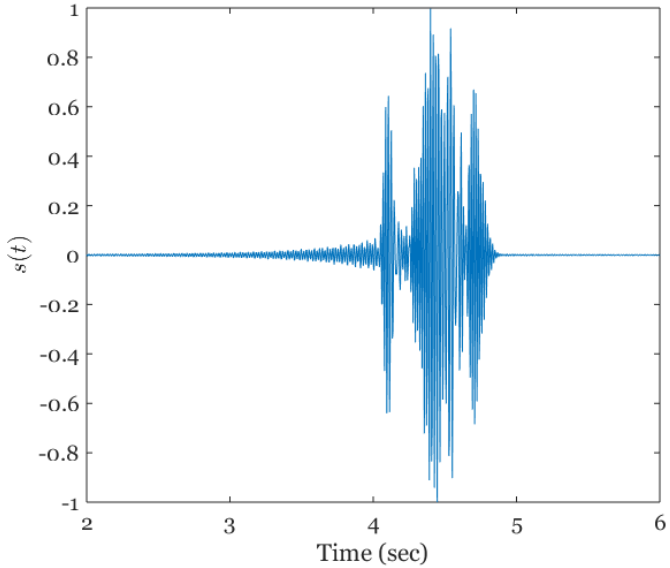
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Κυματική Διάδοση

15η διάλεξη
2ο μέρος

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier



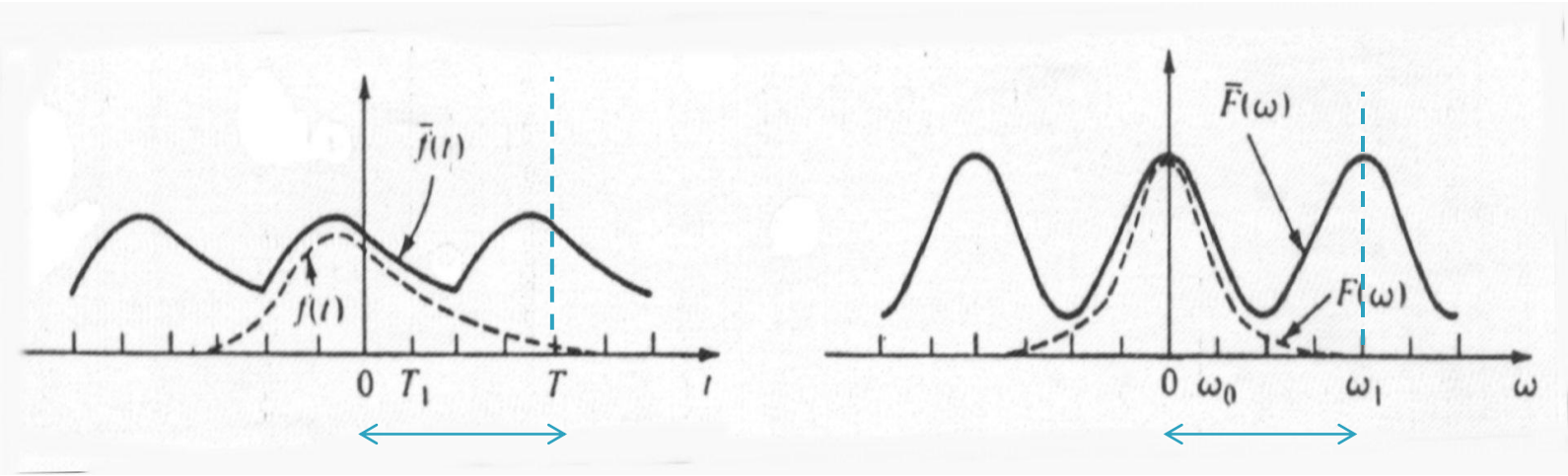
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα

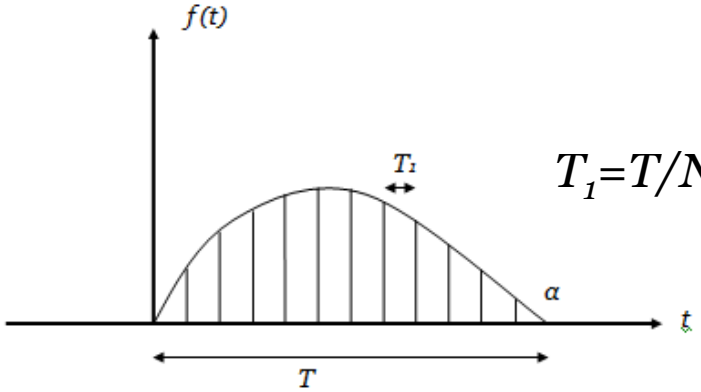
$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \qquad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$



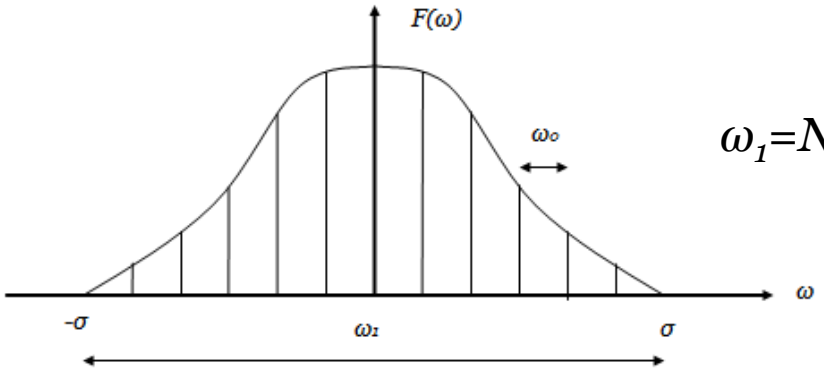
Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) \qquad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$



$T_1 = T/N$



$\omega_1 = N\omega_o$

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N^{\,mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N}, m = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\bar{F}(n\omega_0) = T_1 \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}(mT_1) w_N^{-mn}, n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{\ mn} \qquad m = 0, \ldots\ldots, N-1, \qquad w_N = e^{i2\pi/\mathrm{N}}$$

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{\ -mn} \qquad n = 0, \ldots., N-1$$

$$a_n \underset{N}{\leftrightarrow} A_m$$

Διακριτή σειρά Fourier τάξης N

Περιοδική $\qquad A_{m+N} = A_m, \quad a_{n+N} = a_n$

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N{}^{mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N}$$

$$A_m \to \bar{f}(mT_1)$$

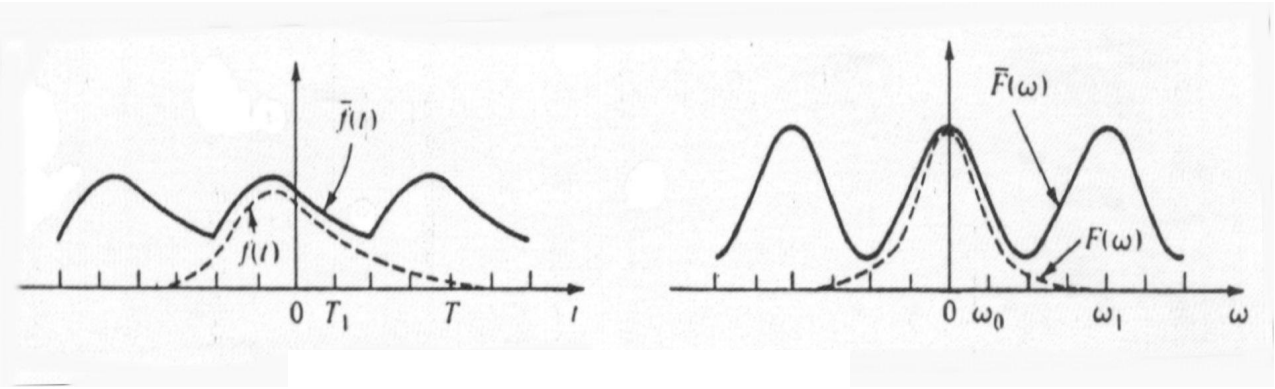
$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N{}^{mn} \qquad m = 0, \ldots\ldots, N-1, \qquad w_N = e^{i2\pi/\mathrm{N}}$$

