Διακριτά Αντίστροφα Προβλήματα
2021-2022

Διάλεξη 8

Διανυσματικοί χώροι - Μετασχηματισμοί

Μιχάλης Ταρουδάκης

Διανύσματα του μηδενόχωρου

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d} \qquad \mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}$$

$$\mathbf{Gm}_1 = \mathbf{d} \qquad \mathbf{Gm}_2 = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) = 0$$

Η υπόθεση για μηδενόχωρο διάφορο του κενού, για τον πίνακα **G** μας υπενθυμίζει την ανυπαρξία μοναδικής λύσης στο διακριτό αντίστροφο πρόβλημα.

$$\mathbf{m}^{null} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \neq 0$$

Κάθε διακριτό αντίστροφο πρόβλημα που έχει μη μηδενικά διανύσματα στον μηδενόχωρο έχει μη μοναδική λύση.

Διανύσματα του μηδενόχωρου

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) = 0$$

q τάξη του μηδενόχωρου $\quad 0 \le q \le M$

Γενική λύση του αντιστρόφου προβλήματος

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d} \qquad \mathbf{m}^{gen} = \mathbf{m}^{par} + \sum_{i=1}^{q} a_i \mathbf{m}_i^{null}$$

Διανύσματα του μηδενόχωρου

Παράδειγμα : Μέτρηση μέσου όρου

$$\mathbf{Gm} = [\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}] \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = [d]$$

Πίνακας **G** : 1x4

Διάσταση μηδενόχωρου : M-N=4-1=3

$$\mathbf{m}_1^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_2^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_3^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}^{gen} = \mathbf{m}^{par} + \sum_{i=1}^{q} a_i \mathbf{m}_i^{null}$$

$$\mathbf{m}^{gen} = \begin{bmatrix} d \\ d \\ d \\ d \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{m}_i^{null}$$

Διανύσματα του μηδενόχωρου

,

,

Παράδειγμα : Μέτρηση μέσου όρου $\mathbf{Gm} = [\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}]\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = [3]$

$$\mathbf{m}_1^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{m}_2^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{m}_3^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}^{gen} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{m}_i^{null} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Αποδεκτή λύση !

Διανύσματα του μηδενόχωρου

$$\mathbf{Gm} = \left[\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\right]\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = [3]$$

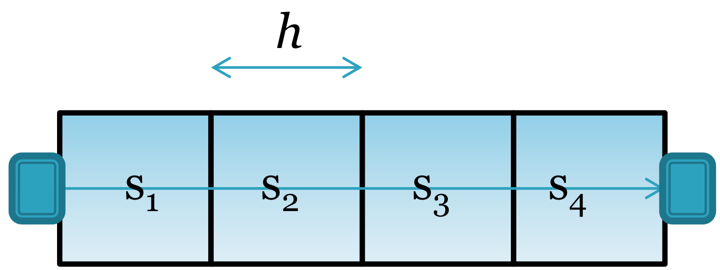
Ελαχιστοποιώντας τη νόρμα $\|\mathbf{m}\|_2 = \sqrt{\sum m_j^2}$ Λύση ελαχίστου μήκους

$$a_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Συνεπώς η λύση ελαχίστου μήκους δεν περιλαμβάνει διανύσματα του μηδενόχωρου του πίνακα **G**

Διανύσματα του μηδενόχωρου

Παράδειγμα 2 :



Κάνομε μία μέτρηση διάδοσης ήχου στην ομάδα των δοκιμίων

Οι άγνωστοί μας είναι οι αντίστροφες τιμές της διάδοσης ήχου σε κάθε δοκίμιο

$$s_i = \frac{1}{c_i}, \quad i = 1, \ldots 4$$

Μοντέλο :

$$d = t = hs_1 + hs_2 + hs_3 + hs_4$$

$$\mathbf{Gm} = [h\ h\ h\ h]\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = [t]$$

Διανύσματα του μηδενόχωρου

$$\mathbf{Gm} = [h\,h\,h\,h]\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = [d]$$

