Διακριτά Αντίστροφα Προβλήματα
2021-2022

Διάλεξη 4

Μέθοδος μηκών

Μιχάλης Ταρουδάκης

Διαφορά μετρήσεων και εκτιμήσεων μετρήσεων

Γραμμικό Διακριτό Αντίστροφο Πρόβλημα

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gm}$$

Έστω ότι από τη λύση του αντίστροφου προβλήματος εκτιμούμε το διάνυσμα των παραμέτρων $\mathbf{m}^{est}$

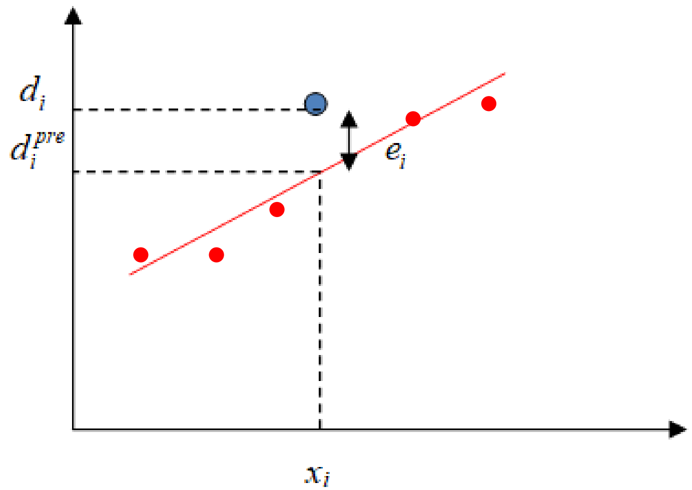
$$\mathbf{d}^{pre} = \mathbf{Gm}^{est}$$

Δοθεισών μετρήσεων **d** μιας κατάλληλης ποσότητας που σχετίζεται με ένα (……) πρόβλημα, υπολογίστε τις παραμέτρους **m,** έτσι ώστε εάν λυθεί το ευθύ πρόβλημα με τις εκτιμηθείσες παραμέτρους, οι λύσεις του να ταυτίζονται με τις ληφθείσες μετρήσεις

Διαφορά μετρήσεων και εκτιμήσεων μετρήσεων

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}^{est}$$

$$\mathbf{d} \longrightarrow \mathbf{m}^{est} \longrightarrow \mathbf{d}^{pre}$$



$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{d}^{pre}$$

$$e_i = d - d_i^{pre}$$

Θέλομε ελαχιστοποίηση του λάθους !

Νόρμες

$\|\mathbf{x}\| > 0$ $\|\mathbf{x}\| = 0$ Εάν και μόνο εάν **x=o** $a \in \mathbf{B}$ $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$

$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

B : **C** ή **R**

$\|c\mathbf{A}\| = |c|\|\mathbf{A}\|$

$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$

Πίνακες **A,B** $c \in \mathbf{B}$

$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$

$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$

Νόρμες

L_1 Νόρμα

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left[\sum_i |x_1|^1 \right]$$

L_2 Νόρμα

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\sum_i |x_1|^2 \right]^{1/2}$$

L_n Νόρμα

$$\|\mathbf{x}\|_n = \left[\sum_i |x_n|^{1/n} \right]$$

L_∞ Νόρμα

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Σημασία των ακραίων μετρήσεων

