Διακριτά Αντίστροφα Προβλήματα
2021-2022

Διάλεξη 6

Γενικευμένοι Αντίστροφοι Πίνακες

Μιχάλης Ταρουδάκης

Γενικευμένοι Αντίστροφοι

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{Md} + \mathbf{v}$$

M και **v** ανεξάρτητοι από τις μετρήσεις

Για ένα καλώς τεθειμένο πρόβλημα

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d} \longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$$

Υπάρχει μια σχετική αντιστοιχία

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d} \longrightarrow \mathbf{m}^{est} = \mathbf{Md} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{G}^{-g}$$ Γενικευμένος αντίστροφος

Γενικευμένοι Αντίστροφοι

Λύση ελαχίστων τετραγώνων

$$\mathbf{m}^{est} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d} \qquad \mathbf{G}^{-g} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T = \mathbf{M}$$

Λύση ελαχίστου μήκους

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^T\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T\right]^{-1}\mathbf{d} \qquad \mathbf{G}^{-g} = \mathbf{G}^T\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T\right]^{-1} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{M}\mathbf{d} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = 0$$

Πίνακας ανάλυσης δεδομένων

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}$$ (Θα υποθέσουμε για απλότητα ότι **v**=0)

$$\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d}^{obs}$$

Λύνοντας το ευθύ πρόβλημα

$$\mathbf{d}^{pre} = \mathbf{Gm}^{est} = \mathbf{G}[\mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}^{obs}] = [\mathbf{GG}^{-g}]\mathbf{d}^{obs} = \mathbf{Nd}^{obs}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{GG}^{-g}$$ Πίνακας NxN

Πίνακας ανάλυσης δεδομένων

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} \Longrightarrow \mathbf{d}^{pre} = \mathbf{d}^{obs}$$

Πίνακας ανάλυσης δεδομένων

Έστω ότι μία σειρά i του πίνακα **N** έχει τη μορφή

$$\left[\cdots 0\ 0\ 0\ 0.1\ 0.8\ 0.1\ 0\ 0 \cdots\right]$$

όπου 0.8 αντιστοιχεί στο στοιχείο N_{ii}

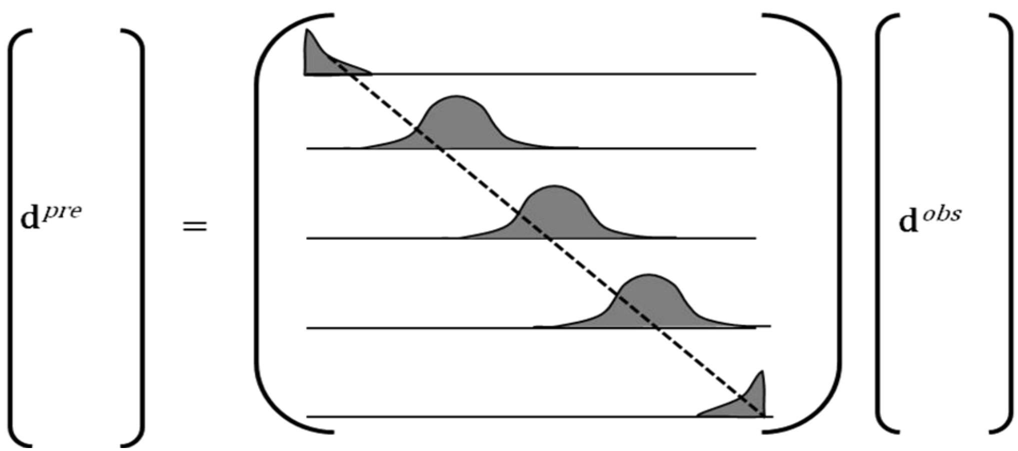
$$d_i^{pre} = \sum_{j=1}^{N} N_{ij} d_j^{obs} = 0.1 d_{i-1}^{obs} + 0.8 d_i^{obs} + 0.1 d_{i+1}^{obs}$$