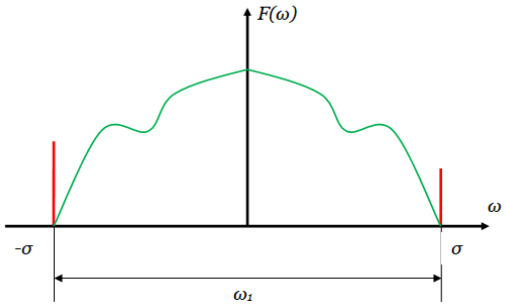
Η λύση του συστήματος είναι

$$a_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N{}^{-mn} \quad n = 0, \ldots., N-1$$

$$a_n \to \frac{1}{T}\bar{F}(n\omega_0)$$

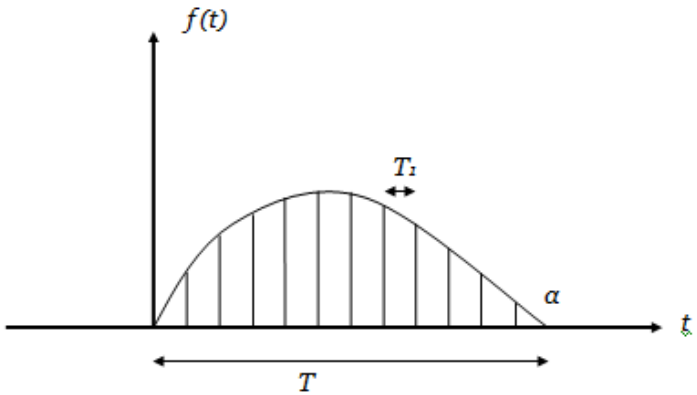
$$\bar{F}(n\omega_0) = T_1 \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}(mT_1) w_N^{-mn}, n = 0, 1, 2, \ldots., N-1$$