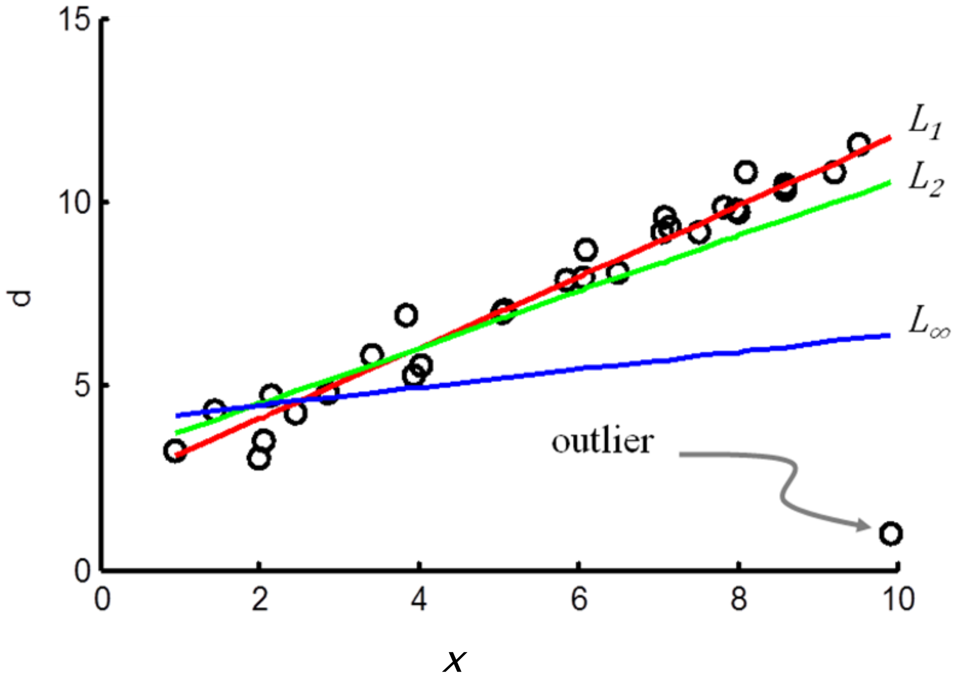
Η ελαχιστοποίηση κάποιας νόρμας, δεν έχει το ίδιο αποτέλεσμα ως προς τις παραμέτρους για τις οποίες γίνεται η ελαχιστοποίηση.

Για παράδειγμα η νόρμα μεγίστου δίνει μεγάλη σημασία σε ακραία στοιχεία ενός διανύσματος.

Η L_2 Νόρμα φαίνεται να έχει μια ποιο ορθολογική και ισότιμη αντιμετώπιση των στοιχείων των διανυσμάτων.

Εάν τα στοιχεία ανήκουν σε τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή, η L_2 Νόρμα είναι η βέλτιστη.

Σημασία των ακραίων μετρήσεων



Η L_∞ Νόρμα δίνει βάρος σε ακραίες μετρήσεις

Επίλυση με ελάχιστα τετράγωνα

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{d}^{pre}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\sum_i |x_1|^2\right]^{1/2}$$

$$e_i = d - d_i^{pre}$$

$$E = \mathbf{e}^{\mathbf{T}}\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{N} e_i^2$$

Ολικό λάθος στα πλαίσια της L_2 νόρμας

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gm} \Longrightarrow \mathbf{d}^{pre} = \mathbf{Gm}^{est}$$

$$E = \mathbf{e}^{\mathbf{T}}\mathbf{e} = (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{pre})^T(\mathbf{d} - \mathbf{d}^{pre}) = (\mathbf{d} - \mathbf{Gm}^{est})^T(\mathbf{d} - \mathbf{Gm}^{est}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[d_i - \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j^{est}\right]\left[d_i - \sum_{k=1}^{M} G_{ik} m_k^{est}\right]$$

Επίλυση με ελάχιστα τετράγωνα

$$E = \mathbf{e}^{\mathbf{T}}\mathbf{e} = (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{pre})^T(\mathbf{d} - \mathbf{d}^{pre}) = (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}^{est})^T(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}^{est}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[d_i - \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j^{est}\right]\left[d_i - \sum_{k=1}^{M} G_{ik} m_k^{est}\right]$$

Επιθυμούμε οι παράμετροι που υπολογίζονται να οδηγούν σε αναπαραγωγή μετρήσεων όσο πιο κοντά στις αρχικές γίνεται

Παραγωγίζοντας ως προς κάθε παράμετρο m_q και θέτοντας την παράγωγο 0, παίρνομε ένα σύστημα *M* εξισώσεων ως προς τις ζητούμενες παραμέτρους.

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G}\mathbf{m}^{est} - \mathbf{G}^T\mathbf{d} = 0$$

$\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ Τετραγωνικός πίνακας *MxM*

Επίλυση με ελάχιστα τετράγωνα

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G}\mathbf{m}^{est} - \mathbf{G}^T\mathbf{d} = 0$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G}\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

Εάν ο πίνακας $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ αντιστρέφεται

$$\boxed{\mathbf{m}^{est} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}}$$

Λύση ελαχίστων τετραγώνων

Επίλυση με ελάχιστα τετράγωνα

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$$

Γραμμική Άλγεβρα

Σύστημα *N* εξισώσεων με *M* αγνώστους.