Μ.Ο. Παραμέτρων :

$$m_i = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{4} = \frac{d}{4h}$$

Πίνακας **G** : 1x4

Διάσταση μηδενόχωρου : M-N=4-1=3

$$\mathbf{m}_1^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_2^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_3^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}^{gen} = \mathbf{m}^{par} + \sum_{i=1}^{q} a_i \mathbf{m}_i^{null}$$

$$\mathbf{m}^{gen} = \begin{bmatrix} d/4h \\ d/4h \\ d/4h \\ d/4h \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{m}_i^{null}$$

Διανύσματα του μηδενόχωρου

,

,

$$\mathbf{Gm} = [h\ h\ h\ h]\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = [d]$$

Μ.Ο. Παραμέτρων :

$$m_i = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{4} = \frac{d}{4h}$$

$$\mathbf{m}_1^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_2^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_3^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}^{gen} = \mathbf{m}^{par} + \sum_{i=1}^{q} a_i \mathbf{m}_i^{null}$$

$$\mathbf{m}^{gen} = \begin{bmatrix} d/4h \\ d/4h \\ d/4h \\ d/4h \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{m}_i^{null} = \begin{bmatrix} d/4h \\ d/4h \\ d/4h \\ d/4h \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/4h - 6 \\ d/4h + 1 \\ d/4h + 2 \\ d/4h + 3 \end{bmatrix}$$

Διανύσματα του μηδενόχωρου

,

,

$$\mathbf{Gm} = [h\; h\; h\; h] \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = [d]$$

Λύση ελαχίστου μήκους $\quad \mathbf{m}^{est} = G^T \left[G G^T \right]^{-1} \mathbf{d}$

$$\mathbf{m}^{est} = \begin{bmatrix} 1/4h \\ 1/4h \\ 1/4h \\ 1/4h \end{bmatrix} d$$

Διανύσματα του μηδενόχωρου

,

,

Μπορεί κάποιοι ζυγισμένοι μέσοι των παραμέτρων να μπορούν να υπολογιστούν μοναδικά

$$\langle m \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{m}^{gen} = \mathbf{a}^T \mathbf{m}^{par} + \sum_{i=1}^{q} a_i \mathbf{a}^T \mathbf{m}^{null}$$

$$\alpha_i = 0, i = 1, \ldots q$$

Μερικές φορές το διάνυσμα **a** οδηγεί σε «εντοπισμένους μέσους (localized averages)

$$\mathbf{a} = \left[0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0 \right]^T$$

Δεν ισχύει στο παράδειγμά μας

$$\mathbf{a} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]^T$$

Διανυσματικοί χώροι

$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$ $\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}$

