Διακριτά Αντίστροφα Προβλήματα 2021-2022

Διάλεξη 5

Μεικτά ορισμένα προβλήματα

Μιχάλης Ταρουδάκης

Μεικτά ορισμένα προβλήματα

Εάν σε ένα πείραμα υπολογισμού παραμέτρων από μετρήσεις δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το πρόβλημα ως καθαρά υπο-ορισμένο ή καθαρά υπερ-ορισμένο, μια ιδανική περίπτωση θα ήταν να διαχωριστούν παράμετροι και μετρήσεις ώστε να προκύψουν δύο διακριτά προβλήματα

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{G'm'} = \mathbf{d'}$$

$$\mathbf{G'} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{o} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{u} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G}^{o}$ Πίνακας υπερ-ορισμένου προβλήματος

$\mathbf{G}^{u}$ Πίνακας υπο-ορισμένου προβλήματος

Μεικτά ορισμένα προβλήματα

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{G'm'} = \mathbf{d'}$$

$$\mathbf{G'} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{G}^o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}^o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}^o \\ \mathbf{m}^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^o \\ \mathbf{d}^u \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G}^o\mathbf{m}^o = \mathbf{d}^o$ Λύση ελαχίστων τετραγώνων

$\mathbf{G}^u\mathbf{m}^u = \mathbf{d}^u$ Λύση ελαχίστου μήκους

Μεικτά ορισμένα προβλήματα

Μία πιθανή αντιμετώπιση για μη έντονα υπο-ορισμένο πρόβλημα

$$\Phi(\mathbf{m}) = E + \varepsilon^2 L = \mathbf{e}^T\mathbf{e} + \varepsilon^2 \mathbf{m}^T\mathbf{m}$$

ε^2 μεγάλο : Θα έχομε εκτιμήσεις που θα ενισχύουν το υπο-ορισμένο τμήμα του προβλήματος

Αυτό δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι θα ελαχιστοποιεί το λάθος πρόβλεψης E

ε^2 μικρό : Θα έχομε εκτιμήσεις που θα ενισχύουν το υπερ-ορισμένο τμήμα του προβλήματος αλλά δεν θα λαμβάνουν υπ' όψιν περιορισμούς για τις παραμέτρους.

Μεικτά ορισμένα προβλήματα

$$\Phi(\mathbf{m}) = E + \varepsilon^2 L = \mathbf{e}^T\mathbf{e} + \varepsilon^2\mathbf{m}^T\mathbf{m}$$

Εάν υπάρχει δυνατότητα να βρεθεί ένα ε που θα ικανοποιεί και τις δύο ακραίες απαιτήσεις, η λύση που θα καταλήγαμε θα ήταν

$$\mathbf{m}^{est} = [\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \varepsilon^2\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

Η λύση αυτή ονομάζεται **λύση ελαχίστων τετραγώνων με απόσβεση** *(damped least square solution)* μια και μέσω του ε, έχει «αποσβεσθεί» η επίδραση του υπο-ορισμένου τμήματος του προβλήματος.

Ζυγισμένες Μετρικές Μήκους

Η απαίτηση για ελάχιστο μήκος δεν είναι πάντα ρεαλιστική

Θα μπορούσε να αντικατασταθεί με την απαίτηση η λύση να διαφέρει όσο το δυνατόν λιγότερο από κάποιες «μέσες» τιμές των ζητούμενων παραμέτρων που είναι γνωστές εκ προοιμίου (a-priori)

$$L' = \left(\left(\mathbf{m} - \langle \mathbf{m} \rangle \right)^{T} \left(\mathbf{m} - \langle \mathbf{m} \rangle \right) \right)$$

Μία άλλη λογική είναι να απαιτήσουμε οι παράμετροι να διαφέρουν λίγο μεταξύ τους μια και μπορεί να αναφέρονται σε ιδιότητες γειτονικών στοιχείων ενός συνεχούς μέσου.

Ζυγισμένες Μετρικές Μήκους

Για συνεχείς συναρτήσεις π.χ. της απόστασης, η έννοια της ομαλότητας δίδεται μέσω της παραγώγου.

