Διακριτά Αντίστροφα Προβλήματα 2021-2022

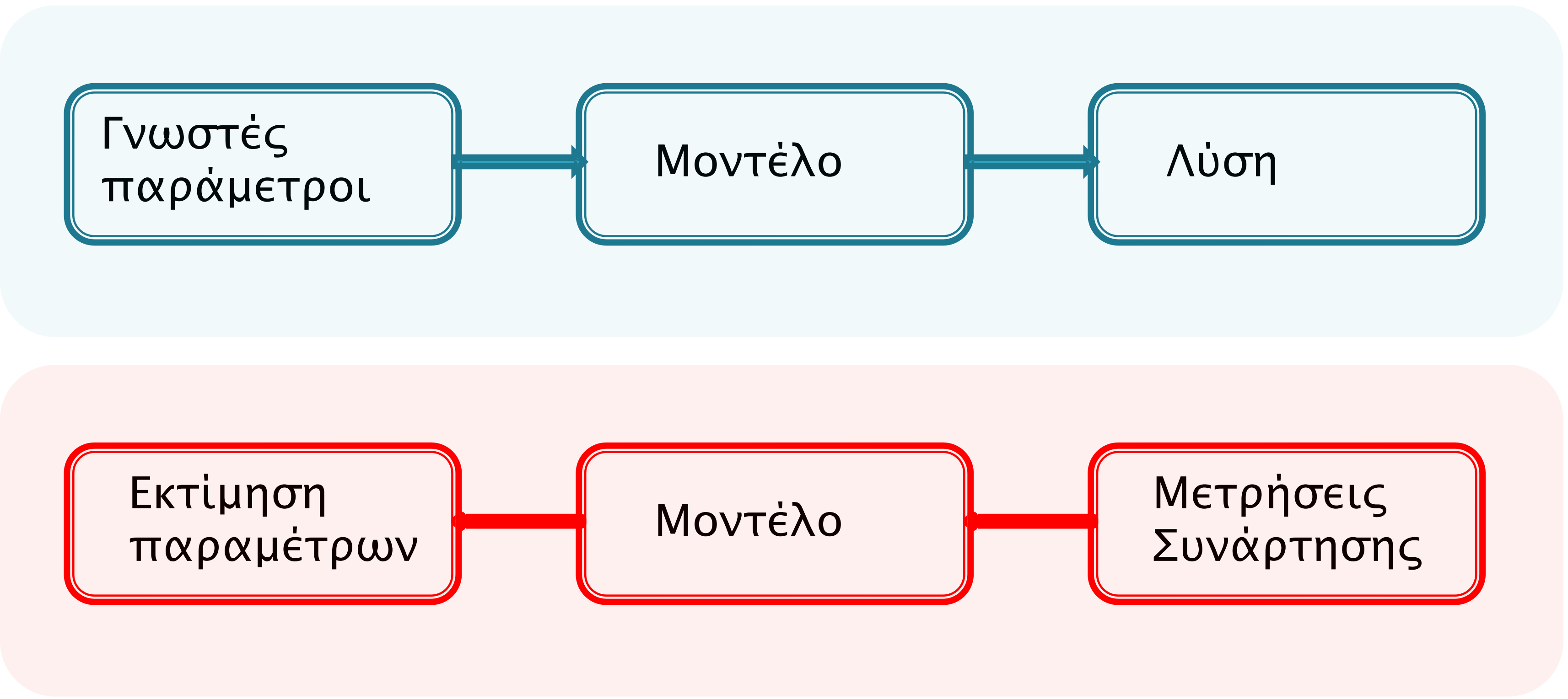
Διάλεξη 2

Διατύπωση Αντίστροφων Προβλημάτων

Μιχάλης Ταρουδάκης

Ευθέα και Αντίστροφα Προβλήματα

Ευθύ πρόβλημα



Αντίστροφο πρόβλημα

Γενική διατύπωση ενός αντίστροφου προβλήματος

Δοθεισών μετρήσεων **d** μιας κατάλληλης ποσότητας που σχετίζεται με ένα (……) πρόβλημα, υπολογίστε τις παραμέτρους **m**, έτσι ώστε εάν λυθεί το ευθύ πρόβλημα με τις εκτιμηθείσες παραμέτρους, οι λύσεις του να ταυτίζονται με τις ληφθείσες μετρήσεις

Αντιμετώπιση ενός αντίστροφου προβλήματος:

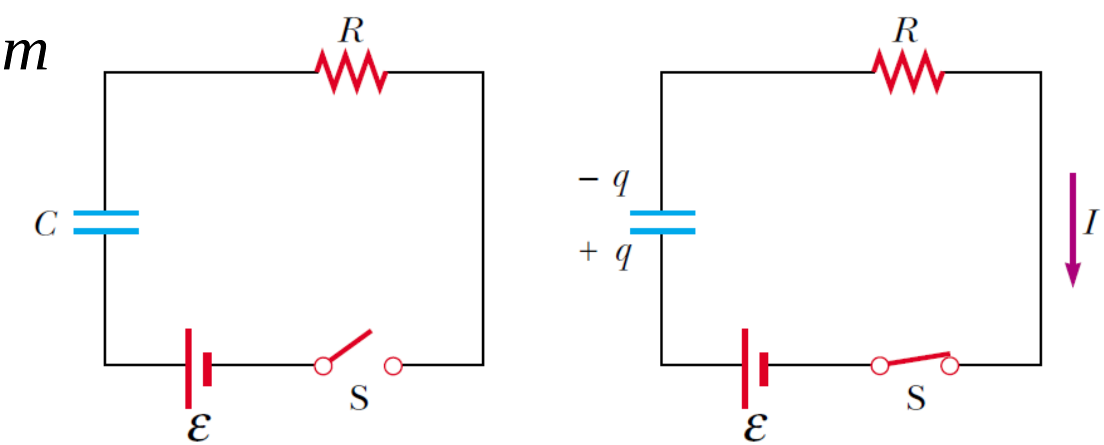
1. <u>Ντετερμινιστική</u>
2. Στοχαστική

Αντίστροφο πρόβλημα

- Πρόβλημα

Σε ένα κύκλωμα RC που είναι αρχικά ανοικτό θέλομε να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή. Κλείνουμε το κύκλωμα και μετράμε το ρεύμα μετά από 10 sec.

$\varepsilon = 10\,V,\;\; R = 50\,Ohm$



(b) $t<0$ (c) $t>0$

Αντίστροφο πρόβλημα

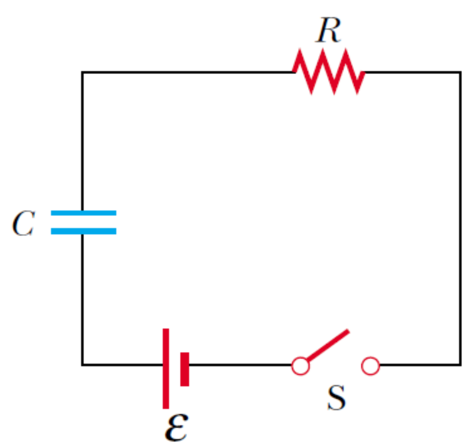
$$\varepsilon = 10\,V, \quad R = 50\,Ohm$$

Αντίστροφο

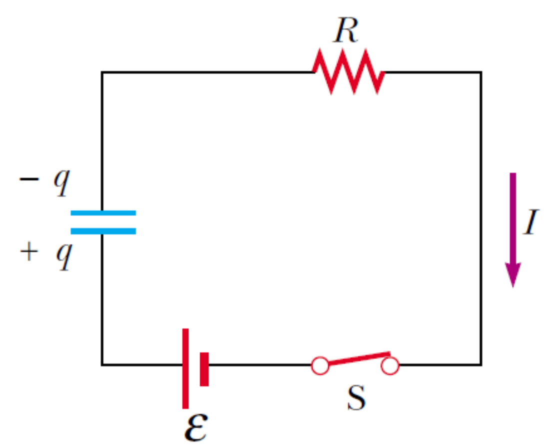
$$C = -\frac{t}{R}\frac{1}{\ln\left(\frac{RI}{\varepsilon}\right)}$$

Ευθύ

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$



(b) $t < 0$



(c) $t > 0$

Αντίστροφο πρόβλημα

$$\varepsilon = 10\,V, \quad R = 50\,Ohm$$

Μέτρηση I(10) =0.03 A

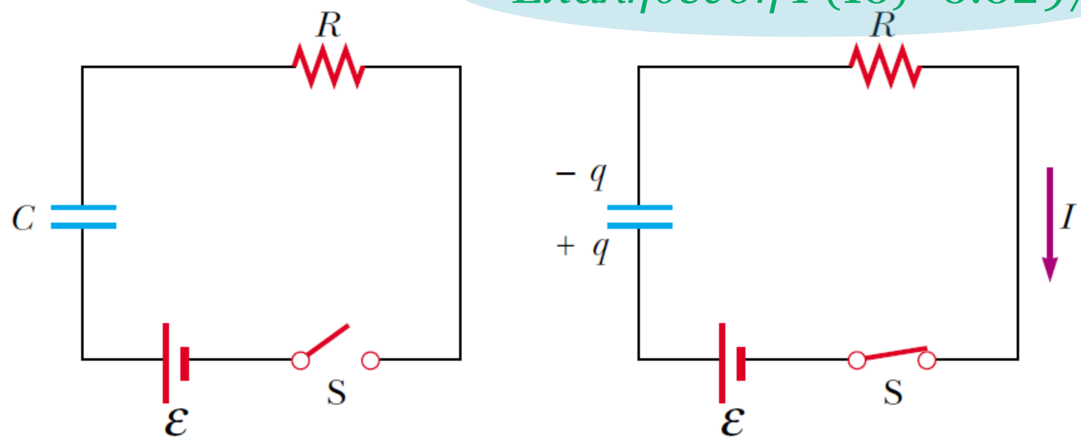
Ευθύ

$$C = -\frac{t}{R}\frac{1}{\ln\left(\frac{RI}{\varepsilon}\right)}$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