Χώρος Δεδομένων $S(\mathbf{d})$

Χώρος Παραμέτρων $S(\mathbf{m})$

Μετασχηματισμός από χώρο δεδομένων σε χώρο παραμέτρων

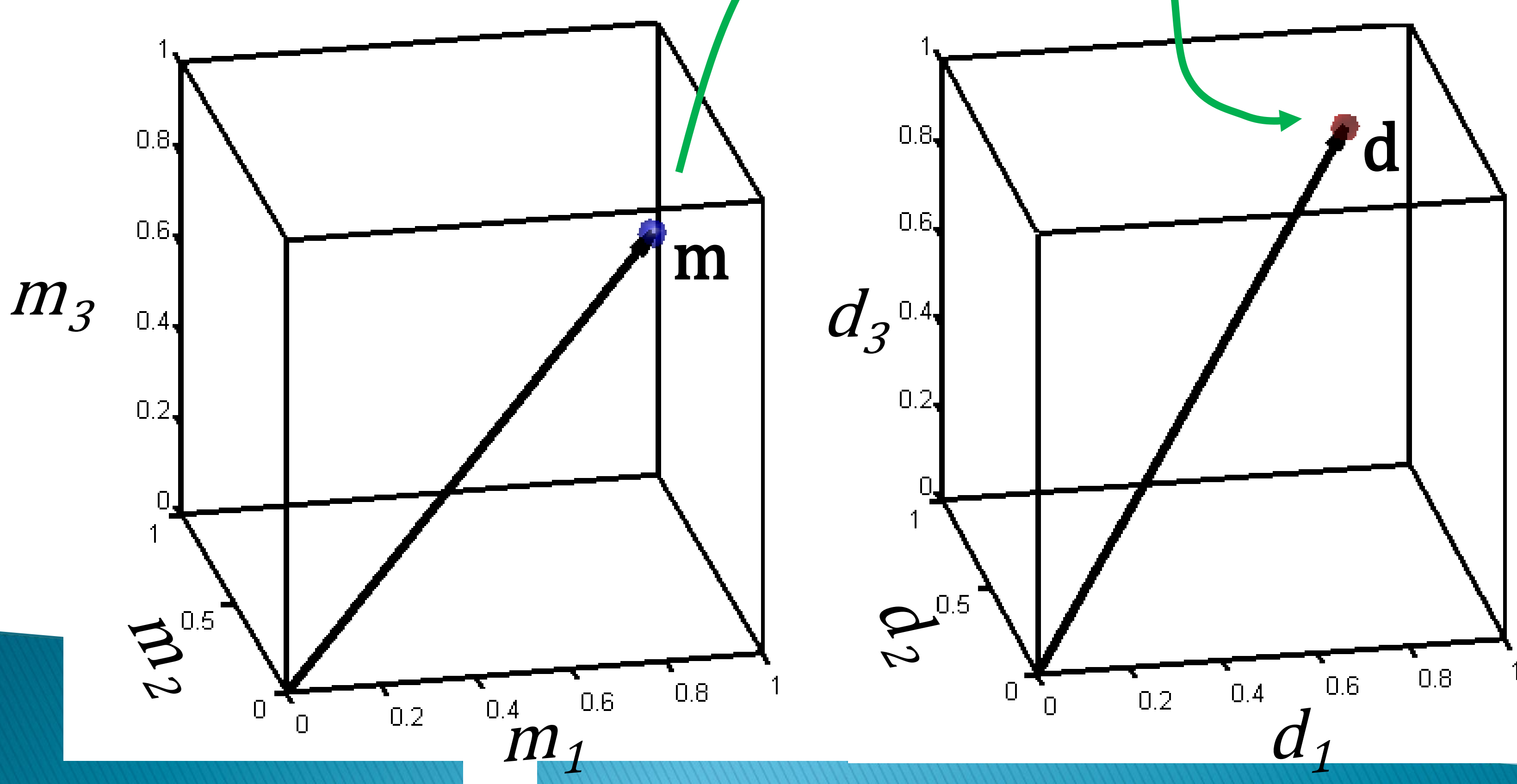
$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}$$