Οι γραμμές του πίνακα ανάλυσης δεδομένων περιγράφουν πόσο καλά μπορούν να ανακτηθούν συγκεκριμένα δεδομένα σε σχέση με γειτονικές μετρήσεις

Πίνακας ανάλυσης δεδομένων

$$d_i^{pre} = \sum_{j=1}^{N} N_{ij} d_j^{obs}$$

(A)



Ο πίνακας ανάλυσης δεδομένων εξαρτάται από τη διαδικασία μέτρησης και όχι από τις μετρήσεις

$$\hat{\mathbf{d}} = diag(\mathbf{N})$$ Σημαντικότητα μετρήσεων

Πίνακας ανάλυσης παραμέτρων

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

Έστω ότι υπάρχει m^{true} $\mathbf{Gm}^{true} = \mathbf{d}^{obs}$

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}^{obs} = \mathbf{G}^{-g}[\mathbf{Gm}^{true}] = [\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}]\mathbf{m}^{true} = \mathbf{Rm}^{true}$$

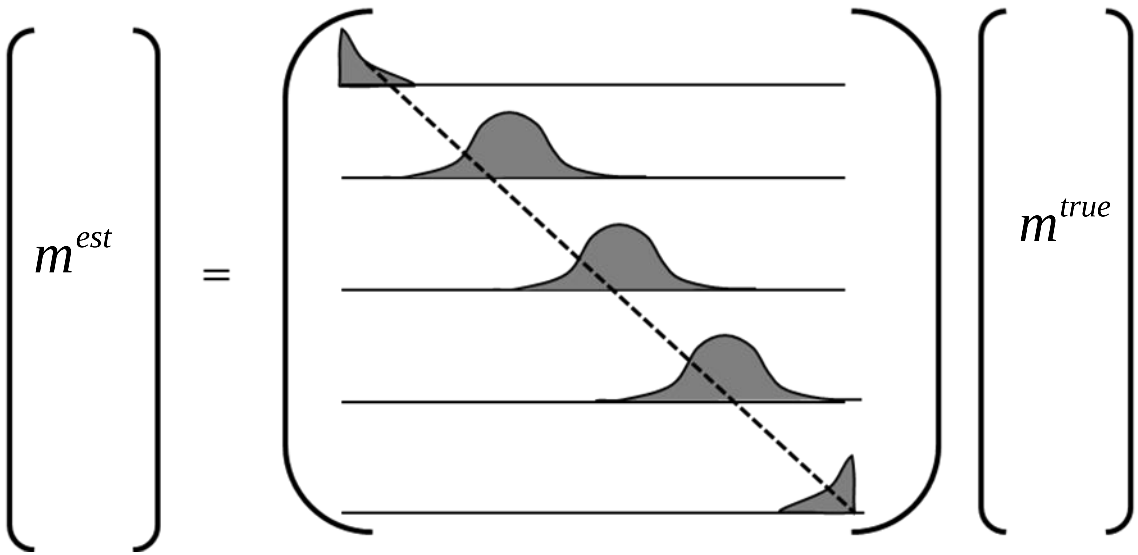
$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}$$ Πίνακας MxM

Πίνακας ανάλυσης παραμέτρων

$\mathbf{R} = \mathbf{I} \Longrightarrow \mathbf{m}^{est} = \mathbf{m}^{true}$

Πίνακας ανάλυσης παραμέτρων

Για **R** ≠**I** οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι ζυγισμένες μέσες τιμές γειτονικών πραγματικών παραμέτρων



Ο πίνακας ανάλυσης παραμέτρων δεν εξαρτάται από τις παραμέτρους αλλά μόνο από τυχόν εκ προοιμίου πληροφορίες