C=0.105 F

Επαλήθευση I (10)=0.02977



(b) $t < 0$ (c) $t > 0$

Θεμελειώδεις ερωτήσεις

- Υπάρχει επαρκής πληροφορία στις μετρήσεις ώστε να είναι δυνατή η επίλυση του αντίστροφου προβλήματος ;
- Εάν η απάντηση είναι ναι, η λύση είναι μοναδική ;

Βασικές Απαντήσεις

Το ευθύ πρόβλημα που ορίζεται για μία φυσική διεργασία πρέπει να έχει μοναδική λύση με δεδομένες τις βασικές παραμέτρους που το διέπουν εάν το μοντέλο που έχει επιλεγεί είναι σωστό

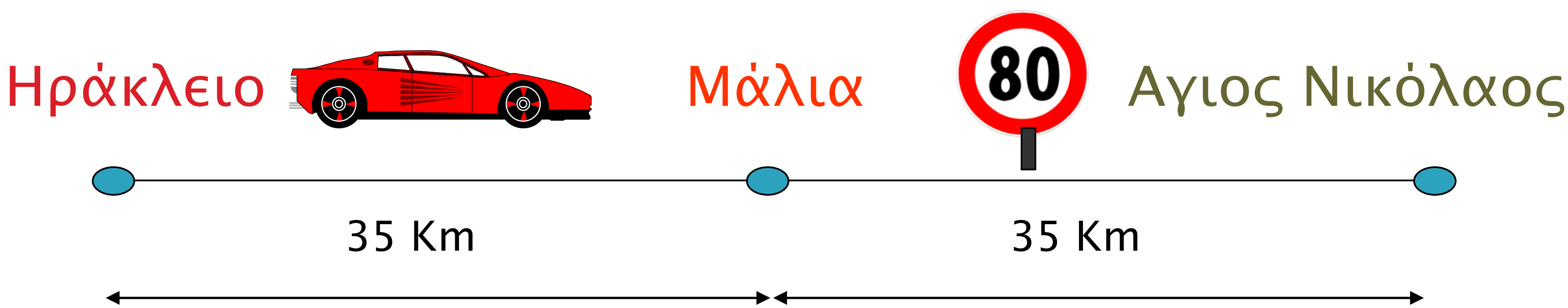
(Well posed problem)

Ένα αντίστροφο πρόβλημα βασισμένο στο ίδιο μοντέλο μπορεί να μην έχει καμία λύση ή να έχει πολλαπλές λύσεις

(Ill posed problem)

Παράδειγμα

Ένας οδηγός ξεκινά από το Ηράκλειο με προορισμό τον Άγιο Νικόλαο (απόσταση 70 km) και οδηγεί με ταχύτητα 140 km/h μέχρι τα Μάλια (απόσταση 35 km). Μετά κόβει ταχύτητα και οδηγεί μέχρι τον Άγιο Νικόλαο με σταθερή ταχύτητα 35 km/h.
Μπορεί ένας αστυνομικός που βρίσκεται στον Άγιο Νικόλαο και γνωρίζει την ακριβή ώρα αναχώρησης του οδηγού από το Ηράκλειο να του δώσει πρόστιμο για υπερβολική ταχύτητα ;



Ερώτηση :

Παράδειγμα

Απάντηση:

ΟΧΙ εάν οι μόνες πληροφορίες που έχει είναι η απόσταση (70 km) και ο ολικός χρόνος της διαδρομής (1 ώρα και 15 λεπτά)
Η μέση ταχύτητα που μπορεί να βεβαιώσει είναι 56 km/h πολύ κάτω από το όριο ταχύτητα (80 km/h)

$$\bar{C} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{70}{1.25} = 56$$

Απαιτείται επί πλέον πληροφορία για να διαπιστωθεί η παράβαση του οδηγού !!

Δεδομένα και παράμετροι

Τα δεδομένα σε ένα αντίστροφο πρόβλημα χαρακτηρίζονται ως «data»

Οι λύσεις σε ένα αντίστροφο πρόβλημα χαρακτηρίζονται ως «παράμετροι» (model parameters)

Δεδομένα και παράμετροι

Τα δεδομένα σε ένα αντίστροφο πρόβλημα θεωρητικά μπορεί να είναι συνεχείς συναρτήσεις $d(\vec{y})$

Οι λύσεις (παράμετροι) σε ένα αντίστροφο πρόβλημα μπορεί επίσης να είναι συνεχείς συναρτήσεις $m(\vec{x})$

Δεδομένα και παράμετροι

Το μοντέλο θα μας δώσει τη γραμμική ή μη γραμμική σχέση ανάμεσα σε δεδομένα και παραμέτρους. Ας το συμβολίσουμε μέσω της γενικευμένης συνάρτησης (πυρήνα)

$$G(x, y)$$

Εάν δεδομένα και παράμετροι διαχωρίζονται, τότε μπορούμε να εκφράσουμε τη λύση του προβλήματος μέσω της ολοκληρωτικής σχέσης :

$$d(y) = \int G(x, y) m(x) dx$$

Δεδομένα και παράμετροι

Εάν τα δεδομένα μας δίδονται σε διακριτή μορφή

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, \ldots.d_N]^T$$

$$d(y) = \int G(x, y) m(x) dx$$

$$\Downarrow$$

$$d_i = \int G_i(x) m(x) dx, \quad i = 1, \ldots N$$

Συνεχές αντίστροφο πρόβλημα

Δεδομένα και παράμετροι

Εάν οι παράμετροι είναι επίσης σε διακριτή μορφή

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, \ldots. m_M]^T$$

Διακριτό αντίστροφο πρόβλημα
(Δ.Α.Π.)