Μετασχηματισμός από χώρο παραμέτρων σε χώρο μετρήσεων

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

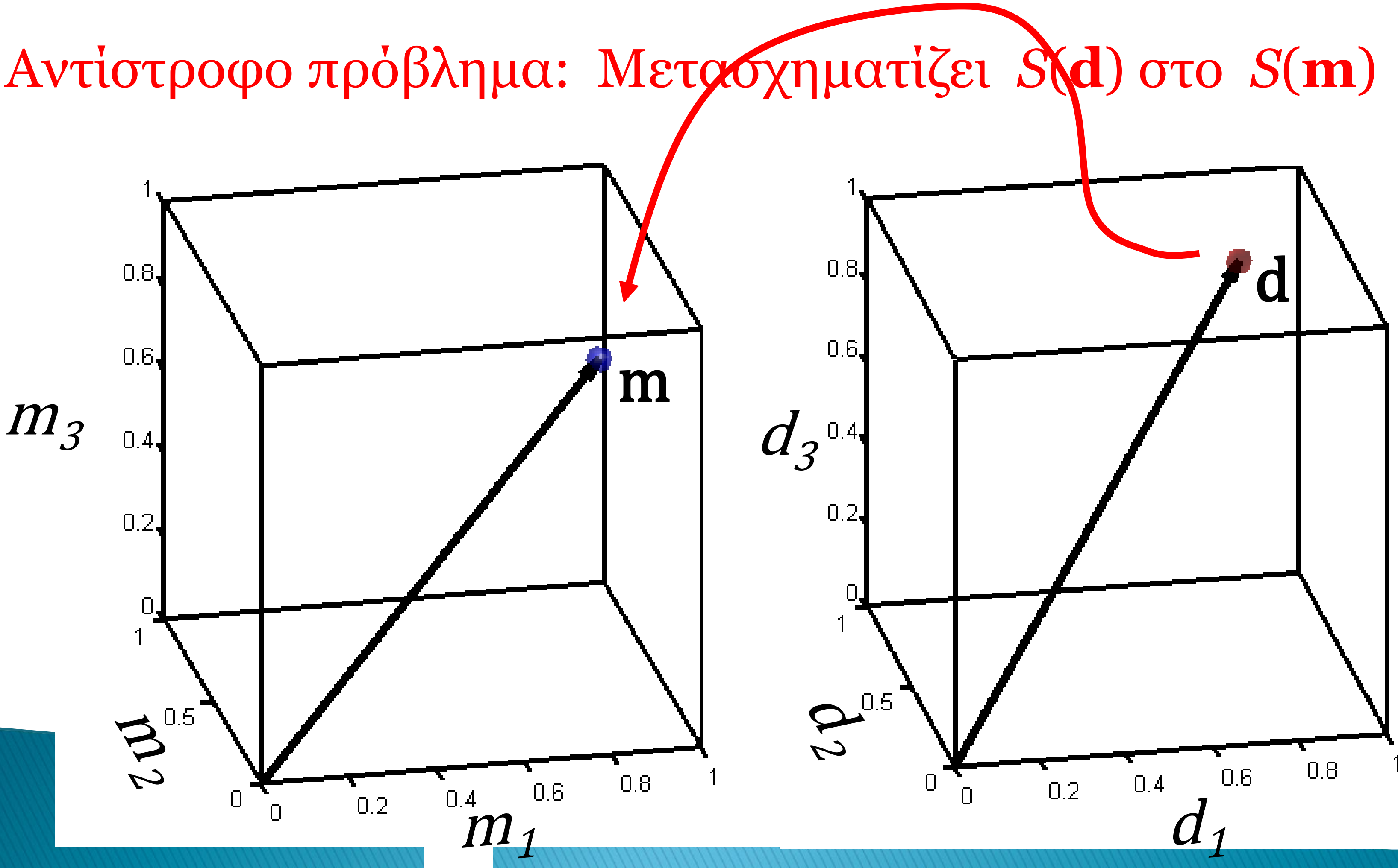
Διανυσματικοί Χώροι

Ευθύ πρόβλημα: Μετασχηματίζει $S(\mathbf{m})$ στο $S(\mathbf{d})$



Διανυσματικοί Χώροι

Αντίστροφο πρόβλημα: Μετασχηματίζει $S(\mathbf{d})$ στο $S(\mathbf{m})$



Διανυσματικοί Χώροι

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d} \qquad \mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}$$

Οι χώροι παράγονται από διανύσματα βάσης

Ο χώρος των παραμέτρων παράγεται από M διανύσματα $\mathbf{m}_j$ $\quad \mathbf{m} = \sum_{j=1}^{M} a_j \mathbf{m}_j$

Διανυσματικοί Χώροι

Θα δούμε πως οι λύσεις του Γραμμικού Αντίστροφου Προβλήματος μπορεί να βρεθούν με χρήση μετασχηματισμών **T** της βασικής εξίσωσης

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

Οι παράμετροι σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων :

$$\mathbf{m}' = \mathbf{Tm} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}'$$

Θυμίζουμε ότι ο χώρος των παραμέτρων έχει διάσταση M και σε κάθε επιλογή συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να έχομε το στοιχείο $\mathbf{m}^*$ του χώρου ως γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων βάσης $\mathbf{m}^*_i$

$$\mathbf{m}^* = \sum_{i=1}^{M} a_i^* \mathbf{m}_i^*$$

Διανυσματικοί Χώροι

Θα δούμε πως οι λύσεις του Γραμμικού Αντίστροφου Προβλήματος μπορεί να βρεθούν με χρήση μετασχηματισμών **T** της βασικής εξίσωσης

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{T}\mathbf{m} \qquad \mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}'$$

$$\mathbf{d}' = \mathbf{T}_d\mathbf{d} \qquad \text{Αντίστοιχα} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{T}_d^{-1}\mathbf{d}'$$