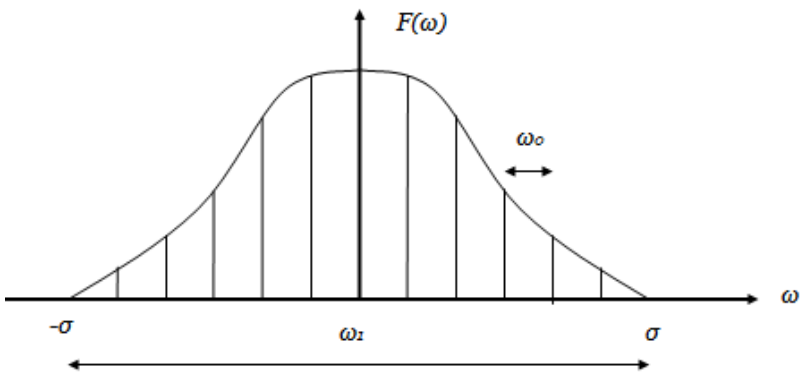




Εάν $F(\omega) = 0$ για $|\omega| > \sigma$ και $\omega_1 > 2\sigma$

$F(\omega) = \bar{F}(\omega)$ για $|\omega| < \sigma$



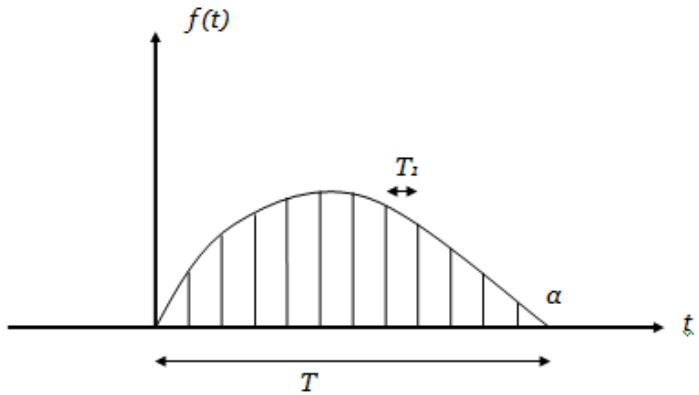


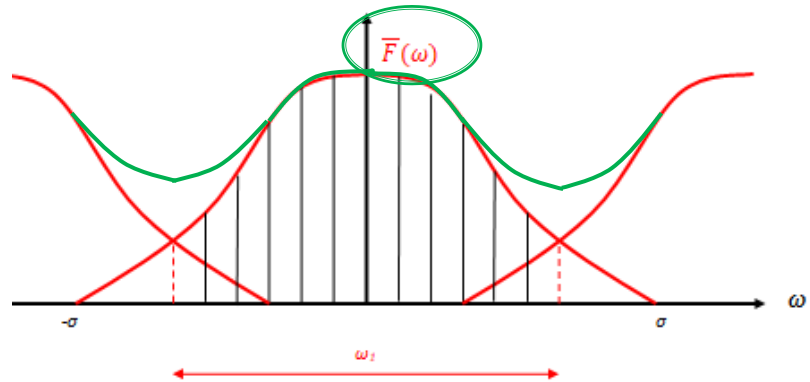
$T=\alpha,\ N$ $\qquad$ $\omega_o = 2\pi/T$

$T_1 = T/N$ $\qquad$ $\omega_1 = N\omega_o$

Αφού $\omega_1 = 2\sigma$ τα δείγματα της $F(\omega)$ αναπαράγονται αυτούσια από τα δείγματα της $\bar{F}(\omega)$.

Υπενθυμίζεται ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ επαναλαμβάνονται με περιόδους αντίστοιχα T και ω_1 ορίζοντας τις $\bar{f}(t)$ και $\bar{F}(\omega)$





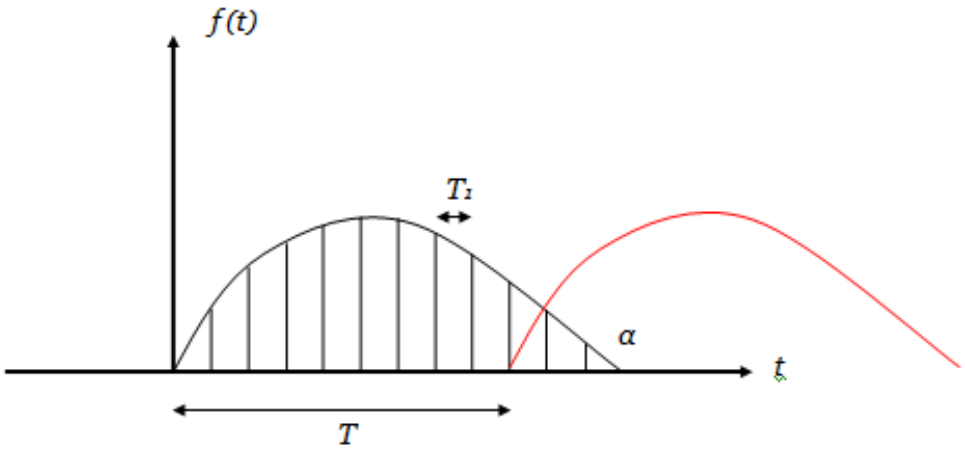
$T=\alpha,\ N$ $\qquad$ $\omega_o = 2\pi/T$

$T_1 = T/N$ $\qquad$ $\omega_1 = N\omega_o$

Εάν για τις δεδομένες επιλογές $\omega_1 < 2\sigma$ τότε έχομε λάθος στον υπολογισμό των δειγμάτων της $F(\omega)$ από αυτά της $\bar{F}(\omega)$

Aliasing error $\quad F(\omega) - \bar{F}(\omega)$

Για δεδομένο N η αύξηση του ω_1 συνεπάγεται μείωση του T αφού $\omega_1 = N\omega_o$ και $\omega_o = 2\pi/T$



Τα $\bar{f}(nT_1)$ υπολογίζονται ακριβώς, αλλά όχι τα $f(nT_1)$ και συνεπώς παραμένει λάθος προσέγγισης

Επί πλέον έχομε κακή ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων (μεγάλο ω_o)

