Διακριτά Αντίστροφα Προβλήματα

2021-2022

Διάλεξη 9

Μετασχηματισμοί – Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

Μιχάλης Ταρουδάκης

Διανυσματικοί Χώροι

Θα δούμε πως οι λύσεις του Γραμμικού Αντίστροφου Προβλήματος μπορεί να βρεθούν με χρήση μετασχηματισμών **T** της βασικής εξίσωσης

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

Οι παράμετροι σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων :

$$\mathbf{m}' = \mathbf{Tm} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}'$$

Θυμίζουμε ότι ο χώρος των παραμέτρων έχει διάσταση M και σε κάθε επιλογή συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να έχομε το στοιχείο $\mathbf{m}^*$ του χώρου ως γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων βάσης $\mathbf{m}^*_i$

$$\mathbf{m}^* = \sum_{i=1}^{M} a_i^* \mathbf{m}_i^*$$

Διανυσματικοί Χώροι

Θα δούμε πως οι λύσεις του Γραμμικού Αντίστροφου Προβλήματος μπορεί να βρεθούν με χρήση μετασχηματισμών **T** της βασικής εξίσωσης

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m'} = \mathbf{Tm} \qquad \mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}'$$

$$\mathbf{d'} = \mathbf{T}_d\mathbf{d} \quad \text{Αντίστοιχα} \quad \mathbf{d} = \mathbf{T}_d^{-1}\mathbf{d}'$$

Ένα γραμμικό αντίστροφο πρόβλημα μπορεί να αλλάξει λοιπόν βάση αναφοράς (σύστημα συντεταγμένων) τόσο στις παραμέτρους όσο και στα δεδομένα

Μετασχηματισμός Housholder

Ο μετασχηματισμός αυτός δεν αλλάζει το μήκος των διανυσμάτων που ανήκουν στους αντίστοιχους χώρους (π.χ. Περιστροφή, ανάκλαση)

unitary transformation

$$\mathbf{T}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}^{-1}$$

Σχεδιάζοντας ένα μετασχηματισμό με την παραπάνω ιδιότητα

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}$$

Μετασχηματισμός Housholder

,

,

$$\begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ . \\ e_M' \\ . \\ . \\ e_N' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} G_{11}' & G_{12}' & G_{13}' & G_{14}' & . & G_{1M}' \\ 0 & G_{22}' & G_{23}' & G_{24}' & . & G_{2M}' \\ 0 & 0 & G_{33}' & G_{34}' & . & G_{3M}' \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{MM}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1' \\ m_2' \\ m_3' \\ . \\ m_M' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \\ . \\ d_M' \\ . \\ . \\ d_N' \end{bmatrix}$$

Θέλομε να δημιουργήσομε ένα πίνακα ως ανωτέρω

Με εφαρμογή διαδοχικών μετασχηματισμών

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_i \mathbf{T}_{i-1} \mathbf{T}_{i-2} \ldots\ldots \mathbf{T}_1$$

Μετασχηματισμός Housholder

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_i \mathbf{T}_{i-1} \mathbf{T}_{i-2} \ldots\ldots \mathbf{T}_1$$

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{T}_1\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{G}$$

Μετασχηματισμός Housholder

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G}$ $\quad$ $\mathbf{T}_1\mathbf{G}$ $\quad$ $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{G}$ $\quad$ $\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{G}$

Θέλομε να μετασχηματίσομε την i στήλη του αρχικού πίνακα

$$\mathbf{g} = \left[G_{1i}, G_{2i}, ...G_{Ni}\right]^T$$

$$\mathbf{g}' = \mathbf{T}_i\mathbf{g} = \left[G'_{1i}, G'_{2i}, ...G_{ii}, 0, 0......0\right]^T$$

Μετασχηματισμός Housholder

$$\mathbf{g}=\left[G_{1i},G_{2i},.....G_{Ni}\right]^T$$

$$\mathbf{g}'=\mathbf{T}_i\mathbf{g}=\left[G'_{1i},G'_{2i},.....G'_{ii},0,0......0\right]^T$$

$$\mathbf{T}=\mathbf{I}-\frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}$$ Ο πίνακας είναι τετραγωνικός και συμμετρικός

Εφαρμόζουμε την ανωτέρω σχέση για τη στήλη *i*

$$\mathbf{I}\mathbf{g}-\frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{g}=\begin{bmatrix}G_{1i}\\G_{2i}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\G_{Ni}\end{bmatrix}-\frac{2\mathbf{v}^T\mathbf{g}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\v_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G'_{1i}\\G'_{2i}\\\cdot\\\cdot\\G'_{ii}\\0\\\cdot\\0\end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμός Housholder