Για διακριτές συναρτήσεις η έννοια αυτή δίδεται μέσω της διαφοράς ανάμεσα σε δύο στοιχεία της συνάρτησης (διαφορά πρώτης τάξης) ή μέσω της πεπερασμένης διαφοράς τριών στοιχείων (διαφορά δεύτερης τάξης)

$$m(x_{j+1}) = m(x_j) + h\frac{dm}{dx}(x_j) + O(h^2)$$

1η τάξη

$$m(x_{j+1}) \downarrow m_{j+1} \qquad m(x_j) \downarrow m_j$$

$$\frac{dm}{dx}(x_j) \simeq \frac{m_{j+1} - m_j}{h} = \frac{\delta_1 m}{h} \qquad \delta_1 m = m_{j+1} - m_j$$

Ζυγισμένες Μετρικές Μήκους

$$m(x_{j+1}) = m(x_j) + h\frac{dm}{dx}(x_j) + \frac{1}{2}h^2\frac{dm^2}{dx^2}(x_j) + \frac{1}{3!}h^2\frac{dm^3}{dx^3}(x_j) + O(h^4)$$

$$m(x_{j-1}) = m(x_j) - h\frac{dm}{dx}(x_j) + \frac{1}{2}h^2\frac{dm^2}{dx^2}(x_j) - \frac{1}{3!}h^2\frac{dm^3}{dx^3}(x_j) + O(h^4)$$

$$\frac{dm^2}{dx^2}(x_j) \simeq \frac{m(x_{j-1}) - 2m(x_j) + m(x_{j+1})}{h^2} = \frac{\delta_2 m}{h^2}$$

$$\delta_2 m = m_{j-1} - 2m_j + m_{j+1}$$

Ζυγισμένες Μετρικές Μήκους

$$\delta_1 m = m_{j+1} - m_j$$

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & . & . & & & & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & . & & & & \\ & & . & . & . & . & & & \\ & & & . & . & . & . & & \\ & & & & & . & . & . & 0 \\ & & & & & . & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ . \\ . \\ . \\ m_M \end{bmatrix} = \mathbf{D}_1 \mathbf{m}$$

$\mathbf{D}_1$ Πίνακας ομαλότητας

$$\delta_2 m = m_{j-1} - 2m_j + m_{j+1}$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & . & & & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & & & \\ & & . & . & . & . & & & \\ & & & . & . & . & . & & \\ & & & & & . & . & . & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ . \\ . \\ . \\ m_M \end{bmatrix} = \mathbf{D}_2 \mathbf{m}$$

Ζυγισμένες Μετρικές Μήκους

Νέα μετρική μήκους που λαμβάνει υπ' όψιν την ομαλότητα

$$L^w = \mathbf{I}_k{}^T \mathbf{I}_k = \left[\mathbf{D}_k \mathbf{m}\right]^T \left[\mathbf{D}_k \mathbf{m}\right] = \mathbf{m}^T \mathbf{D}_k{}^T \mathbf{D}_k \mathbf{m} = \mathbf{m}^T \mathbf{W}_{mk} \mathbf{m}, \quad k = 1, 2$$

$\mathbf{W}_{mk}$ Παράγοντας (πίνακας) ζύγισης

$L^w = \mathbf{m}^T \mathbf{W}_{mk} \mathbf{m}$ Δεν είναι κανονική νόρμα

Ελαχιστοποιώντας την μπορεί να μην παίρνομε μοναδικές λύσεις

Ζυγισμένες Μετρικές Μήκους

$$\mathbf{W}_{mk} \to \mathbf{W}_m, \quad \mathbf{D}_k \to \mathbf{D}$$

$$\mathbf{W}_m = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$$ Πίνακας ζύγισης

Νέα αντικειμενική συνάρτηση

$$L^{'w} = \left(\left(\mathbf{m} - \langle \mathbf{m} \rangle \right)^T \mathbf{W}_m \left(\mathbf{m} - \langle \mathbf{m} \rangle \right) \right)$$

Μέτρηση απλότητας

Ζυγισμένες Μετρικές Λάθους

Ζύγιση σε ελαχιστοποίηση λάθους : Όταν κάποιες μετρήσεις έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα νε είναι σωστές σε σχέση με κάποιες άλλες

$\mathbf{W}_e$ Πίνακας ζύγισης

Ζητάμε ελαχιστοποίηση του ζυγισμένου λάθους $E^w = \mathbf{e}^T \mathbf{W}_e \mathbf{e}$