Ένα γραμμικό αντίστροφο πρόβλημα μπορεί να αλλάξει λοιπόν βάση αναφοράς (σύστημα συντεταγμένων) τόσο στις παραμέτρους όσο και στα δεδομένα

Διανυσματικοί Χώροι

Θα δούμε πως οι λύσεις του Γραμμικού Αντίστροφου Προβλήματος μπορεί να βρεθούν με χρήση μετασχηματισμών **T** της βασικής εξίσωσης

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{Tm} \qquad \qquad \mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}'$$

$$\mathbf{d}' = \mathbf{T}_d\mathbf{d} \qquad \text{Αντίστοιχα} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{T}_d^{-1}\mathbf{d}'$$

1η περίπτωση

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gm} = \mathbf{GIm} = \mathbf{GT}^{-1}\mathbf{Tm} = \mathbf{G}'\mathbf{m}'$$

$$\mathbf{G}' = \mathbf{GT}^{-1} \qquad \qquad \boxed{\mathbf{d} = \mathbf{G}'\mathbf{m}'}$$

Διανυσματικοί Χώροι

Θα δούμε πως οι λύσεις του Γραμμικού Αντίστροφου Προβλήματος μπορεί να βρεθούν με χρήση μετασχηματισμών **T** της βασικής εξίσωσης

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{Tm} \qquad \mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}'$$

$$\mathbf{d}' = \mathbf{T}_d\mathbf{d} \quad \text{Αντίστοιχα} \quad \mathbf{d} = \mathbf{T}_d^{-1}\mathbf{d}'$$

2η περίπτωση

$$\mathbf{d}' = \mathbf{T}_d\mathbf{d} = \mathbf{T}_d\mathbf{Gm} = \mathbf{G}''\mathbf{m}$$

$$\mathbf{G}'' = \mathbf{T}_d\mathbf{G}$$

$$\boxed{\mathbf{d}' = \mathbf{G}''\mathbf{m}}$$

Διανυσματικοί Χώροι

Θα δούμε πως οι λύσεις του Γραμμικού Αντίστροφου Προβλήματος μπορεί να βρεθούν με χρήση μετασχηματισμών **T** της βασικής εξίσωσης

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{Tm} \qquad \mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}'$$

$$\mathbf{d}' = \mathbf{T}_d\mathbf{d} \qquad \text{Αντίστοιχα} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{T}_d^{-1}\mathbf{d}'$$

3η περίπτωση

$$\mathbf{d}' = \mathbf{T}_d\mathbf{d} = \mathbf{T}_d\mathbf{Gm} = \left[\mathbf{T}_d\mathbf{G}\mathbf{T}^{-1}\right]\left[\mathbf{Tm}\right] = \mathbf{G}'''\mathbf{m}'$$

$$\mathbf{G}''' = \mathbf{T}_d\mathbf{G}\mathbf{T}^{-1}$$

$$\mathbf{d}' = \mathbf{G}'''\mathbf{m}'$$

Διανυσματικοί Χώροι

Θα δούμε πως οι λύσεις του Γραμμικού Αντίστροφου Προβλήματος μπορεί να βρεθούν με χρήση μετασχηματισμών **T** της βασικής εξίσωσης

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{Tm} \qquad \mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}'$$

Έστω ένα καθαρά υπο-ορισμένο πρόβλημα

Το λύνουμε με την απαίτηση για ελάχιστο μήκος $\mathbf{L} = \mathbf{m}^T\mathbf{m}$

Να δούμε εάν μπορούμε να έχομε το ίδιο αποτέλεσμα με μετασχηματισμό

Διανυσματικοί Χώροι

,

,

Υπο-ορισμένο πρόβλημα επιλυόμενο με την αρχή ελαχίστου μήκους

$$L = \mathbf{m}^T \mathbf{m}$$

$$L = \mathbf{m}^T \mathbf{m} = [\mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}']^T [\mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}'] = \mathbf{m}'^T [\mathbf{T}^{-1^T} \mathbf{T}^{-1}]\mathbf{m}'$$