Μοναδιαίος πίνακας συνδιακύμανσης

Συσχέτιση στατιστικών χαρακτηριστικών μετρήσεων με τις προς ανάκτηση παραμέτρους

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{d} + \mathbf{v}$$

$$[\operatorname{cov} \mathbf{m}] = \mathbf{M}[\operatorname{cov} \mathbf{d}]\mathbf{M}^{T}$$

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}$$

$$[\operatorname{cov} \mathbf{m}] = \mathbf{G}^{-g}[\operatorname{cov} \mathbf{d}]\mathbf{G}^{-gT}$$

Μοναδιαίος πίνακας συνδιακύμανσης

Θεωρούμε ίση διακύμανση ${\sigma_d}^2$ για όλες τις μετρήσεις , με τις μετρήσεις ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

$$[\operatorname{cov}\mathbf{m}] = \mathbf{G}^{-g}[\operatorname{cov}\mathbf{d}]\mathbf{G}^{-gT}$$

$$[\operatorname{cov}\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_d^2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \sigma_d^2 \end{bmatrix}$$

$$[\operatorname{cov}_u \mathbf{m}] = {\sigma_d}^{-2}\mathbf{G}^{-g}[\operatorname{cov}\mathbf{d}]\mathbf{G}^{-gT} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}^{-gT}$$

Μοναδιαίος πίνακας συνδιακύμανσης

Γενικά για συσχετιζόμενες μεταξύ τους μετρήσεις

$$[\operatorname{cov}_u \mathbf{m}] = \mathbf{G}^{-g}[\operatorname{cov}_u \mathbf{d}]\mathbf{G}^{-gT}$$

Λύση Ελαχίστων Τετραγώνων

Θα υποθέσουμε για απλότητα $[\mathrm{cov}_u\,\mathbf{d}] = \mathbf{I}$

Γενικευμένος αντίστροφος $\mathbf{G}^{-g} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T$

Πίνακας ανάλυσης μετρήσεων $\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{G}^{-g} = \mathbf{G}\left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T$

Πίνακας ανάλυσης παραμέτρων $\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{G} = \mathbf{I}$

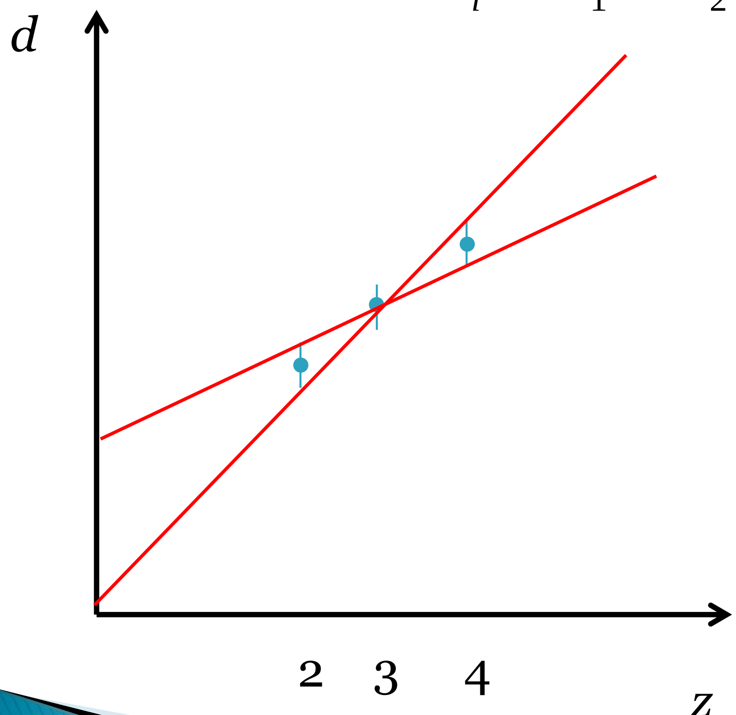
$$[\mathrm{cov}_u\,\mathbf{m}] = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}^{-gT} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{G}\left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}$$