Εάν *N*>*M* υπάρχει λύση όταν το **d** ανήκει στο χώρο των στηλών του **G**

Θέλομε ένα **d’** που να ανήκει στο χώρο των στηλών του **G** και να είναι κοντά στο **d**

Γνωρίζομε ότι αυτό είναι η ορθογώνια προβολή του **d** στο χώρο στηλών του **G** και ισχύει $\mathbf{d}' = \mathbf{G}\mathbf{m}^{est}$

Επομένως η διαφορά **d-d’** θα πρεπει να είναι διάνυσμα ορθογώνιο στο χώρο των στηλών του **G** και επομένως θα πρέπει να ανήκει στο μηδενόχωρο του **G** .

Επίλυση με ελάχιστα τετράγωνα

Επομένως $\mathbf{G}^T(\mathbf{d}-\mathbf{d}')=0$

Αλλά $\mathbf{d}-\mathbf{d}'=\mathbf{d}-\mathbf{G}\mathbf{m}^{est}$

$$\mathbf{G}^T(\mathbf{d}-\mathbf{d}')=0 \Rightarrow \mathbf{G}^T(\mathbf{d}-\mathbf{G}\mathbf{m}^{est})=0 \Rightarrow \mathbf{G}^T\mathbf{d}=\mathbf{G}^T\mathbf{G}\mathbf{m}^{est}$$

$$\mathbf{m}^{est}=\left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

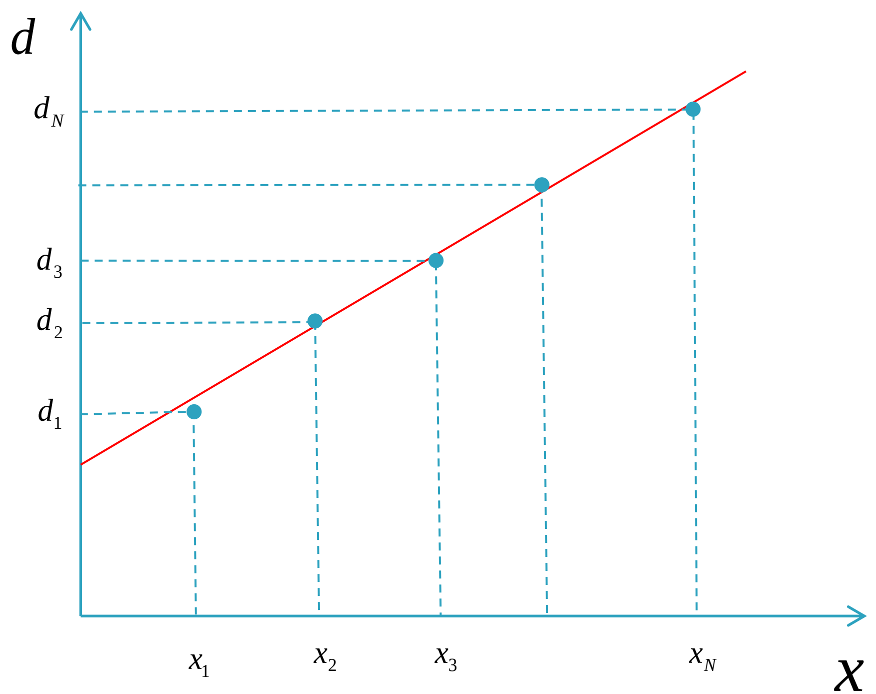
Λύση ελαχίστων τετραγώνων

Για αντιστρέψιμο πίνακα $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ οι μετρήσεις πρέπει να γίνουν με προσεκτικό τρόπο

Παραδείγματα

Υπολογισμός παραμέτρων ευθείας

Εξίσωση ευθείας $d = m_1 + m_2 x$



Κάνομε μετρήσεις σε N x_i και παίρνομε αντίστοιχα d_i

$$d_i = m_1 + m_2 x_i, \quad i = 1,\ldots N$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

Υπολογισμός παραμέτρων ευθείας

$$\mathbf{m}^{est} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ x_1 & x_2 & . & . & . & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 1 & x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{d} = \ldots = \begin{bmatrix} \Sigma d_i \\ \Sigma x_i d_i \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