,

,

$$\mathbf{Ig}-\frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{g}=\begin{bmatrix} G_{1i} \\ G_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ G_{Ni} \end{bmatrix}-\frac{2\mathbf{v}^T\mathbf{g}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G'_{1i} \\ G'_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ G'_{ii} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παίρνομε μηδενικά τα τελευταία N-i στοιχεία του **g**’ εάν

$$\left[\frac{2\mathbf{v}^T\mathbf{g}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\right]\left[v_{i+1},\ldots v_N\right]=\left[G_{i+1,i},\ldots.G_{Ni}\right]$$

Μετασχηματισμός Housholder

,

,

$$\left[\frac{2\mathbf{v}^T\mathbf{g}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\right]\left[v_{i+1},\dots v_N\right]=\left[G_{i+1,i},\dots.G_{Ni}\right]$$

Μπορούμε να επιλέξουμε

$$\left[v_{i+1},\dots v_N\right]=\left[G_{i+1,i},\dots.G_{Ni}\right]$$

Επίσης παίρνομε τα πρώτα *i-1* στοιχεία του **v** να είναι μηδενικά, οπότε και τα πρώτα *i-1* στοιχεία του g παραμένουν ως έχουν

Τότε το *i* στοιχείο του **v** θα πρέπει να υπολογιστεί.

Μετασχηματισμός Housholder

,

,

$$\left[v_{i+1},...v_N\right]=\left[G_{i+1,i},....G_{Ni}\right]$$

Παίρνομε τα πρώτα *i-1* στοιχεία του **v** να είναι μηδενικά, οπότε και τα πρώτα *i-1* στοιχεία του g παραμένουν ως έχουν

Τότε το *i* στοιχείο του **v** υπολογίζεται από τη σχέση

$$v_i = G_{ii} - a \qquad \text{όπου} \qquad a^2 = \sum_{j=1}^{N} G_{ji}^2$$

τελικά

$$\mathbf{v}=\left[0,0,...,G_{ii}-a,G_{i+1,i},....G_{Ni}\right]^T$$

Αλλοι μετασχηματισμοί

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

Θέλομε να ελαχιστοποιήσουμε

$$E + L = \mathbf{e}^T \mathbf{W}_e \mathbf{e} + \mathbf{m}^T \mathbf{W}_m \mathbf{m}$$

Μπορούμε να βρούμε μετασχηματισμούς $\mathbf{T}_\mathrm{m}$ και $\mathbf{T}_\mathrm{e}$ που να μην εμφανίζουν τους πίνακες ζύγισης

$$E + L = \mathbf{e}'^T \mathbf{e}' + \mathbf{m}'^T \mathbf{m}'$$

Αλλοι μετασχηματισμοί

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$$

Θεωρούμε $$L = \mathbf{m}^T \mathbf{W}_m \mathbf{m}$$

$$L = \mathbf{m}^T \mathbf{W}_m \mathbf{m} = \mathbf{m}^T \left[\mathbf{T}_m^T \mathbf{T}_m \right] \mathbf{m} = \left[\mathbf{T}_m \mathbf{m} \right]^T \left[\mathbf{T}_m \mathbf{m} \right] = \mathbf{m}'^T \mathbf{m}'$$

Η παραγοντοποίηση είναι δυνατή μέσω των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $\mathbf{W}_{\mathrm{m}}$

$\mathbf{\Lambda}_m$ Πίνακας ιδιοτιμών

$\mathbf{U}_m$ Πίνακας ιδιοδιανυσμάτων

Αλλοι μετασχηματισμοί

$$\mathbf{W}_m = \mathbf{U}_m \boldsymbol{\Lambda}_m \mathbf{U}_m^T = \left\{\mathbf{U}_m \boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2}\right\}\left\{\boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2}\mathbf{U}_m^T\right\}$$

$$= \left\{\boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2}\mathbf{U}_m^T\right\}^T \left\{\boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2}\mathbf{U}_m^T\right\} = \mathbf{T}_m^T \mathbf{T}_m$$

Αντίστοιχα για $\mathbf{W}_\mathrm{e}$

G'm'=d'