Συνήθως ο πίνακας $\mathbf{W}_e$ είναι διαγώνιος

π.χ. $\mathrm{diag}\left(\mathbf{W}_e\right) = \left[1,1,3,1,1\right]$

Ζυγισμένες Μετρικές Λάθους

Λύση ελαχίστων τετραγώνων

Καθαρά υπερ-ορισμένο πρόβλημα

$$E^{w} = \mathbf{e}^{T}\mathbf{W}_{e}\mathbf{e}$$

$$\mathbf{m}^{est} = \left[\mathbf{G}^{T}\mathbf{W}_{e}\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^{T}\mathbf{W}_{e}\mathbf{d}$$

Μη ζυγισμένη λύση $\mathbf{m}^{est} = \left[\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^{T}\mathbf{d}$

Ζυγισμένες Μετρικές Μήκους

Λύση ελαχίστου μήκους με a-priori πληροφορία

Καθαρά υπο-ορισμένο πρόβλημα

Μετρική *L’* με ζύγιση $L'^{w} = \left((\mathbf{m} - \langle \mathbf{m} \rangle)^{T} \mathbf{W}_{m} (\mathbf{m} - \langle \mathbf{m} \rangle) \right)$

$$\mathbf{m}^{est} = \langle \mathbf{m} \rangle + \mathbf{W}_{m} \mathbf{G}^{T} \left[\mathbf{G} \mathbf{W}_{m} \mathbf{G}^{T} \right]^{-1} \left[\mathbf{d} - \mathbf{G} \langle \mathbf{m} \rangle \right]$$

Ζυγισμένες Μετρικές Μήκους

Λύση ελαχίστων τετραγώνων με a-priori πληροφορία και απόσβεση

Μεικτό πρόβλημα συνήθως ελαφρά υπο-ορισμένο

$$\Phi' = E^{w} + \varepsilon^{2} L'^{w}$$

$$\mathbf{m}^{est} = \langle \mathbf{m} \rangle + \left[\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \mathbf{W}_{e} \mathbf{G} + \varepsilon^{2} \mathbf{W}_{m} \right]^{-1} \mathbf{G} \mathbf{W}_{e}^{T} \left[\mathbf{d} - \mathbf{G} \langle \mathbf{m} \rangle \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{m}^{est} = \langle \mathbf{m} \rangle + \mathbf{W}_{m}^{-1} \mathbf{G}^{T} \left[\mathbf{G} \mathbf{W}_{m}^{-1} \mathbf{G}^{T} + \varepsilon^{2} \mathbf{W}_{e}^{-1} \right]^{-1} \left[\mathbf{d} - \mathbf{G} \langle \mathbf{m} \rangle \right]$$

Υπάρχουν οι αντίστροφοι ;

Αλλοι τύποι a-priori πληροφορίας

Υλοποιούνται μέσω εκφράσεων της μορφής **Fm = h**

Μέσος όρος παραμέτρων = h_1

$$\mathbf{Fm} = \frac{1}{M}\begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ . \\ . \\ . \\ m_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \end{bmatrix} = \mathbf{h}$$

Η παράμετρος m_j παίρνει την τιμή h_1

$$\mathbf{Fm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & 1 & . & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ . \\ m_j \\ . \\ m_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \end{bmatrix} = \mathbf{h}$$

Αλλοι τύποι a-priori πληροφορίας

$$\mathbf{Gm = d}$$

Πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων με πρόσθετη πληροφορία για τις σχέσεις των παραμέτρων μεταξύ τους

Για γραμμική σχέση της μορφής $\mathbf{Fm = h}$

Πιθανή λύση η προσθήκη των περιορισμών ως νέες εξισώσεις του συστήματος και αναπροσαρμογή του πίνακα βάρους προκειμένου να δίνει μεγάλη βαρύτητα στους περιορισμούς

Αλλοι τύποι a-priori πληροφορίας

$$\mathbf{Fm} = \mathbf{h} \qquad \mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