Στη λύση ελαχίστων τετραγώνων οι παράμετροι ανακτώνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη

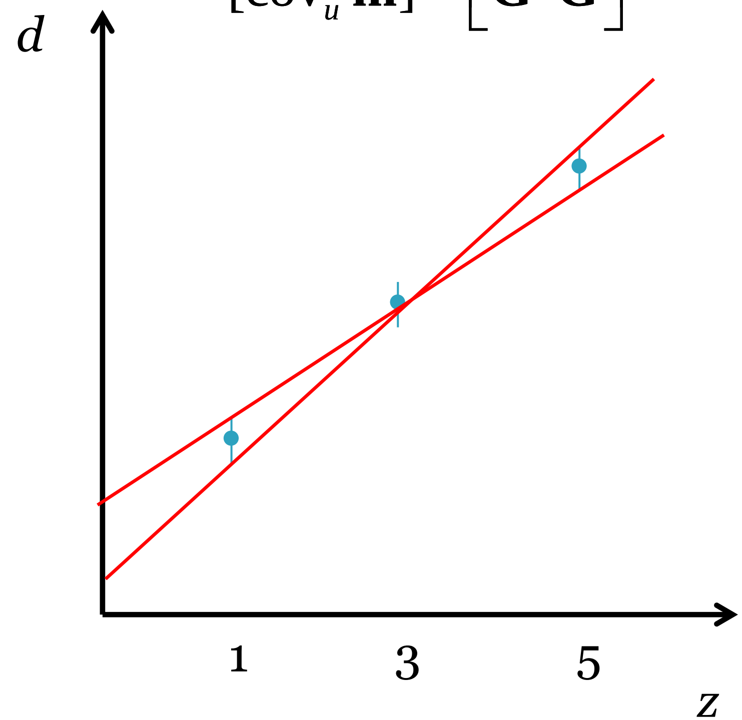
Μοναδιαίος πίνακας συνδιακύμανσης

Παράδειγμα σε πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων

$$d_i = m_1 + m_2 z_i$$



$$[\mathrm{cov}_u\, \mathbf{m}] = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}$$



Μοναδιαίος πίνακας συνδιακύμανσης

$$\left[\mathbf{G}^T\mathbf{d}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} N & \Sigma z_i \\ \Sigma z_i & \Sigma z_i^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{N\Sigma z_i^2 - \left(\Sigma z_i\right)^2} \begin{bmatrix} \Sigma z_i^2 & -\Sigma z_i \\ -\Sigma z_i & N \end{bmatrix}$$

Έστω μετρήσεις στα σημεία 2,3,4 και 1,3,5 αντίστοιχα

1η περίπτωση $[\mathrm{cov}_u\,\mathbf{m}] = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 4.83 & -1.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

2η περίπτωση $[\mathrm{cov}_u\,\mathbf{m}] = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1.46 & -0.375 \\ -0.375 & 0.125 \end{bmatrix}$

Λύση Ελαχίστου Μήκους

$$[\mathrm{cov}_u\,\mathbf{d}] = \mathbf{I}$$

Γενικευμένος αντίστροφος $\quad \mathbf{G}^{-g} = \mathbf{G}^T\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T\right]^{-1}$

Πίνακας ανάλυσης μετρήσεων $\quad \mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{G}^{-g} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T\right]^{-1} = \mathbf{I}$

Πίνακας ανάλυσης παραμέτρων $\quad \mathbf{R} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G} = \mathbf{G}^T\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T\right]^{-1}\mathbf{G}$

$$[\mathrm{cov}_u\,\mathbf{m}] = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}^{-gT} = \mathbf{G}^T\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T\right]^{-1}\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T\right]^{-1}\mathbf{G}^T = \mathbf{G}^T\left(\left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\right)^2\mathbf{G}$$