$\mathbf{m}' = \left\{\boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2}\mathbf{U}_m^T\right\}\mathbf{m}$	$\mathbf{m} = \left\{\mathbf{U}_m \boldsymbol{\Lambda}_m^{-1/2}\right\}\mathbf{m}'$
$\mathbf{d}' = \left\{\boldsymbol{\Lambda}_e^{1/2}\mathbf{U}_e^T\right\}\mathbf{d}$	$\mathbf{d} = \left\{\mathbf{U}_e \boldsymbol{\Lambda}_e^{-1/2}\right\}\mathbf{d}'$
$\mathbf{G}' = \left\{\boldsymbol{\Lambda}_e^{1/2}\mathbf{U}_e^T\right\}\mathbf{G}\left\{\mathbf{U}_m \boldsymbol{\Lambda}_m^{-1/2}\right\}$	$\mathbf{G} = \left\{\mathbf{U}_e \boldsymbol{\Lambda}_e^{-1/2}\right\}\mathbf{G}'\left\{\boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2}\mathbf{U}_m\right\}$

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Διάσταση πίνακα $(N+M)$x$(N+M)$

Ο πίνακας έχει N+M πραγματικές ιδιοτιμές

λ_i ιδιοτιμές και $\mathbf{w}_i$ ιδιοδιανύσματα : $\mathbf{S}\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i$

διαχωρίζουμε $\mathbf{w}_i \rightarrow \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ διαστάσεων N και M αντίστοιχα

$$\mathbf{S}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \qquad \mathbf{G}^T \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

$$\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \qquad \mathbf{G}^T\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Για λ_i θετική ιδιοτιμή $[\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i]^T$

- λ_i είναι επίσης ιδιοτιμή $[-\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i]^T$

Για p θετικές ιδιοτιμές θα υπάρχουν $N+M-2p$ μηδενικές ιδιοτιμές

$$p \le \min(N, M)$$

$$\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \lambda_i^2 \mathbf{v}_i \qquad \mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{u}_i = \lambda_i^2 \mathbf{u}_i$$

Πάντα θετικές

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

$$\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \lambda_i^2\mathbf{v}_i \qquad \mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{u}_i = \lambda_i^2\mathbf{u}_i$$

Τετραγωνικός συμμετρικός πίνακας MxM

Τετραγωνικός συμμετρικός πίνακας NxN

Πλήρης ομάδα ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{v}_i$ που παράγουν τον S(**m**)

Πλήρης ομάδα ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{u}_i$ που παράγουν τον S(**d**)

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots \mathbf{v}_M] \qquad \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots\ldots \mathbf{u}_N]$$

Περιλαμβάνουν τα p ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές και τα υπόλοιπα προέρχονται από τα ιδιοδιανύσματα των μηδενικών ιδιοτιμών

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_N \qquad \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_M$$

Ορθοκανονικά διανύσματα

$$\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \qquad \mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}$$

Λ πίνακας *N*x*M* που τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}$ που αποτελούν τις ιδιάζουσες τιμές του πίνακα **G.** Τις διατάσουμε κατά φθίνουσα σειρά.

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \lambda_i^2 \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$$

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

,

,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{U\Lambda V}^T$$

$\mathbf{\Lambda}_\mathrm{p}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_p \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{V}_p{}^T$$

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_p \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^T$$

$\mathbf{U}_p$ και $\mathbf{V}_p$ αποτελούνται από τις πρώτες p στήλες των $\mathbf{U}$ και $\mathbf{V}$

Τα υπόλοιπα στοιχεία των $\mathbf{U}$ και $\mathbf{V}$ αντιστοιχούν στους υπόχωρους των μετρήσεων και παραμέτρων που ορίζονται από τα $\mathbf{U}_o$ και $\mathbf{V}_o$

Με άλλα λόγια τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{V}_p$ ανήκουν στον υπόχωρο S_p ($\mathbf{m}$) των παραμέτρων και τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{V}_o$ ανήκουν στον υπόχωρο S_o ($\mathbf{m}$) (μηδενόχωρο).

Αντίστοιχα, τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{U}_p$ ανήκουν στον υπόχωρο S_p ($\mathbf{d}$) των μετρήσεων και τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{U}_o$ ανήκουν στον υπόχωρο S_o ($\mathbf{d}$) των μετρήσεων (μηδενόχωρο).

