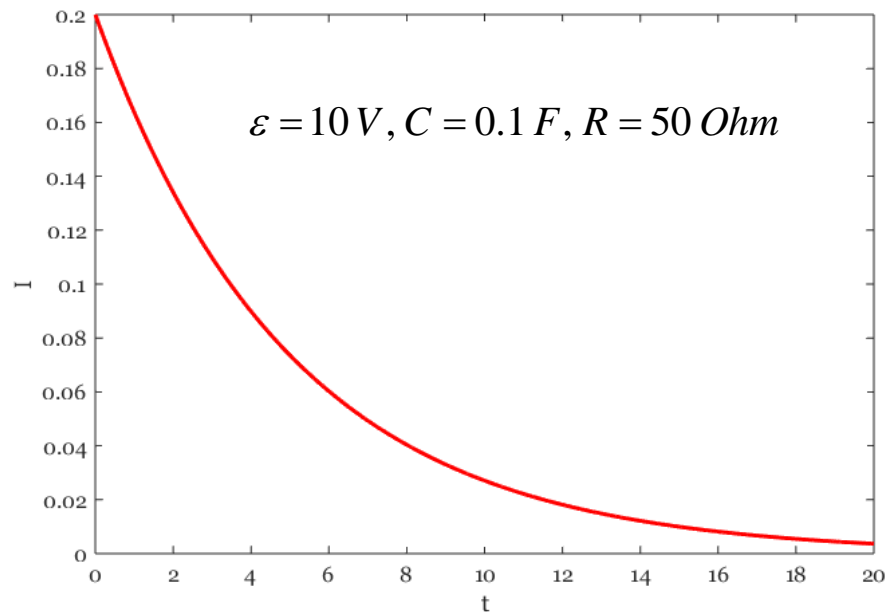
Post processing

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

Ευθύ πρόβλημα

- ▶ Στον αιτιατό κόσμο το μοντέλο πρέπει να μας οδηγεί σε μοναδική λύση του προβλήματος (καλώς τεθειμένο πρόβλημα)

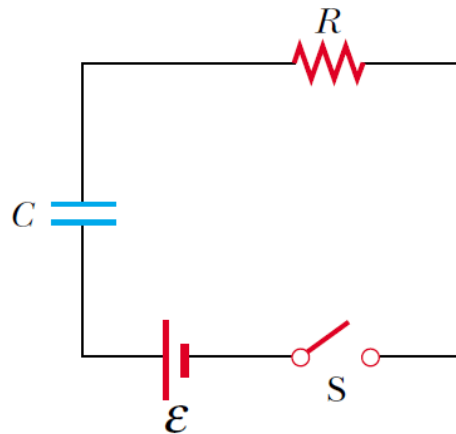
Η λύση είναι πράγματι μοναδική !



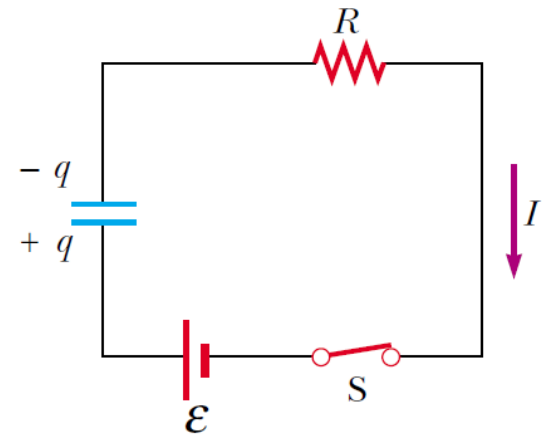
Αντίστροφο πρόβλημα

- ▶ Διατυπώνουμε το πρόβλημα

Σε ένα κύκλωμα RC που είναι αρχικά ανοικτό θέλουμε να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή. Κλείνουμε το κύκλωμα και μετράμε το ρεύμα μετά από 10 sec . Θα πάρουμε την απάντηση που θέλουμε ;



(b) $t < 0$

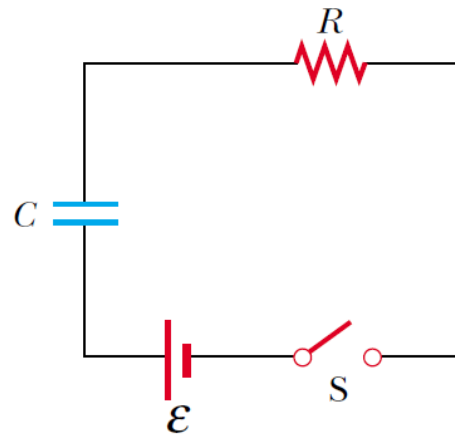


(c) $t > 0$

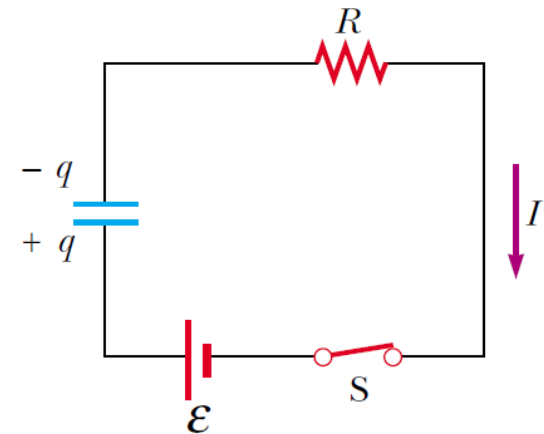
Αντίστροφο πρόβλημα

- ▶ Γνωρίζουμε την τάση και την αντίσταση.

$$\varepsilon = 10 V, R = 50 \text{ Ohm}$$



(b) $t < 0$



(c) $t > 0$

Αντίστροφο πρόβλημα

- ▶ Εφαρμόζουμε το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο.

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - IR = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} = 0$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

$$C = -\frac{t}{R} \frac{1}{\ln\left(\frac{RI}{\varepsilon}\right)}$$

Αντίστροφο πρόβλημα

- ▶ Εφαρμόζουμε το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο.

$$C = -\frac{t}{R} \frac{1}{\ln\left(\frac{RI}{\varepsilon}\right)}$$

Εάν έχουμε μετρήσει $I(10) = 0.03$ A θα πάρουμε $C = 0.105$ F

Είναι προφανές ότι το C που υπολογίσαμε δεν είναι ίσο με $C = 0.1$ F που γνωρίζαμε

Η απάντηση είναι μοναδική αλλά**λάθος μέτρηση** ;;

Θα δούμε και άλλους λόγους για τους οποίους η απάντηση σε ένα αντίστροφο πρόβλημα δεν είναι μοναδική.