Υπολογισμός παραμέτρων ευθείας

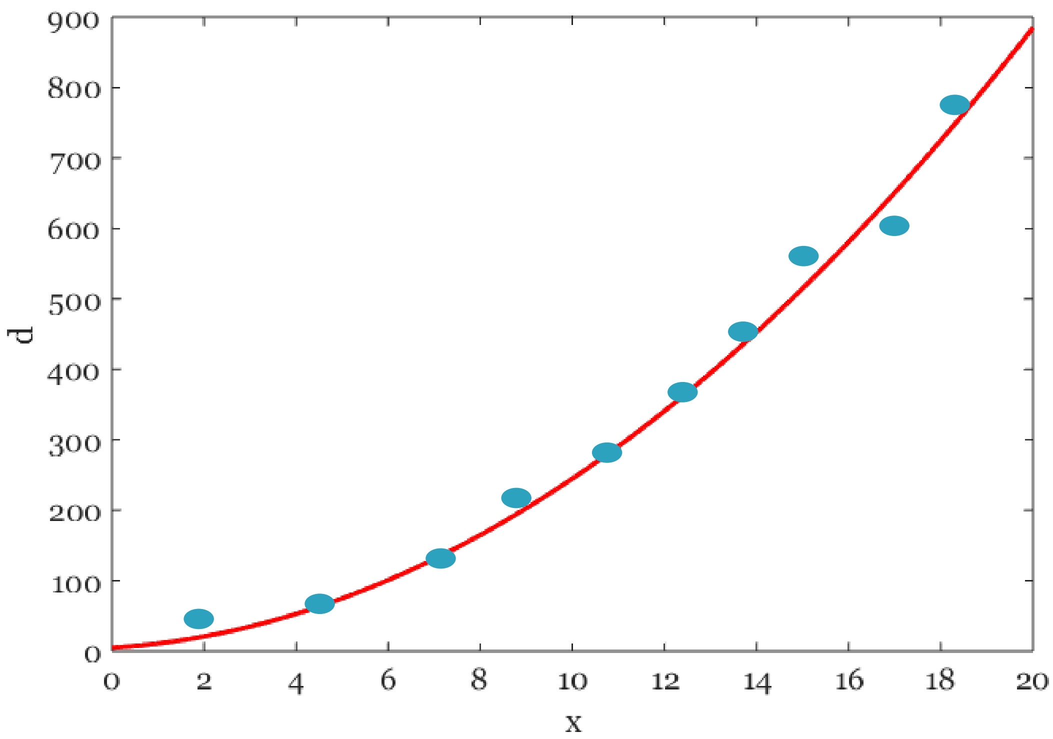
$$\mathbf{m}^{est} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d} = \begin{bmatrix} N & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma d_i \\ \Sigma x_i d_i \end{bmatrix}$$

Εάν ο πίνακας $\mathbf{G}$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες

τότε ο πίνακας $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ αντιστρέφεται

Παραδείγματα

Υπολογισμός παραμέτρων καμπύλης 2ου βαθμού



$$d(x) = m_1 + m_2 x + m_3 x^2$$

Κάνομε μετρήσεις σε N x_i και παίρνομε αντίστοιχα d_i

$$d_i = m_1 + m_2 x_i + m_3 x_i^2 \qquad ;$$

Παραδείγματα

Υπολογισμός παραμέτρων καμπύλης 2ου βαθμού

$$d_i = m_1 + m_2 x_i + m_3 x_i^2, \quad i = 1, \ldots, N$$

G

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ x_1 & x_2 & . & . & . & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & . & . & . & x_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

Υπολογισμός παραμέτρων καμπύλης 2ου βαθμού

$$\mathbf{G}^T\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ x_1 & x_2 & . & . & . & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & . & . & . & x_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma d_i \\ \Sigma x_i d_i \\ \Sigma x_i^2 d_i \end{bmatrix}$$