Εάν έχομε τη δυνατότητα να επιλέξουμε **T** τέτοιο ώστε $[\mathbf{T}^{-1^T} \mathbf{T}^{-1}] = \mathbf{I}$

$\mathbf{m}^T \mathbf{m}$ Ισοδύναμη με $\mathbf{m}'^T \mathbf{m}'$

Μετασχηματισμός Housholder

,

,

Ο μετασχηματισμός αυτός δεν αλλάζει το μήκος των διανυσμάτων που ανήκουν στους αντίστοιχους χώρους (π.χ. Περιστροφή, ανάκλαση)

unitary transformation

$$\mathbf{T}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}^{-1}$$

Μετασχηματισμός Housholder

,

, $\mathbf{m}^T\mathbf{m}$ $\mathbf{m}'^T\,\mathbf{m}'$

Εάν έχομε τη δυνατότητα στο νέο σύστημα να εκφράσουμε το πρόβλημα με την επόμενη μορφή

$$
\begin{bmatrix}
G'_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
G'_{21} & G'_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
G'_{31} & G'_{32} & G'_{33} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & & . \\
. & . & . & . & . & . & & . & . \\
. & . & . & . & . & . & & & . \\
G'_{N1} & G'_{N2} & G'_{N3} & G'_{N4} & \dots & G'_{NN} & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
m'_1 \\ m'_2 \\ m'_3 \\ . \\ . \\ . \\ m'_M
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ . \\ d_N
\end{bmatrix}
$$

Μετασχηματισμός Housholder

,

,

$$\begin{bmatrix} G'_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ G'_{21} & G'_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ G'_{31} & G'_{32} & G'_{33} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . & . & & & . \\ G'_{N1} & G'_{N2} & G'_{N3} & G'_{N4} & \dots & G'_{NN} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'_1 \\ m'_2 \\ m'_3 \\ . \\ . \\ . \\ m'_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ . \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$m_1^{'est} = d_1 / G'_{11}$$

$$m_2^{'est} = \left[d_2 - G'_{21} m_1^{'est} \right] / G'_{22}$$

$$m_3^{'est} = \left[d_3 - G'_{31} m_1^{'est} - G'_{32} m_2^{'est} \right] / G'_{33}$$

Προσέχουμε ότι ό,τι τιμές και να βάλουμε στα $m_i^{'est}, i = N+1, \dots\dots, M$) το σύστημα ικανοποιείται

Για λύση ελαχίστου μήκους $m_i^{'est} = 0, i = N+1, M$

Επαναφορά στον αρχικό χώρο $\mathbf{m}^{est} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{m}^{'est}$

Υπερορισμένο πρόβλημα

Ελαχιστοποίηση λάθους πρόβλεψης $E = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$

Θέλομε **T** τέτοιο ώστε η ελαχιστοποίηση του λάθους πρόβλεψης στο νέο χώρο να ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση του λάθους πρόβλεψης στον αρχικό

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} \Leftrightarrow \mathbf{e}'^T \mathbf{e}'$$

και να μετατρέπει τον πίνακα πυρήνα σε άνω τριγωνικό πίνακα

$$\mathbf{e}' = \mathbf{T}\mathbf{e}$$

Υπερορισμένο πρόβλημα

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Te} = \mathbf{T}(\mathbf{d}-\mathbf{Gm}) = \mathbf{Td}-\mathbf{TGm} = \mathbf{d}'-\mathbf{G}'\mathbf{m}$$

$$\begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ . \\ e_M' \\ . \\ . \\ e_N' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} G_{11}' & G_{12}' & G_{13}' & G_{14}' & . & G_{1M}' \\ 0 & G_{22}' & G_{23}' & G_{24}' & . & G_{2M}' \\ 0 & 0 & G_{33}' & G_{34}' & . & G_{3M}' \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{MM}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1' \\ m_2' \\ m_3' \\ . \\ m_M' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \\ . \\ d_M' \\ . \\ . \\ d_N' \end{bmatrix}$$

Όποιες και αν είναι οι τιμές των παραμέτρων, οι τελευταίες μετρήσεις δεν ικανοποιούνται