Δεδομένα και παράμετροι

Διακριτό αντίστροφο πρόβλημα (Δ.Α.Π.)

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, \ldots. m_M]^T$$

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, \ldots. d_N]^T$$

Δεδομένα και παράμετροι

Διακριτό αντίστροφο πρόβλημα
(Δ.Α.Π.)

$$f_1(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0,$$

$$f_2(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0$$

$$.$$

$$.$$

$$f_L(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0$$

$$f_j(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0, \quad j = 1,\ldots L$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0$$

Διατύπωση Δ.Α.Π.

Συνάρτηση **f** γραμμική ως προς παραμέτρους και δεδομένα

$$f_1(\mathbf{d},\mathbf{m})=0,\ f_2(\mathbf{d},\mathbf{m})=0,\ldots.\ f_L(\mathbf{d},\mathbf{m})=0$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{d},\mathbf{m})=0=\mathbf{F}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{m}\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Έμμεση Γραμμική μορφή

Διαστάσεις $\mathbf{F}$: $Lx(M{+}N)$

Διατύπωση Δ.Α.Π.

Δεδομένα και παράμετροι διαχωρίζονται και διατυπώνονται L=N εξισώσεις της μορφής

$$\mathbf{f}(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0 = \mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m})$$

Άμεση μορφή

$$d_i = g_i(\mathbf{m}), \quad i = 1,\ldots.N$$

Η διανυσματική συνάρτηση **g(m)** μπορεί να μην είναι γραμμική !

Διατύπωση Δ.Α.Π.

Εάν η συνάρτηση **g(m)** είναι γραμμική ως προς τις παραμέτρους

$$\mathbf{f}(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0 = \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}$$

Άμεση γραμμική μορφή

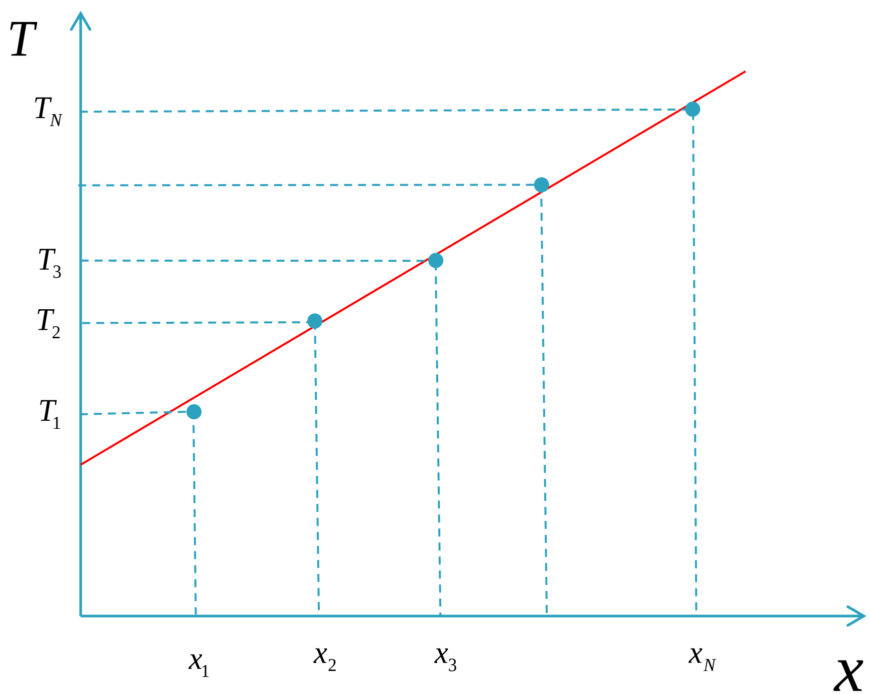
$$d_i = \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j, \quad i = 1,\ldots.N$$

Ανακεφαλαίωση :

Έμμεση Γραμμική Μορφή	$\mathbf{f}(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0 = \mathbf{F}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{m}\end{bmatrix}$
Άμεση Μορφή	$\mathbf{f}(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0 = \mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m})$
Άμεση Γραμμική Μορφή	$\mathbf{f}(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0 = \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}$

Παραδείγματα

Υπολογισμός παραμέτρων ευθείας



Μοντέλο :

$$T = a + bx$$

Μετρήσεις:

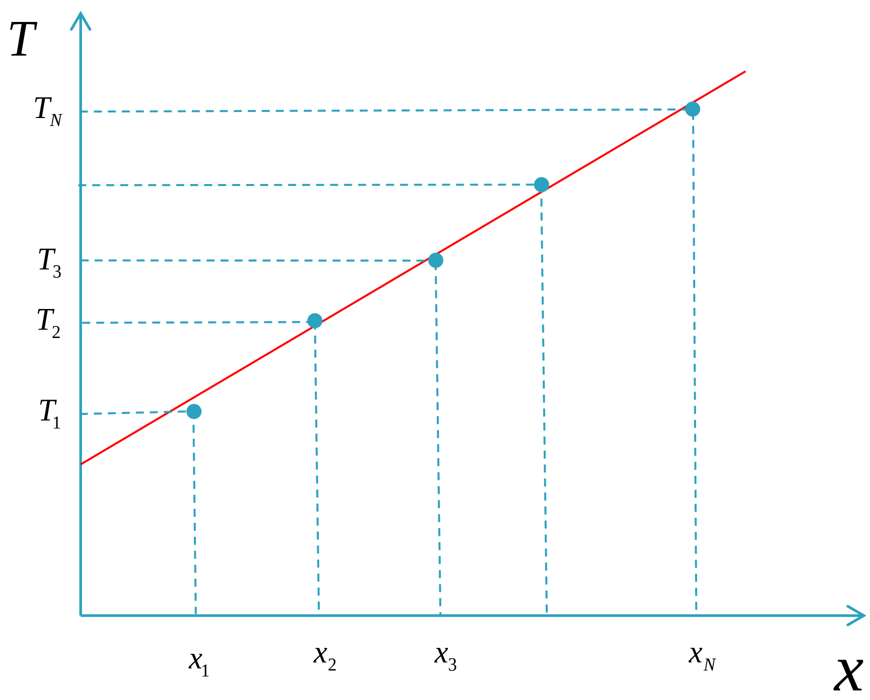
$$T_1 = a + bx_1$$

$$T_2 = a + bx_2$$

$$T_N = a + bx_N$$

Παραδείγματα

Υπολογισμός παραμέτρων ευθείας

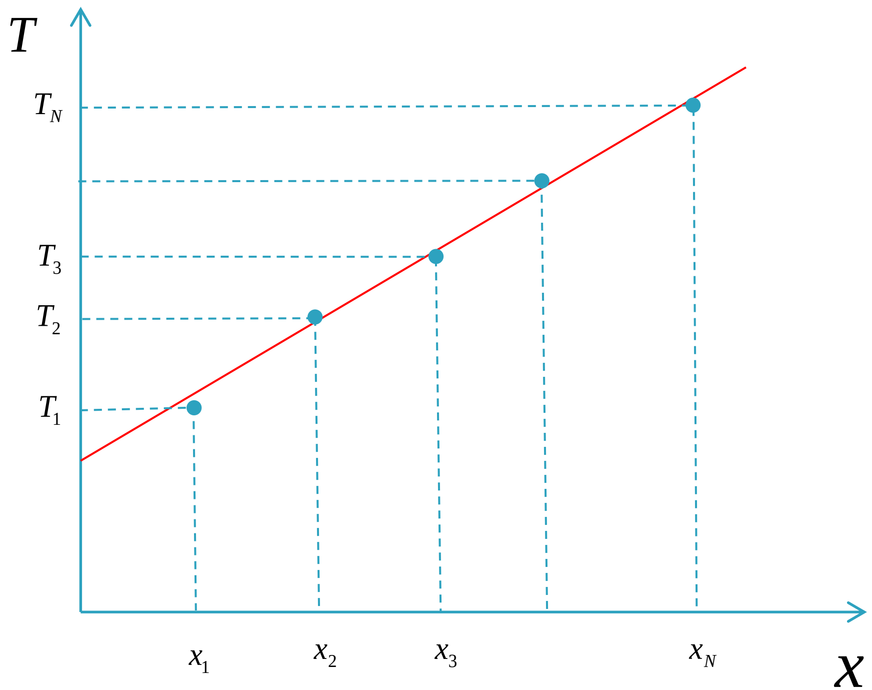


$$\mathbf{m} = [a, b]^T$$

$$\mathbf{d} = [T_1, T_2, \ldots. T_N]^T$$

Παραδείγματα

Υπολογισμός παραμέτρων ευθείας



$$T = a + bx$$

N γραμμικές εξισώσεις για 2 αγνώστους

Υπερ-ορισμένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Στην περίπτωση που η καμπύλη πρέπει να είναι παραβολή

Με βάση το μαθηματικό μοντέλο,

$$T = ax^2 + bx + c$$

οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα είναι :

$$T_1 = a + bx_1 + cx_1^2$$

$$T_2 = a + bx_2 + cx_2^2$$

$$\vdots$$

$$T_N = a + bx_N + cx_N^2$$

Παράδειγμα 2

Στην περίπτωση που η καμπύλη πρέπει να είναι παραβολή

$$\mathbf{m} = [a, b, c]^T$$

$$\mathbf{d} = [T_1, T_2, \ldots. T_N]^T$$

$$T_1 = a + bx_1 + cx_1^2$$

$$T_2 = a + bx_2 + cx_2^2$$

.

.