Στη λύση ελαχίστου μήκους οι μετρήσεις επιβεβαιώνονται από τα αποτελέσματα ανεξάρτητα η μία από την άλλη

Μέτρηση ποιότητας

Βέλτιστη ανάλυση δεδομένων και παραμέτρων όταν **N** ή **R** είναι **I**

$$\text{spread}(\mathbf{N}) = \left\|\mathbf{N} - \mathbf{I}\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}[N_{ij} - I_{ij}]^2$$

$$\text{spread}(\mathbf{R}) = \left\|\mathbf{R} - \mathbf{I}\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}[R_{ij} - I_{ij}]^2$$

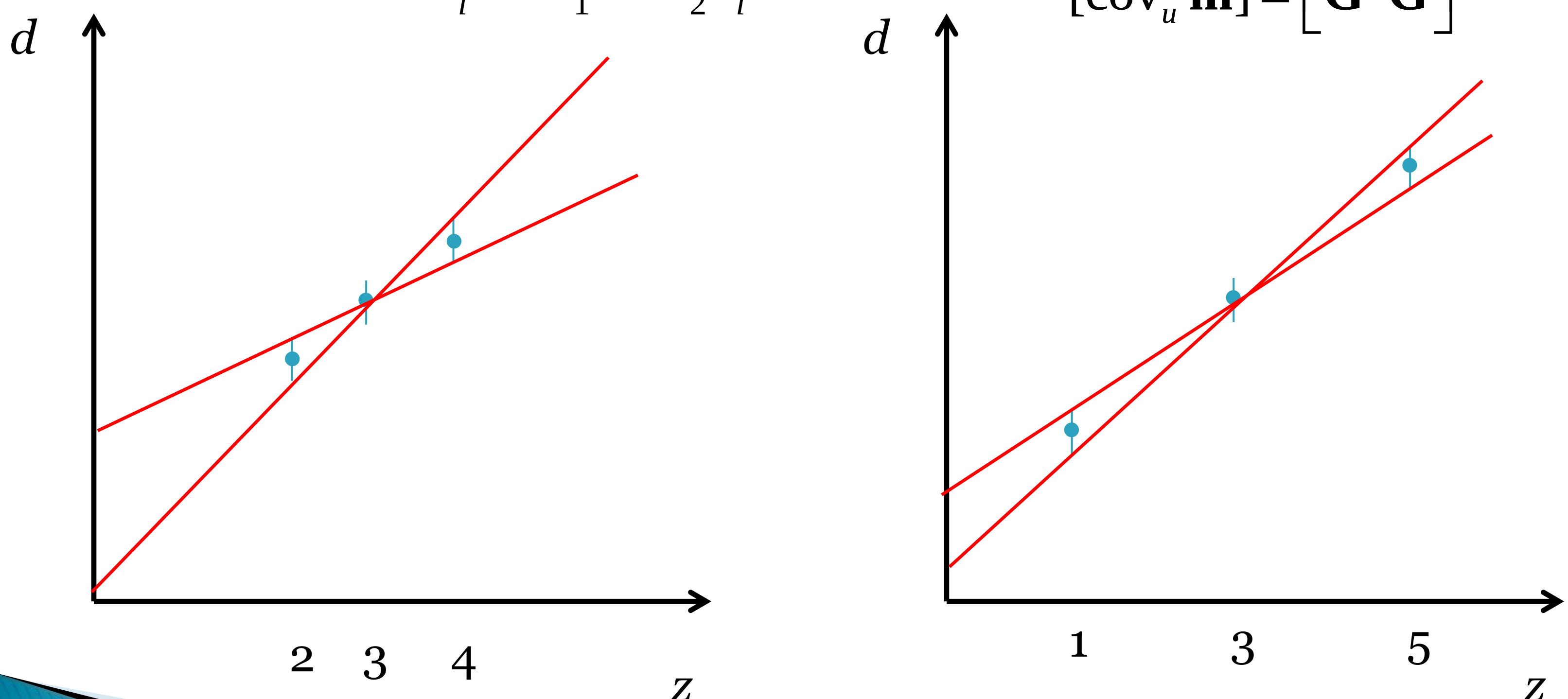
Dirichlet spread functions

$$\text{size}\left(\left[\text{cov}_u\,\mathbf{m}\right]\right) = \left\|[\text{var}_u\,\mathbf{m}]^{1/2}\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{M}[\text{cov}_u\,\mathbf{m}]_{ii}$$