Παράδειγμα λύσης με πολλαπλασιαστές Lagrange

Ελαχιστοποίηση του $E = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$ με τον περιορισμό $\mathbf{Fm} = \mathbf{h}$

$$\mathbf{\Phi(m)} = \sum_{i=1}^{N} \left[d_i - \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j \right]^2 + 2 \sum_{i=1}^{p} \lambda_\iota \left[\sum_{j=1}^{M} F_{ij} m_j - h \right]$$

p περιορισμούς

Αλλοι τύποι a-priori πληροφορίας

$$\mathbf{\Phi(m)} = \sum_{i=1}^{N}\left[d_i - \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j\right]^2 + 2\sum_{i=1}^{p} \lambda_\iota \left[\sum_{j=1}^{M} F_{ij} m_j - h\right]$$

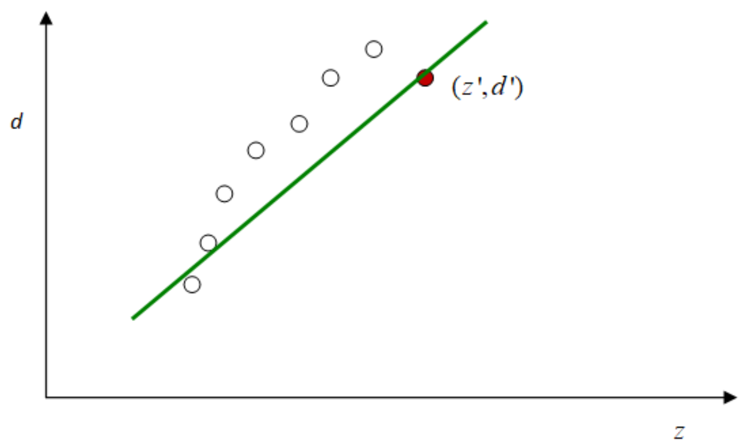
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi(m)}}{\partial m_q} = 2\sum_{i=1}^{M} m_i \sum_{j=1}^{N} G_{jq} G_{ji} - 2\sum_{i=1}^{N} G_{iq} d_i + 2\sum_{i=1}^{p} \lambda_\iota F_{iq} = 0, \quad q = 1, \dots M$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}^T\mathbf{G} & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T\mathbf{d} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$y = m_1 + m_2 z$$



(z',d') Απαίτηση ἀκρίβειας

$$d' = m_1 + m_2 z'$$

$$\mathbf{Fm} = [1 \quad z'] \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = [d'] = h$$

Υπολογισμός εξίσωσης ευθείας όταν απαιτούμε αυτή να περάσει από συγκεκριμένο σημείο

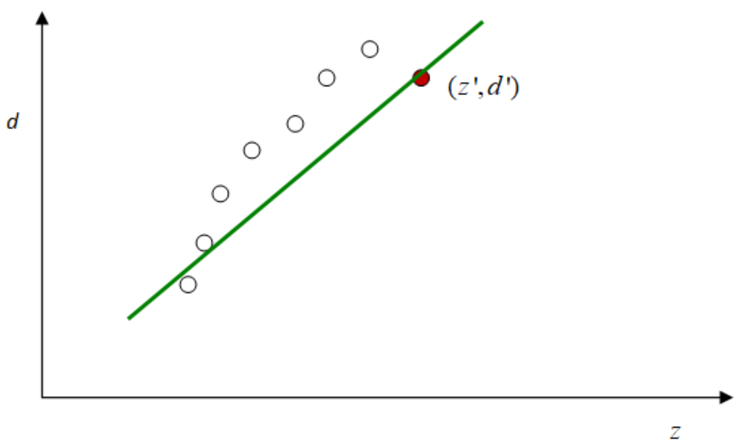
Στο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

$$\begin{bmatrix} N & \Sigma z_i \\ \Sigma z_i & \Sigma z_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma d_i \\ \Sigma z_i d_i \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}^T\mathbf{G} & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T\mathbf{d} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} m_1^{est} \\ m_2^{est} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \Sigma z_i & 1 \\ \Sigma z_i & \Sigma z_i^2 & z' \\ 1 & z' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma d_i \\ \Sigma z_i d_i \\ d' \end{bmatrix}$$

Υπάρχουν και περιορισμοί ανισότητας π.χ. $\mathbf{Fm} \geq \mathbf{h}$

Πίνακας συνδιακύμανσης των παραμέτρων

Οι παράμετροι υπολογίζονται με σχέσεις της μορφής $\mathbf{m}^{est} = \mathbf{M}\mathbf{d} + \mathbf{v}$

Στόχος : Να συνδυάσουμε πληροφορία για τα στατιστικά χαρακτηριστικά των μετρήσεων με αντίστοιχα των προς ανάκτηση παραμέτρων