.

$$T_N = a + bx_N + cx_N^2$$

Παράδειγμα 2

Οι εξισώσεις σε μητρωική μορφή

Gm=d

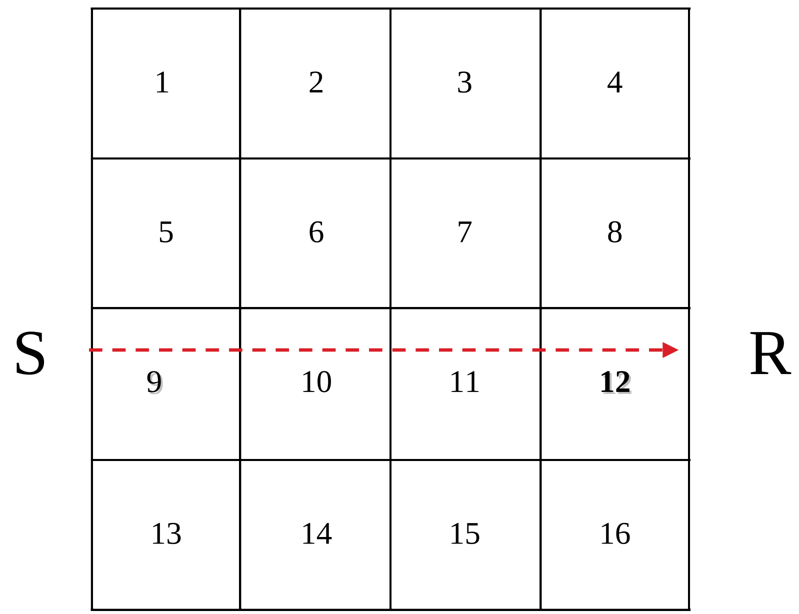
G

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ . \\ T_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3

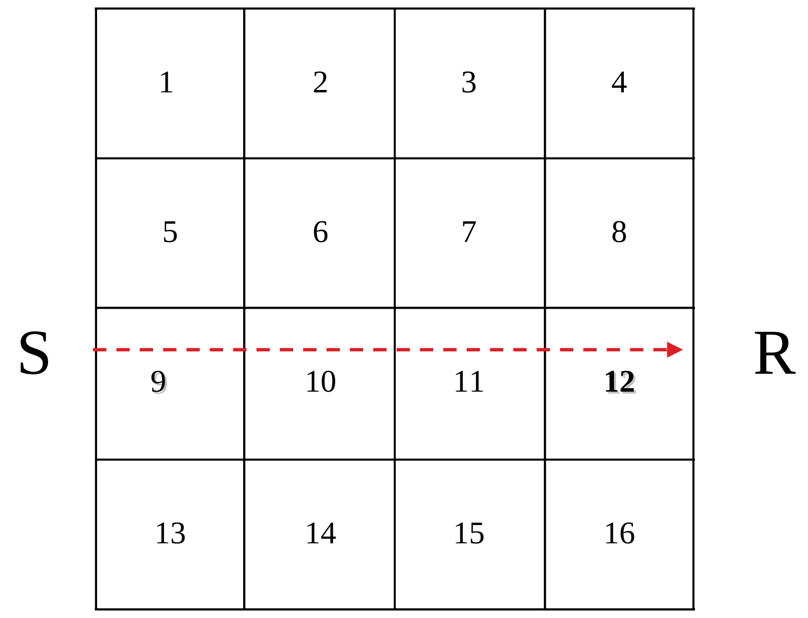
Παράδειγμα Ακουστικής Τομογραφίας

Μη καταστρεπτικός έλεγχος υλικών



Παράδειγμα 3

Μοντέλο : Μέση ταχύτητα διάδοσης $\bar{c} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$



Παράδειγμα 3

Δοκίμια : Ομογενή τούβλα κυβικής διατομής, ακμής h

Παράμετρος προς ανάκτηση: Ταχύτητα διάδοσης ήχου σε κάθε τούβλο :