Μοναδιαίος πίνακας συνδιακύμανσης

Παράδειγμα σε πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων

$$d_i = m_1 + m_2 z_i \qquad [\mathrm{cov}_u\, \mathbf{m}] = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}$$



Εξίσωση ευθείας

$$\mathbf{m}^{est} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d} = \begin{bmatrix} N & \Sigma z_i \\ \Sigma z_i & \Sigma z_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ z_1 & z_2 & . & . & . & z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^{-g} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T$$

N=3

$$\mathbf{m}^{est} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 & \Sigma z_i \\ \Sigma z_i & \Sigma z_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^{-g} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T = \frac{1}{3\Sigma z_i^2 - (\Sigma z_i)^2} \begin{bmatrix} \Sigma z_i^2 & -\Sigma z_i \\ -\Sigma z_i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

Εξίσωση ευθείας

$$\mathbf{G}^{-g} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T = \frac{1}{3\Sigma z_i^2 - (\Sigma z_i)^2}\begin{bmatrix} \Sigma z_i^2 & -\Sigma z_i \\ -\Sigma z_i & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = 1,\ z_2 = 2,\ z_3 = 3$$

$$\Sigma z_i = 6 \qquad \Sigma z_i^2 = 14 \qquad \left(\Sigma z_i\right)^2 = 36$$

$$3\Sigma z_i^2 - (\Sigma z_i)^2 = 6$$

$$\mathbf{G}^{-g} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Εξίσωση ευθείας

$$z_1 = 1,\ z_2 = 2,\ z_3 = 3$$

$$\mathbf{G}^{-g} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{G}^{-g} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Εξίσωση ευθείας

$$z_1 = 1,\ z_2 = 2,\ z_3 = 3$$

$$[\mathrm{cov}_u\, \mathbf{m}] = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/6 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{size}(\left[\mathrm{cov}_u\, \mathbf{m}\right]) = \sum_{i=1}^{M} [\mathrm{cov}_u\, \mathbf{m}]_{ii} = \frac{17}{6}$$

Εξίσωση ευθείας

$$\mathbf{G}^{-g} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T = \frac{1}{3\Sigma z_i^2 - (\Sigma z_i)^2}\begin{bmatrix} \Sigma z_i^2 & -\Sigma z_i \\ -\Sigma z_i & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = 1,\ z_2 = 2,\ z_3 = 4$$

$$\Sigma z_i = 7 \qquad \Sigma z_i^2 = 21 \qquad \left(\Sigma z_i\right)^2 = 49$$

$$3\Sigma z_i^2 - (\Sigma z_i)^2 = 14$$

$$\mathbf{G}^{-g} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 21 & -7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Εξίσωση ευθείας

$$z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 4$$

$$\mathbf{G}^{-g} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 21 & -7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{G}^{-g} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ -4 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Εξίσωση ευθείας