Αύξηση του T με σταθερό το N σημαίνει μείωση του ω_o (θετικό για καλή ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων) αλλά ταυτόχρονα μείωση του ω_1 που σημαίνει επαναφορά του Aliasing error και μείωση της ανάλυσης στο πεδίο του χρόνου αφού αυξάνει το T_1 ($T_1 = T/N$)

Το θεώρημα της δειγματοληψίας των Shannon- Nyquist ορίζει ότι όταν το εύρος συχνοτήτων ενός σήματος έχει μέγιστη συχνότητα f_σ (αντίστοιχη κυκλική συχνότητα σ), η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος όπως ορίζεται ο χρόνος T_1 θα πρέπει να είναι

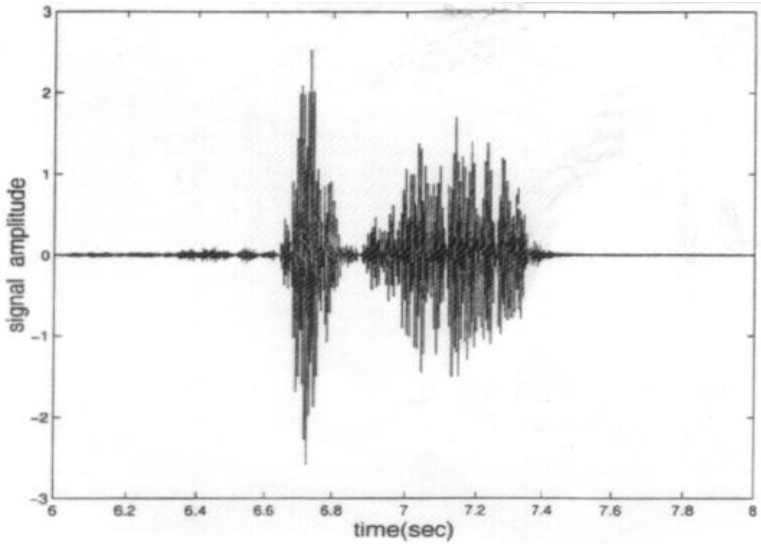
$$T_1 = \frac{1}{2 f_\sigma} = \frac{\pi}{\sigma}$$

για μια ορθή αναπαραγωγή του σήματος στο πεδίο του χρόνου.

Παράδειγμα :

Σε εφαρμογή τομογραφίας εκπέμπεται σήμα που έχει ενεργό φάσμα ανάμεσα στα 50 και 200 Hz.

Ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας προκειμένου το σήμα να αναπαραχθεί σωστά από το μετρούμενο φάσμα του ;



Παράδειγμα :

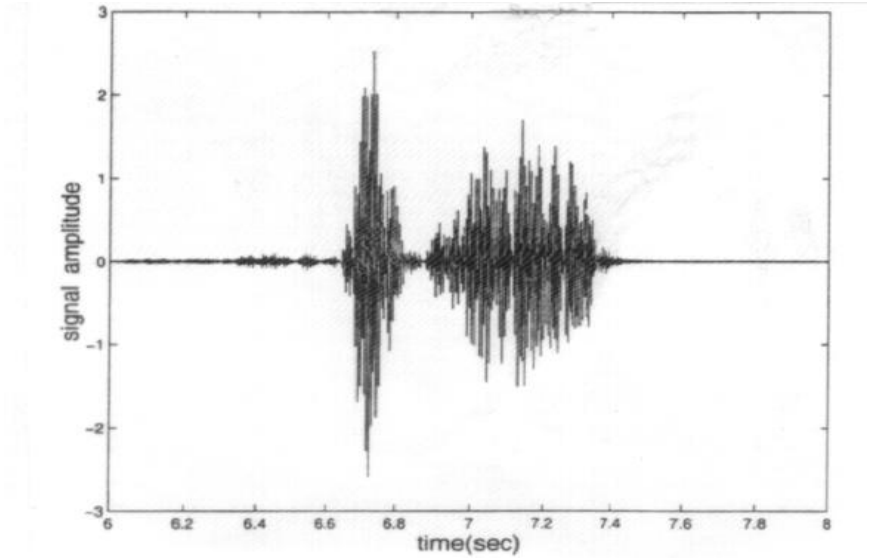
Σε εφαρμογή τομογραφίας εκπέμπεται σήμα που έχει ενεργό φάσμα ανάμεσα στα 50 και 200 Hz.

Ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας προκειμένου το σήμα να αναπαραχθεί σωστά από το μετρούμενο φάσμα του ;

$$T_1 = \frac{1}{400} = 0.0025 \quad \text{sec}$$

Συχνοτικό εύρος $f_1 = \dfrac{1}{T_1} = 400 \text{ Hz}$

Περίοδος ισοδύναμου περιοδικού σήματος : $T = \dfrac{N}{400}$



$$T_1 = \frac{1}{400} = 0.0025 \quad \text{sec}$$

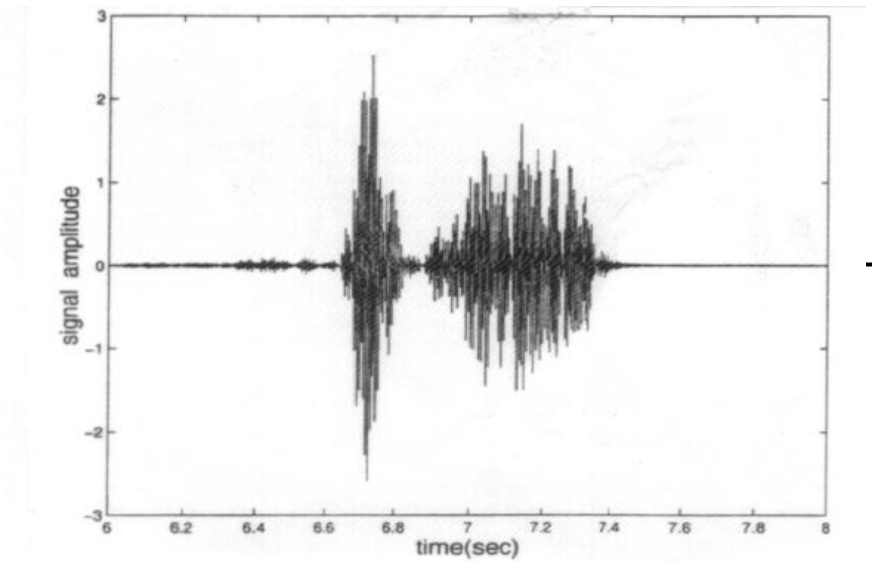
Συχνοτικό εύρος $$f_1 = \frac{1}{T_1} = 400 \text{ Hz}$$

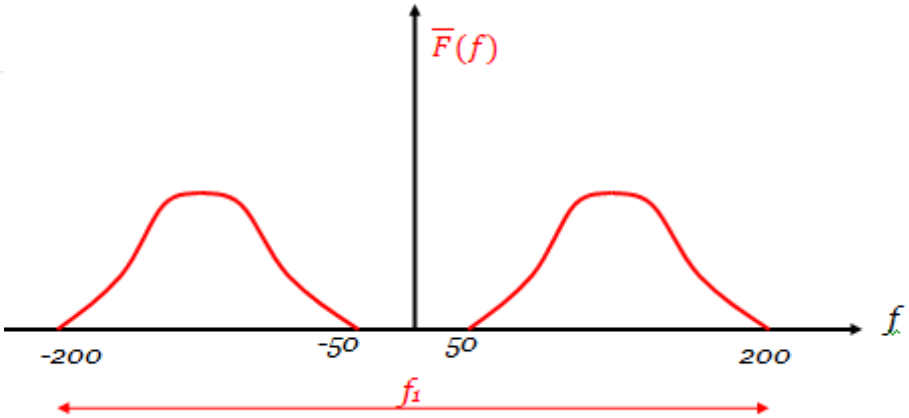
Περίοδος ισοδύναμου περιοδικού σήματος : $$T = \frac{N}{400}$$