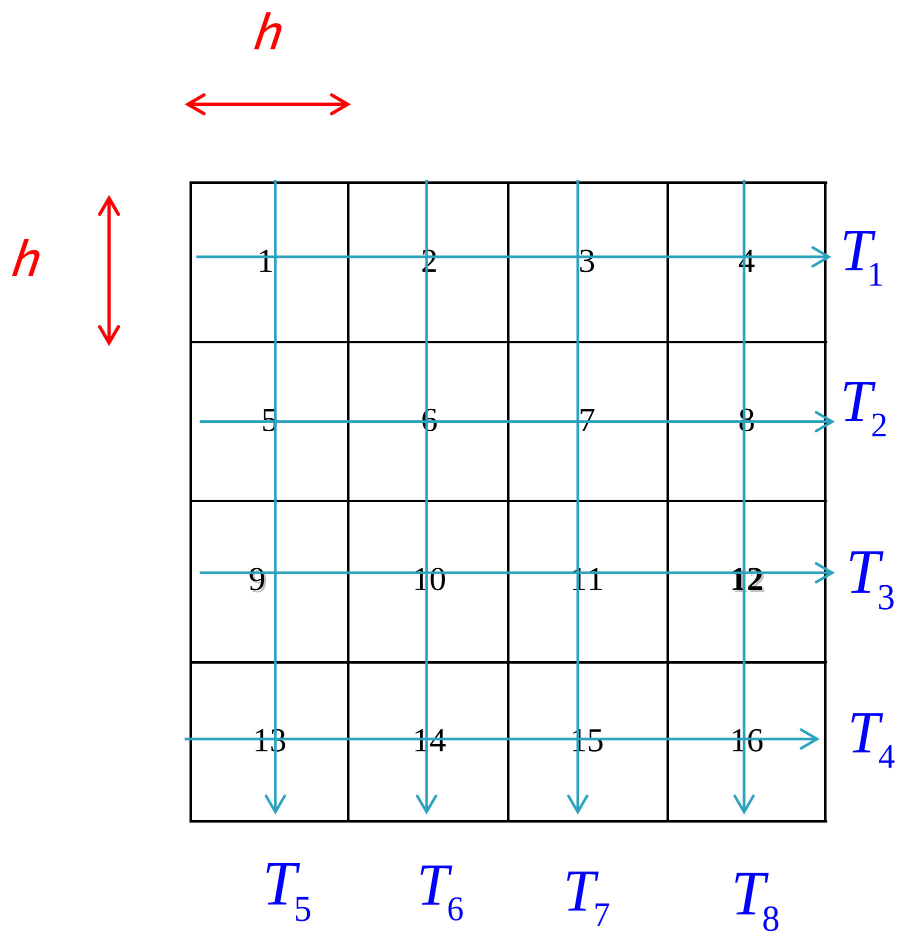
$$c_i, \quad s_i = \frac{1}{c_i}$$

Ο ήχος διαδίδεται σε ευθεία γραμμή

Κάνομε 8 μετρήσεις σε κάθε γραμμή και στήλη χωριστά : N=8

Μέτρηση χρόνου.

Παράδειγμα 3



$$\mathbf{m} = [s_1, s_2, \ldots s_{16}]^T$$

$$\mathbf{d} = [T_1, T_2, \ldots T_8]^T$$

Παράδειγμα 3

Γραμμικό διακριτό αντίστροφο πρόβλημα

Εξισώσεις της μορφής :

$$T_1 = hs_1 + hs_2 + hs_3 + hs_4$$

$$T_2 = hs_5 + hs_6 + hs_7 + hs_8$$

.

.

.

$$T_8 = hs_4 + hs_8 + hs_{12} + hs_{16}$$

Παράδειγμα 3

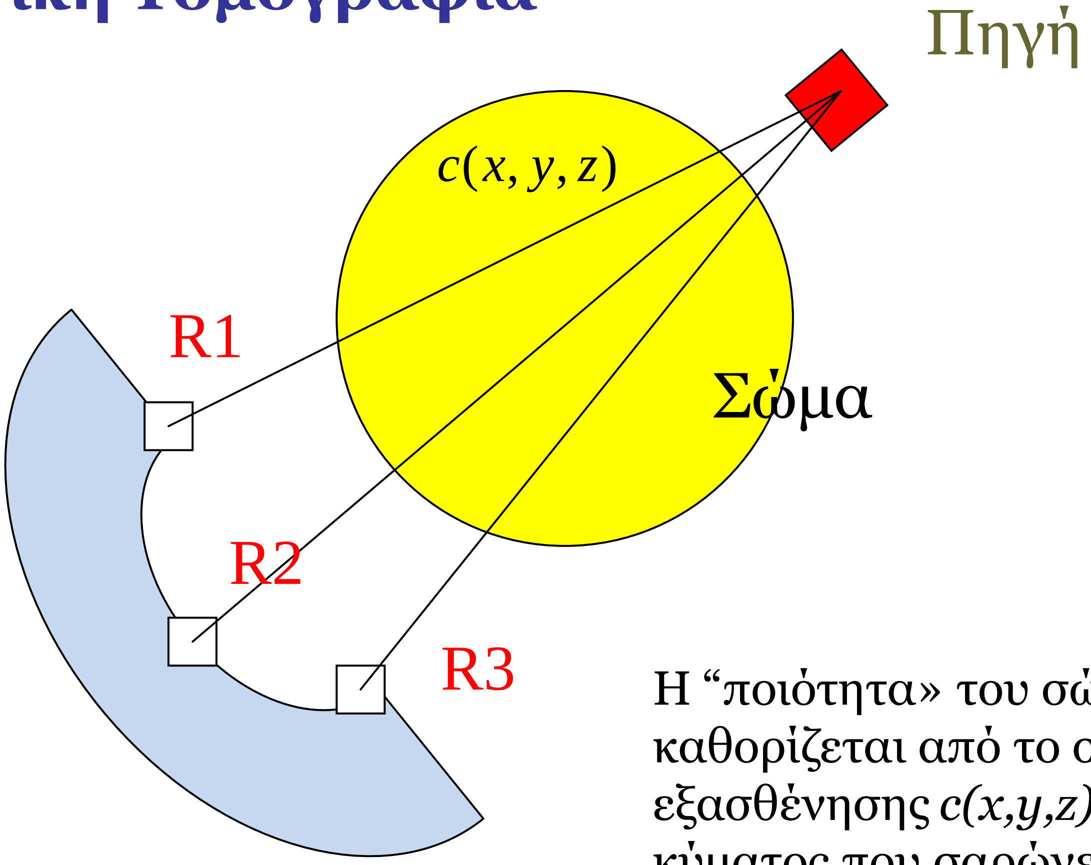
Σε μορφή μητρώου

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ T_8 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ . \\ . \\ . \\ s_{16} \end{bmatrix}$$