Εάν γνωρίζομε τον πίνακα συνδιακύμανσης των μετρήσεων $[\operatorname{cov}\mathbf{m}] = \mathbf{M}[\operatorname{cov}\mathbf{d}]\mathbf{M}^T$

Πίνακας συνδιακύμανσης των παραμέτρων

Εάν π.χ. τα δεδομένα μας είναι ασυσχέτιστα και έχουν όλα την ίδια διακύμανση σ_d^2

Λύση ελαχίστων τετραγώνων $\quad \mathbf{m}^{est} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{M}\mathbf{d} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{M} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T \qquad \left[\operatorname{cov}\mathbf{m}\right] = \mathbf{M}\left[\operatorname{cov}\mathbf{d}\right]\mathbf{M}^T$$

$$\left[\operatorname{cov}\mathbf{d}\right] = \sigma_d^2\mathbf{I}$$

$$[\operatorname{cov}\mathbf{m}] = [[\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T]\sigma_d^2\mathbf{I}[[\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T]^T = \sigma_d^2[\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1}$$

Πίνακας συνδιακύμανσης των παραμέτρων

Λύση ελαχίστου μήκους $\quad \mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{T}\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^{T}\right]^{-1}\mathbf{d}$

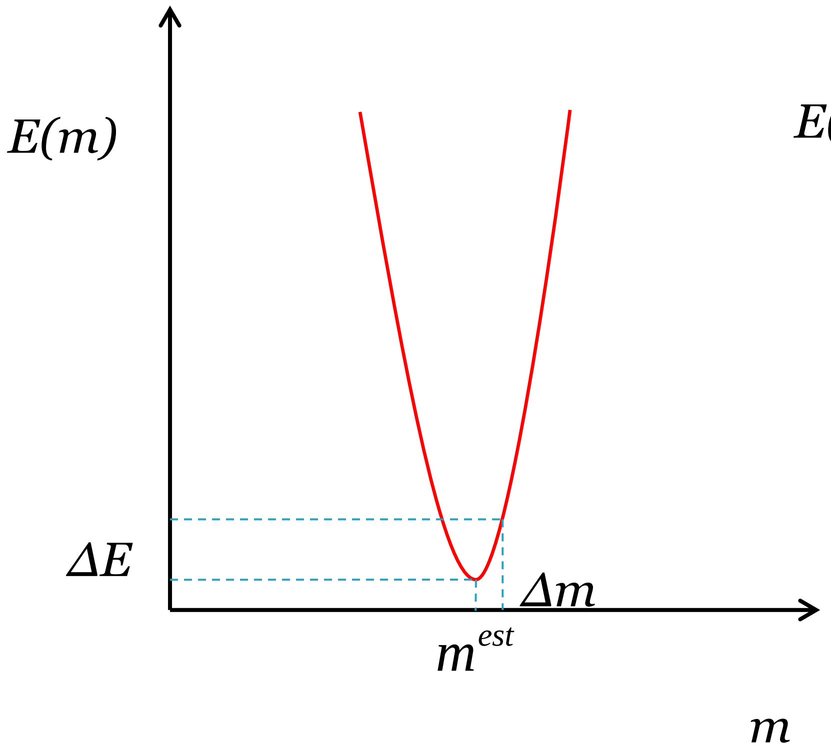
$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{M}\mathbf{d} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{M} = \mathbf{G}^{T}\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^{T}\right]^{-1} \qquad [\operatorname{cov}\mathbf{m}] = \mathbf{M}[\operatorname{cov}\mathbf{d}]\mathbf{M}^{T}$