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

,

,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \mathbf{U}_p \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{V}_p{}^T$$

Προφανώς ο υπόχωρος S_p (**m**) παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{V}_p$, και ο υπόχωρος S_o (**m**) από τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{V}_o$

Αντίστοιχα, ο υπόχωρος S_p (**d**) παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{U}_p$ και ο υπόχωρος S_o (**d**)από τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{U}_o$

Ο πίνακας πυρήνας **G** δεν είναι συνάρτηση των μηδενοδιανυσμάτων

Υπενθυμίζεται ότι

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_N \qquad \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_M$$

Αλλά ενώ $\mathbf{V}_p{}^T\mathbf{V}_p = \mathbf{U}_p{}^T\mathbf{U}_p = \mathbf{I} \qquad \mathbf{I} : p\mathrm{x}p$

$\mathbf{V}_p\mathbf{V}_p{}^T, \mathbf{U}_p\mathbf{U}_p{}^T$ δεν είναι ίσοι πάντα με μοναδιαίους πίνακες

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \mathbf{U}_p \boldsymbol{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^T$$

Αναζητάμε τη **φυσική λύση** (natural solution) ως τη λύση στο αντίστροφο πρόβλημα που δεν έχει διανύσματα στο S_o (**m**) ενώ το λάθος δεν έχει διανύσματα στο S_p (**d**).

Η λύση θα είναι : $\mathbf{m}^{est} = \mathbf{V}_p \boldsymbol{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T \mathbf{d}$

Μπορεί να αποδειχθεί αυτό, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης με το $\mathbf{V}_o$ και με το $\mathbf{U}_p$ αντίστοιχα και αξιοποιώντας το γεγονός ότι $\mathbf{V}_0^T$ και $\mathbf{V}_p$ είναι ορθογώνια.

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_p \boldsymbol{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^{\,T} \qquad\qquad \mathbf{m}^{est} = \mathbf{V}_p \boldsymbol{\Lambda}_p^{\,-1} \mathbf{U}_p^{\,T} \mathbf{d}$$

$$\boxed{\mathbf{G}^{-g} = \mathbf{V}_p \boldsymbol{\Lambda}_p^{\,-1} \mathbf{U}_p^{\,T}}$$

Φυσικός γενικευμένος αντίστροφος (natural generalized inverse)

Πίνακας ανάλυσης παραμέτρων

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G} = \{\mathbf{V}_p \boldsymbol{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T\}\{\mathbf{U}_p \boldsymbol{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^T\} = \mathbf{V}_p \mathbf{V}_p^T$$

Πίνακας ανάλυσης μετρήσεων

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{G}^{-g} = \{\mathbf{U}_p \boldsymbol{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^T\}\{\mathbf{V}_p \boldsymbol{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T\} = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^T$$

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

,

,

$$\mathbf{G}^{-g} = \mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^{T}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G} = \{\mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^{T}\}\{\mathbf{U}_p \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^{T}\} = \mathbf{V}_p \mathbf{V}_p^{T}$$

Εάν ο χώρος των παραμέτρων παράγεται από το $\mathbf{V}_{\mathrm{p}}$ τότε και $\mathbf{V}_p \mathbf{V}_p^{T} = I$ και οι παράμετροι υπολογίζονται μονοσήμαντα. Για να ισχύσει αυτό θα πρέπει να μην υπάρχουν μηδενικές ιδιοτιμές και $p \geq M$

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{G}^{-g} = \{\mathbf{U}_p \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^{T}\}\{\mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^{T}\} = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^{T}$$

Εάν ο χώρος των μετρήσεων παράγεται από το $\mathbf{U}_{\mathrm{p}}$ τότε και $\mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^{T} = I$ και οι μετρήσεις ανακτώνται μονοσήμαντα. Για να ισχύσει αυτό θα πρέπει p=N

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

,

,

$$\mathbf{G}^{-g} = \mathbf{V}_p \boldsymbol{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T$$

Ο πίνακας συνδιακύμανσης παραμέτρων για ασυσχέτιστα δεδομένα (μετρήσεις) με ίδια διακύμανση σ_d^2

$$\left[\operatorname{cov}\mathbf{m}^{est}\right] = \mathbf{G}^{-g}\left[\operatorname{cov}\mathbf{d}\right]\mathbf{G}^{-gT} = \sigma_d^2\{\mathbf{V}_p\boldsymbol{\Lambda}_p^{-1}\mathbf{U}_p^T\}\{\mathbf{U}_p\boldsymbol{\Lambda}_p^{-1}\mathbf{U}_p^T\}^T = \sigma_d^2\mathbf{V}_p\{\boldsymbol{\Lambda}_p^{-1}\}^2\mathbf{V}_p^T$$

Ο πίνακας αυτός δεν αξιοποιεί πληροφορία για την διακύμανση των παραμέτρων καθώς υποθέσαμε ότι δεν θέλομε διανύσματα που ανήκουν στο S_o (**m**), επομένως ουσιαστικά δεν αξιοποιούμε εκ προοιμίου πληροφορίες για τις παραμέτρους.