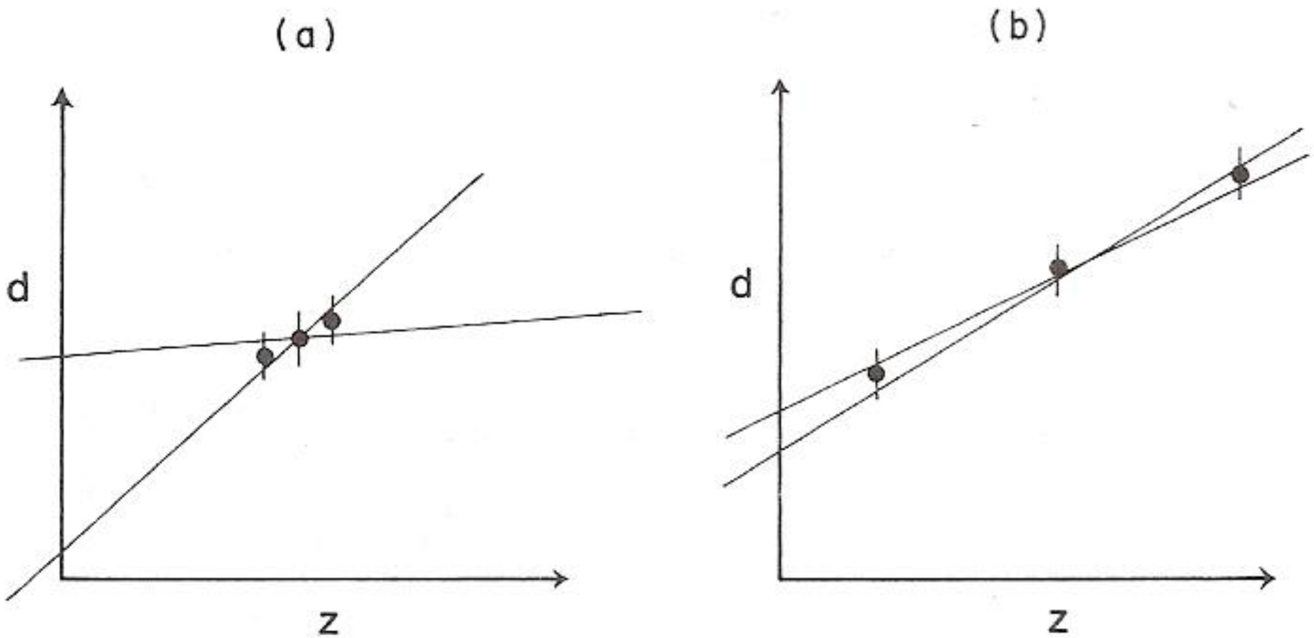
$$z_1 = 1,\ z_2 = 2,\ z_3 = 4$$

$$[\mathrm{cov}_u\,\mathbf{m}] = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 21 & -7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/14 & -(7/14) \\ -(7/14) & 3/14 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{size}(\left[\mathrm{cov}_u\,\mathbf{m}\right]) = \sum_{i=1}^{M}[\mathrm{cov}_u\,\mathbf{m}]_{ii} = \frac{24}{14} < \frac{17}{6}$$

που σημαίνει ουσιαστικά μικρότερο εύρος διακύμανσης των προς εκτίμηση παραμέτρων σε περίπτωση που υπάρχει κάποιο λάθος στις μετρήσεις. Δηλαδή το λάθος στις μετρήσεις όταν οι μετρήσεις είναι σχετικά απομακρυσμένες μεταξύ τους, δίνει μικρότερη πιθανή διακύμανσης παραμέτρων υπολογισμού της ευθείας.

Εξίσωση ευθείας



Εξίσωση ευθείας

Σημεία υπολογισμού	$\text{size}\left(\left[\text{cov}_u\ \mathbf{m}\right]\right)$
1,3,5	1.585
1,2,4	1.714
1,2,3	2.83
2,3,4	5.33

Γενικευμένοι αντίστροφοι και πίνακες ανάλυσης

Χρήση των πινάκων ανάλυσης για επιλογή γενικευμένου αντίστροφου πίνακα

Υπέρ-ορισμένο πρόβλημα Θέλομε $\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}$

Θα υπολογίσουμε τον γενικευμένο αντίστροφο με ελαχιστοποίηση του εύρους του πίνακα ανάλυσης δεδομένων **N**