Για N=800 παίρνομε T =2 sec

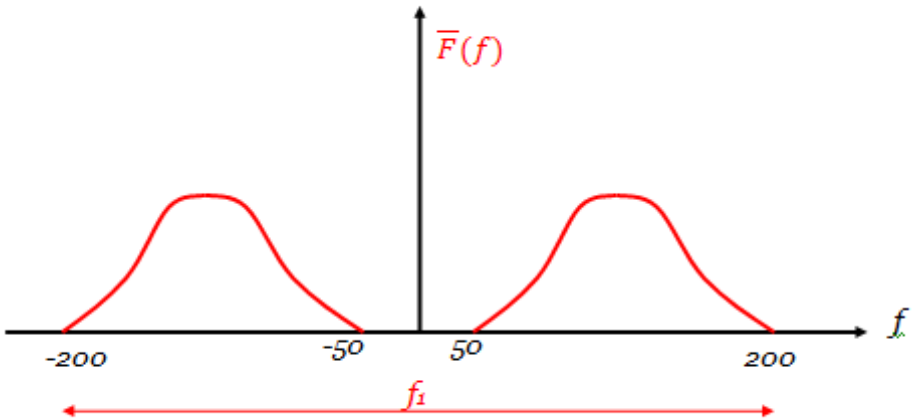
$$f_0 = \frac{f_1}{N} = 0,5 \text{ Hz}$$