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

,

,

Εάν πάρομε $$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d} + \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}\langle\mathbf{m}\rangle\right]$$

με $$\mathbf{G}^{-g} = \mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p{}^{-1} \mathbf{U}_p{}^T$$

$$\left[\operatorname{cov}\mathbf{m}^{est}\right] = \mathbf{G}^{-g}\left[\operatorname{cov}\mathbf{d}\right]\mathbf{G}^{-gT} + \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}\right]\left[\operatorname{cov}\mathbf{m}\right]\left[\mathbf{I} - \mathbf{R}\right]^T$$

Έχουμε δει ότι

$$\mathbf{m}^{gen} = \mathbf{m}^{par} + \sum_{i=1}^{q} a_i \mathbf{m}_i^{null}$$

Επειδή μέσω της SVD μπορούμε να υπολογίσουμε διανύσματα του μηδενόχωρου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η φυσική λύση αποτελεί στην πραγματικότητα την ειδική λύση του προβλήματος

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

$$\mathbf{G}^{-g} = \mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^{T}$$

$$\mathbf{m}^{gen} = \mathbf{m}^{par} + \sum_{i=1}^{q} a_i \mathbf{m}_i^{null}$$

$$\mathbf{m}^{gen} = \mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^{T} \mathbf{d} + \mathbf{V}_0 \boldsymbol{\alpha}$$

Τα διανύσματα του μηδενόχωρου είναι *M*-*p*

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

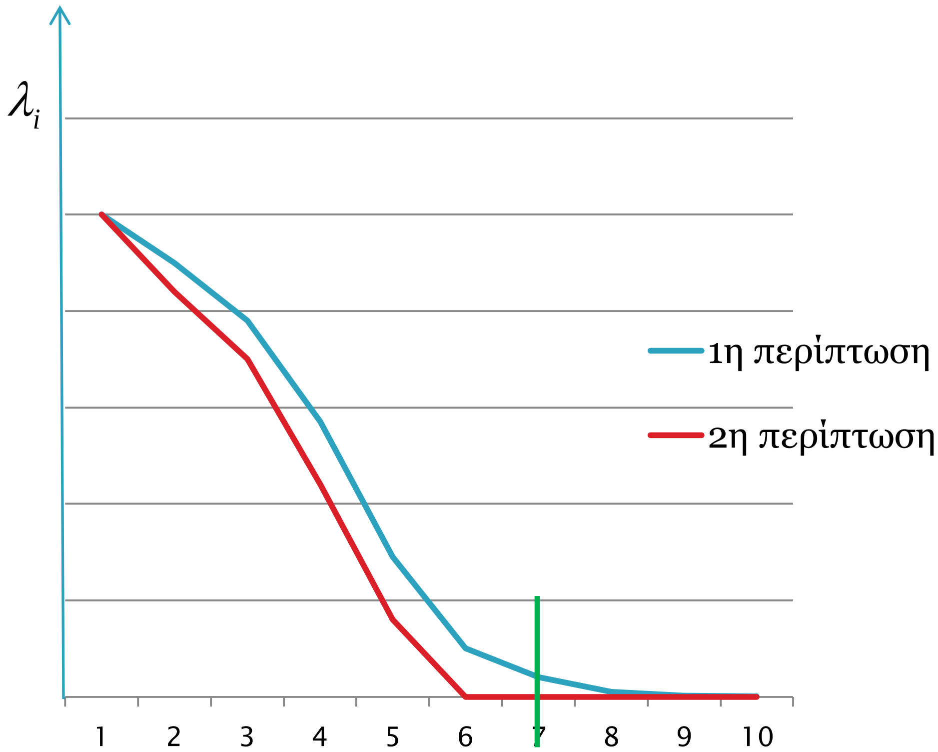
Επισημαίνεται ότι η εφαρμογή της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών βασίζεται στη δυνατότητα ακριβούς υπολογισμού των τιμών αυτών.

Σε πολλές περιπτώσεις όταν υπάρχουν μεγάλες διαφορές μεγέθους, που σημαίνει πρακτικά πίνακας **G** κακής κατάστασης, η ανάλυση δεν είναι ακριβής με τους υπάρχοντες αλγορίθμους.

Σε άλλες περιπτώσεις ιδιάζουσες τιμές κοντά στο μηδέν θεωρούνται μηδενικές, οπότε στην πραγματικότητα επιλύεται ένα διαφορετικό πρόβλημα που προσεγγίζει το κανονικό.

Άλλες λύσεις όπως για παράδειγμα η απόσβεση των μικρών ιδιοτιμών είναι επίσης εφαρμόσιμες.

Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών



$M=10$

1η περίπτωση : $p=?$

2η περιπτωση : $p=5$

$p=7$