Υπο-ορισμένο πρόβλημα

Παράδειγμα 4

Αξονική Τομογραφία



Η “ποιότητα» του σώματος καθορίζεται από το συντελεστή εξασθένησης $c(x,y,z)$ του Η/Μ κύματος που σαρώνει το σώμα

Παράδειγμα 4

Μοντέλο : Η ένταση της δέσμης μειώνεται με ρυθμό που εξαρτάται από την ένταση και το συντελεστή εξασθένησης

$$dI / ds = -c(x,y,z)I$$

I : Ένταση δέσμης

s: Απόσταση στη διεύθυνση της δέσμης

$c(x,y,z)$ Συντελεστής εξασθένησης

Η διαδικασία προβλέπει πολλές τομές του τρισδιάστατου σώματος και διατύπωση του προβλήματος σε επίπεδο (2 διαστάσεις *x,y*)

Παράδειγμα 4

Μοντέλο : Η ένταση της δέσμης μειώνεται με ρυθμό που εξαρτάται από την ένταση και το συντελεστή εξασθένησης

$$dI / ds = -c(x, y)I$$

Η ένταση στον δέκτη Ι είναι $I_i = I_0 \exp(-\int_i c(x, y)ds)$

$$\ln I_0 - \ln I_i = \int_i c(x, y)ds$$

Δεδομένα : Μετρήσεις της έντασης σε N διακριτά σημεία στο δέκτη

<u>Μη γραμμικό συνεχές αντίστροφο πρόβλημα</u>

$$d_i = \int G_i(x)m(x)dx, \quad i = 1,\ldots N$$

Παράδειγμα 4

Το πρόβλημα μπορεί να γραμμικοποιηθεί

Υποθέτουμε χαμηλή απορρόφηση.

Παίρνοντας ανάπτυγμα Taylor του εκθετικού όρου.

$$e^{-x} \simeq 1 - x$$

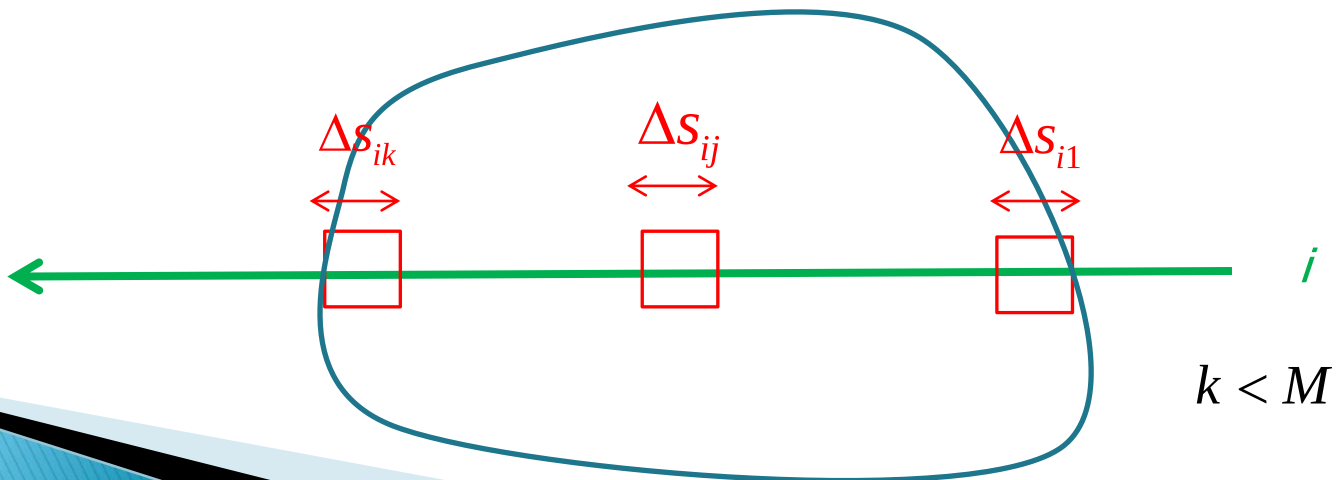
Παράδειγμα 4

Το πρόβλημα μπορεί να διακριτοποιηθεί

Θεωρούμε M στοιχεία σταθερής απορρόφησης.

$\mathbf{m} = [c_1, c_2, \ldots\ldots c_M]^T$

Κάθε στοιχείο έχει μήκος πάνω στην ακτίνα *i* Δs_{ij}



Παράδειγμα 4

$$I_i = I_0 \exp(-\int_i c(x,y)ds) \Longrightarrow \Delta I_i = \frac{I_0 - I_i}{I_0} = \sum_{j=1}^{M} \Delta s_{ij} c_j$$

Διατύπωση ενός γραμμικού αντίστροφου προβλήματος

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathrm{I}_1 \\ \Delta \mathrm{I}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \Delta \mathrm{I}_\mathrm{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta s_{11} & \Delta s_{12} & . & . & . & \Delta s_{1M} \\ \Delta s_{21} & \Delta s_{22} & . & . & . & \Delta s_{2M} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \Delta s_{N1} & \Delta s_{N2} & & & & \Delta s_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ , \\ . \\ . \\ c_M \end{bmatrix}$$