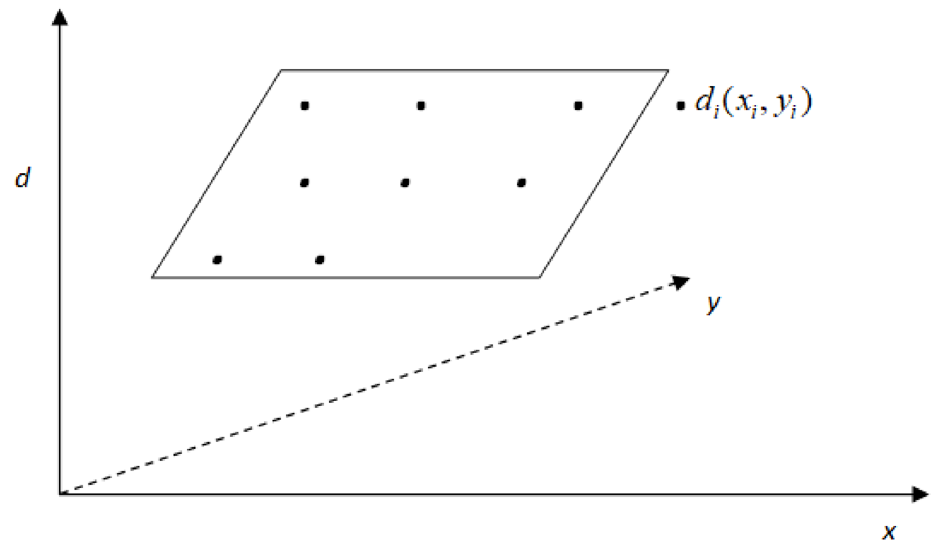
$$\mathbf{m}^{est} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d} = \begin{bmatrix} N & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma d_i \\ \Sigma x_i d_i \\ \Sigma x_i^2 d_i \end{bmatrix}$$

Λύση ελαχίστων τετραγώνων

Παραδείγματα

Υπολογισμός εξίσωσης επιπέδου στο χώρο

$$d(x, y) = m_1 + m_2 x + m_3 y$$



Κάνομε μετρήσεις σε N x_i και y_i παίρνομε αντίστοιχα d_i

$$d_i = m_1 + m_2 x_i + m_3 y_i$$

Παραδείγματα

Υπολογισμός εξίσωσης επιπέδου στο χώρο

$$d(x, y) = m_1 + m_2 x + m_3 y$$

G

Gm = d

$$d_i = m_1 + m_2 x_i + m_3 y_i$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_N \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

Υπολογισμός εξίσωσης επιπέδου στο χώρο

$$d_i = m_1 + m_2 x_i + m_3 y_i$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ x_1 & x_2 & . & . & . & x_N \\ y_1 & y_2 & . & . & . & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_1 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \Sigma x_i & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i & \Sigma x_i y_i & \Sigma y_i^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ x_1 & x_2 & . & . & . & x_N \\ y_1 & y_2 & . & . & . & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma d_i \\ \Sigma x_i d_i \\ \Sigma y_i d_i \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

Υπολογισμός εξίσωσης επιπέδου στο χώρο

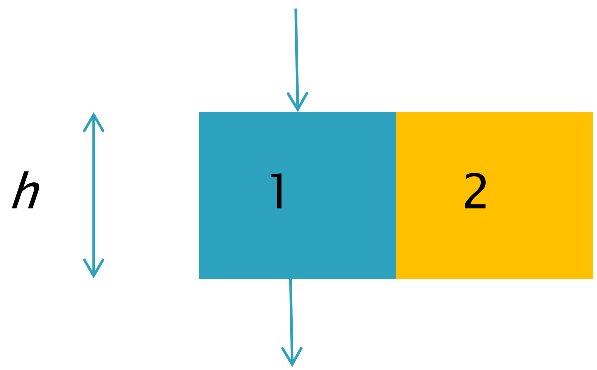
$$d_i = m_1 + m_2 x_i + m_3 y_i$$

$$\mathbf{m}^{est} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d} = \begin{bmatrix} N & \Sigma x_i & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i & \Sigma x_i y_i & \Sigma y_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma d_i \\ \Sigma x_i d_i \\ \Sigma y_i d_i \end{bmatrix}$$

Λύση ελαχίστων τετραγώνων

Κακώς διατυπωμένα προβλήματα

Λάθος διαδικασία λήψης μετρήσεων



Έλεγχος ποιότητας δοκιμίων

Κάνομε 10 μετρήσεις διάδοσης υπερήχων μόνο στο πρώτο δοκίμιο

Μοντέλο : $t = hs, \quad s = 1/c \qquad m = (s_1, s_2)$

Διατυπώστε το σύστημα που αφορά στη συγκεκριμένη διαδικασία. Έχει λύση ;