Υπερορισμένο πρόβλημα

Με το μετασχηματισμό, διαχωρίσαμε το αντίστροφο πρόβλημα σε ένα μέρος το οποίο αφορά μετρήσεις που ικανοποιούνται επακριβώς και σε ένα άλλο μέρος που αφορά μετρήσεις που δεν μπορούν να ικανοποιηθούν. Η λύση επιλέγεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το λάθος πρόβλεψης και συνεπώς είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων.

$$E' = \sum_{i=M+1}^{N} e_i'^2 = \sum_{i=M+1}^{N} d_i'^2$$

Μεικτά ορισμένο πρόβλημα

Εάν ένα πρόβλημα είναι σε κάποιο βαθμό υπο-ορισμένο, η εξίσωση **Gm=d** περιέχει πληροφορία για μερικές μόνο από τις παραμέτρους. Οι παράμετροι αυτές θεωρούμε ότι περιλαμβάνονται σε ένα υπόχωρο $S_p(\mathbf{m})$ του χώρου των παραμέτρων. Για το συμπλήρωμα του υπόχωρου αυτού ως προς το χώρο των παραμέτρων, ο πίνακας **G** δεν παρέχει καμία πληροφορία. Ο υπόχωρος αυτός χαρακτηρίζεται ως $S_0(\mathbf{m})$

Αντίστοιχα σε ένα υπερ-ορισμένο πρόβλημα το γινόμενο **Gm** μπορεί να μην μπορεί να παράγει το χώρο $S(\mathbf{d})$ ανεξάρτητα από την επιλογή των παραμέτρων. Το πολύ να μπορεί να ικανοποιηθεί ένα μέρος των μετρήσεων που χαρακτηρίζεται ως $S_p(\mathbf{d})$ σε αντίθεση με τον υπόχωρο $S_0(\mathbf{d})$ που περιλαμβάνει τις μετρήσεις που δεν μπορούν να ικανοποιηθούν

Μεικτά ορισμένο πρόβλημα

Γράφομε : $\mathbf{G}\left[\mathbf{m}_p + \mathbf{m}_0\right] = \left[\mathbf{d}_p + \mathbf{d}_0\right]$

$\mathbf{Gm}_0 = 0$ $\mathbf{d}_o$ δεν μπορεί να ικανοποιηθεί από καμία παράμετρο

Μήκος : $L = \mathbf{m}^T\mathbf{m} = \left[\mathbf{m}_p + \mathbf{m}_0\right]^T\left[\mathbf{m}_p + \mathbf{m}_0\right] = \mathbf{m}_p^T\mathbf{m}_p + \mathbf{m}_0^T\mathbf{m}_0$

$S_0(\mathbf{m})$

Λάθος :

$E = [\mathbf{d}_p + \mathbf{d}_0 - \mathbf{Gm}_p]^T[\mathbf{d}_p + \mathbf{d}_0 - \mathbf{Gm}_p] = \left[\mathbf{d}_p - \mathbf{Gm}_p\right]^T\left[\mathbf{d}_p - \mathbf{Gm}_p\right] + \mathbf{d}_0^T\mathbf{d}_0$

$S_0(\mathbf{d})$

Μεικτά ορισμένο πρόβλημα

Σε ένα μεικτά ορισμένο πρόβλημα, εκ προοιμίου πληροφορία εισάγεται για να ορίσει παραμέτρους που περιέχονται στο χώρο $S_0(\mathbf{m})$

Το λάθος πρόβλεψης περιορίζεται στο χώρο $S_0(\mathbf{d})$

Ικανοποιώντας τη σχέση $\mathbf{e}_p = \left[\mathbf{d}_p - \mathbf{G}\mathbf{m}_p\right] = 0$

Όταν το πρόβλημα είναι καθαρά υπο-ορισμένο, επιλέγοντας $\mathbf{m}_0^{est} = 0$ (που την ονομάζουμε *φυσική λύση – natural solution*) οδηγούμαστε σε λύση ελαχίστου μήκους ενώ σε ένα καθαρά υπερ-ορισμένο πρόβλημα οδηγούμαστε σε λύση ελαχίστων τετραγώνων