$$\left[\operatorname{cov}\mathbf{d}\right] = \sigma_d^2\mathbf{I}$$

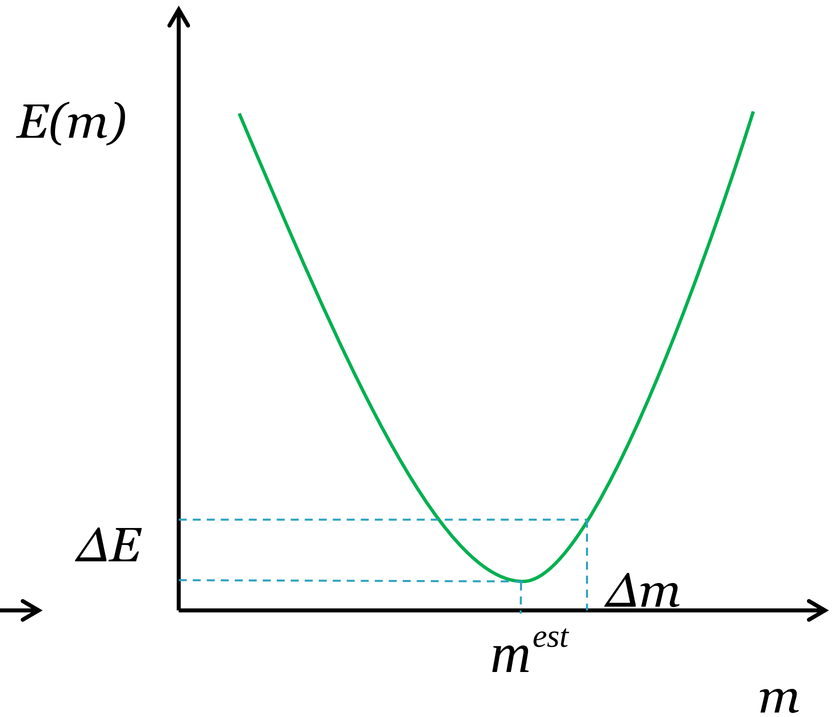
$$[\operatorname{cov}\mathbf{m}] = [\mathbf{G}^{T}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{T}]^{-1}]\sigma_d^2\mathbf{I}[\mathbf{G}^{T}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{T}]^{-1}]^{T} = \sigma_d^2\mathbf{G}^{T}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{T}]^{-1}\mathbf{G}$$

Λύση ελαχίστων τετραγώνων

$$E(\mathbf{m}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$



Η καμπύλη του λάθους έχει στενό άνοιγμα



Η καμπύλη του λάθους έχει πλατύ άνοιγμα

Λύση ελαχίστων τετραγώνων

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \nabla f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \ldots.$$

$H_f(\mathbf{a})$ Hessian πίνακας

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$$

Λύση ελαχίστων τετραγώνων

Ανάπτυγμα Taylor   Προσέγγιση 1ης τάξης

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \nabla f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \ldots.$$

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \nabla f + \frac{1}{2!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \ldots.$$

$$\mathbf{x} \to \mathbf{m} \qquad \mathbf{a} \to \mathbf{m}^{est}$$

$$\Delta E = E(\mathbf{m}) - E(\mathbf{m}^{est}) \simeq \left[\mathbf{m} - \mathbf{m}^{est}\right]^T \nabla E\big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}} +$$

$$+\left[\mathbf{m} - \mathbf{m}^{est}\right]^T H_E\big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}} \left[\mathbf{m} - \mathbf{m}^{est}\right]$$

Λύση ελαχίστων τετραγώνων

Ανάπτυγμα Taylor

Προσέγγιση 1ης τάξης

$$H_E\Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}} = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2}\right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}}$$

$$\nabla E\Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{m}}\Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}} = 0$$

$$\Delta E = E(\mathbf{m}) - E(\mathbf{m}^{est}) \simeq \left[\mathbf{m}-\mathbf{m}^{est}\right]^T \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2}\right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}} \left[\mathbf{m}-\mathbf{m}^{est}\right]$$

$$E(\mathbf{m}) = \mathbf{e}^T\mathbf{e} = \left[\mathbf{d}-\mathbf{G}\mathbf{m}\right]^T\left[\mathbf{d}-\mathbf{G}\mathbf{m}\right]$$

$$\mathbf{m}^{est} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

Λύση ελαχίστων τετραγώνων

$$\Delta E = E(\mathbf{m}) - E(\mathbf{m}^{est}) \simeq \left[\mathbf{m} - \mathbf{m}^{est}\right]^T \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2}\right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}} \left[\mathbf{m} - \mathbf{m}^{est}\right]$$

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2}\right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{m}^2}\left[\left(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}\right)^T \left(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} 2\left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{G}^T\mathbf{d}\right] = \mathbf{G}^T\mathbf{G}$$

$$[\mathrm{cov}\,\mathbf{m}] = \sigma_d^2[\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1} = \sigma_d^2\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2}\right]^{-1}_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}}$$