T=2sec





$$f_1 = \frac{1}{T_1} = 400 \text{ Hz}$$



$$f_0 = \frac{f_1}{N} = 0,5 \text{ Hz}$$

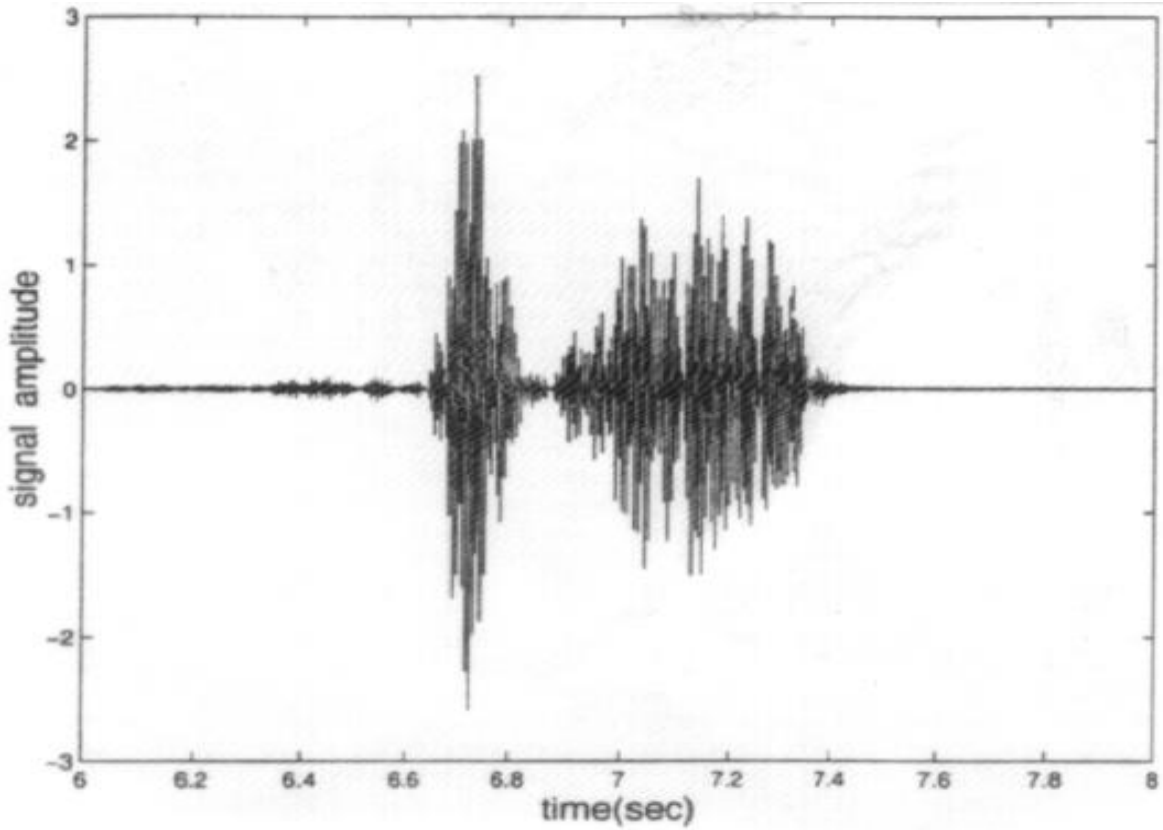
Για N=800 παίρνομε T =2 sec

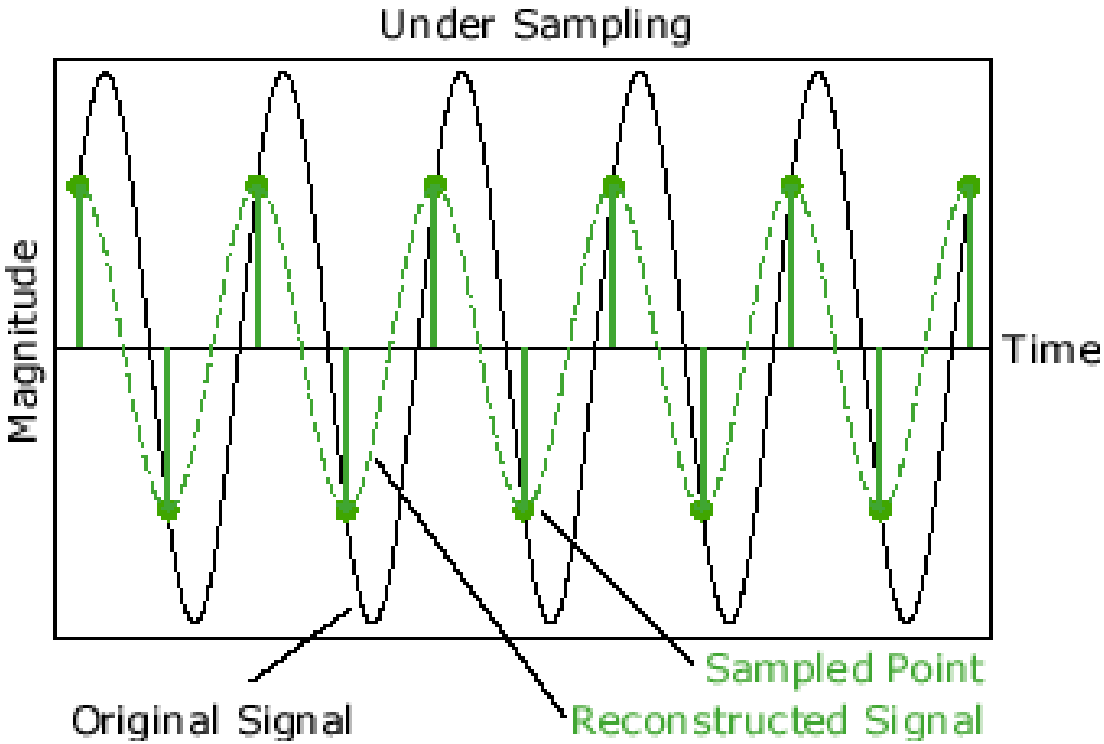
Υπολογίζομε την ακουστική πίεση από 50 έως 200 Hz ανά 0.5 Hz

Αντιστοιχούμε $a_n \rightarrow \frac{1}{T}\overline{F}(n\omega_0)$

Λύνομε το σύστημα $a_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{-mn} \quad n = 0,\ldots,N-1$

$A_m \rightarrow \overline{f}(mT_1)$ Παίρνομε το σήμα στο πεδίο του χρόνου με δείγματα ανά T1=0.0025 sec


signal amplitude
time(sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
6
6.2
6.4
6.6
6.8
7
7.2
7.4
7.6
7.8
8


Under Sampling
Magnitude
Time
Sampled Point
Original Signal
Reconstructed Signal