Καθαρά υπο–ορισμένα προβλήματα

Προβλήματα που έχουν περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις, αλλά οι εξισώσεις είναι συνεπείς $N<M$

$$x + y + z = 6$$
$$2x + y - z = 1$$

$$\mathbf{m} = (x, y, z)$$

Δυνατές λύσεις : $\mathbf{m}_1^{est} = [1, 2, 3]^T$

$$\mathbf{m}_2^{est} = [-3, 8, 1]^T$$

Ποια να διαλέξω ; Χρειαζόμαστε πρόσθετη πληροφορία

π.χ. Μόνο θετικές λύσεις

Καθαρά υπο–ορισμένα προβλήματα

Προβλήματα που έχουν περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις, αλλά οι εξισώσεις είναι συνεπείς $N<M$

Κριτήριο ελάχιστου μήκους

$$L = \mathbf{m}^T\mathbf{m} = \sum_{j=1}^{\mathrm{M}} m_j^2$$

Θέλομε L minimum

Υπολογίστε το διάνυσμα $\mathbf{m}^{est}$ που ελαχιστοποιεί τη νόρμα L όταν ισχύει παράλληλα ότι $\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{Gm} = 0$

Καθαρά υπο–ορισμένα προβλήματα

Λύση με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$$

$$L = \mathbf{m}^T \mathbf{m} = \sum_{j=1}^{M} m_j^2$$

Αντικειμενική συνάρτηση $\Phi(m)$

$$\Phi(m) = L + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{M} m_j^2 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left[d_i - \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j \right]$$

λ_i Πολλαπλασιαστές Lagrange

Καθαρά υπο–ορισμένα προβλήματα

Λύση με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange

$$\Phi(m) = L + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{M} m_j^2 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left[d_i - \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j \right]$$

Βήμα 1

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m_q} = \sum_{j=1}^{M} 2 \frac{\partial m_j}{\partial m_q} m_j - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{j=1}^{M} G_{ij} \frac{\partial m_j}{\partial m_q} = 2m_q - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i G_{iq} = 0$$

$$2\mathbf{m} = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} \longrightarrow \mathbf{d} = \mathbf{G}\left[\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} / 2 \right]$$

Βήμα 2

Εάν $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ αντιστρέψιμος $\boldsymbol{\lambda} = 2\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T \right]^{-1} \mathbf{d}$

Καθαρά υπο-ορισμένα προβλήματα

Λύση με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange

$$\Phi(m) = L + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{M} m_j^2 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left[d_i - \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j \right]$$

$$2\mathbf{m} = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} \qquad \boldsymbol{\lambda} = 2\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T\right]^{-1} \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^T \left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T\right]^{-1} \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}^{est} = \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G}\right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}$$

Λύση ελαχίστου μήκους **Λύση ελαχίστων τετραγώνων**

Πολλαπλασιστές Lagrange

Ελαχιστοποίηση της $\boxed{E(x,y)}$ όταν $\boxed{\Phi(x,y)=0}$

$$2x^2+y^2-4x-2y+1 \qquad x+y-1=0$$

Στο ακρότατο της E: $$dE=\frac{\partial E}{\partial x}dx+\frac{\partial E}{\partial y}dy=0$$

Ισχύει πάντα: $$d\Phi=\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy=0$$

λ Πολλαπλασιαστής Lagrange

$$dE+\lambda d\Phi=\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)dy=0$$

Πολλαπλασιστές Lagrange

$$dE + \lambda d\Phi = \left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy = 0$$

Εάν επιλέξουμε λ ώστε $\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0$

τότε και $\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0$

ενώ ισχύει και $\Phi(x, y) = 0$

Σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους x,y,λ

Πολλαπλασιστές Lagrange

Γενίκευση για M αγνώστους **m** και N περιορισμούς Φ(**m**)=0

Σύστημα $M+N$ εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους αφού οι πολλαπλασιαστές Lagrange θα είναι ένας για κάθε περιορισμό Φ(**m**)=0

$$\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial m_j} + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial m_j}\right) = 0, \quad j = 1, \ldots . M$$

$$\Phi_i(\mathbf{m}) = 0, \quad i = 1, \ldots N$$