Παίρνομε το εύρος της k γραμμής του **N**

$$J_k = \sum_{j=1}^{N} [N_{kj} - I_{kj}]^2 = \sum_{j=1}^{N} N_{kj}^2 - 2\sum_{j=1}^{N} N_{kj} I_{kj} + \sum_{j=1}^{N} I_{kj}^2$$

Γενικευμένοι αντίστροφοι και πίνακες ανάλυσης

$$J_k = \sum_{j=1}^{N} [N_{kj} - I_{kj}]^2 = \sum_{j=1}^{N} N_{kj}^2 - 2\sum_{j=1}^{N} N_{kj} I_{kj} + \sum_{j=1}^{N} I_{kj}^2$$

Επειδή όλα τα εύρη είναι θετικά, η ελαχιστοποίηση του εύρους κάθε σειράς οδηγεί σε ελαχιστοποίηση του συνολικού εύρους

Ελαχιστοποιούμε κάθε σειρά χωριστά ως προς τον γενικευμένο αντίστροφο

$$\frac{\partial J_k}{\partial G_{qr}^{-g}} = 0$$

Εισάγουμε τον ορισμό του πίνακα ανάλυσης δεδομένων και υπολογίζουμε την παράγωγο κάθε όρου

Γενικευμένοι αντίστροφοι και πίνακες ανάλυσης

$$J_k = \sum_{j=1}^{N} [N_{kj} - I_{kj}]^2 = \sum_{j=1}^{N} N_{kj}^2 - 2\sum_{j=1}^{N} N_{kj} I_{kj} + \sum_{j=1}^{N} I_{kj}^2 \qquad \frac{\partial J_k}{\partial G_{qr}^{-g}} = 0$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{G}^{-g} \qquad \frac{\partial}{\partial G_{qr}^{-g}} \left(\sum_{j=1}^{N} N_{kj}^2 \right) = \ldots. = 2\sum_{p=1}^{M} G_{pr}^{-g} G_{kp} G_{kp}$$

$$\frac{\partial}{\partial G_{qr}^{-g}} \left(-2\sum_{j=1}^{N} N_{kj} I_{kj} \right) = -2 G_{kq} \delta_{kr}$$

$$\frac{\partial}{\partial G_{qr}^{-g}} \left(\sum_{j=1}^{N} I_{kj}^2 \right) = 0$$

Γενικευμένοι αντίστροφοι και πίνακες ανάλυσης

$$\frac{\partial J_k}{\partial G_{qr}^{-g}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{G}^{-g} = \mathbf{G}^T$$

$$\mathbf{G}^{-g} = \left[\mathbf{G}^T \mathbf{G} \right]^{-1} \mathbf{G}^T$$

Γενικευμένοι αντίστροφοι και πίνακες ανάλυσης

$$\frac{\partial J_k}{\partial G_{qr}^{-g}} = 0$$

Υπερ-ορισμένο πρόβλημα $\quad \mathbf{G}^{-g} = \left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}^T$

Υπο-ορισμένο πρόβλημα $\quad \mathbf{G}^{-g} = \mathbf{G}^T\left[\mathbf{G}\mathbf{G}^T\right]^{-1}$

Μεικτό πρόβλημα : ελαχιστοποίηση

$$\alpha_1 \mathrm{spread}(\mathbf{N}) + a_2 \mathrm{spread}(\mathbf{R}) + a_3 \mathrm{size}\left(\left[\mathrm{cov}_u\, \mathbf{m}\right]\right)$$

$$\Downarrow$$

$$a_1\left[\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right]\mathbf{G}^{-g} + \mathbf{G}^{-g}\left[a_2\mathbf{G}\mathbf{G}^T + a_3\left[\mathrm{cov}_u\, \mathbf{d}\right]\right] = \left[a_1 + a_2\right]\mathbf{G}^T$$