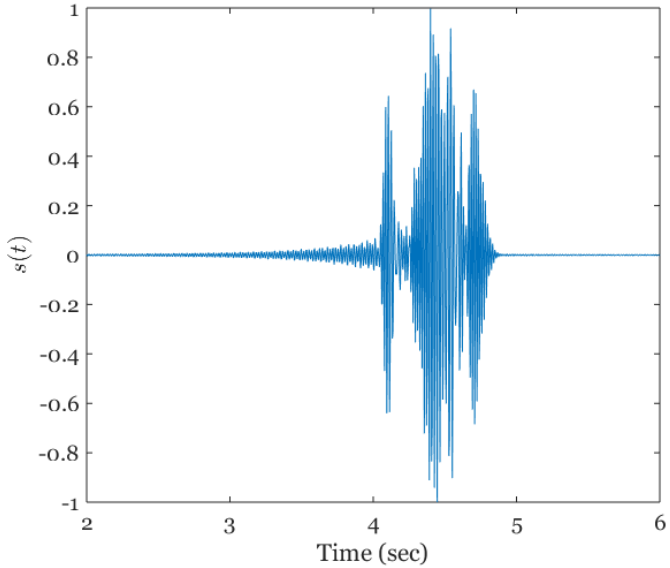
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Κυματική Διάδοση

16η διάλεξη

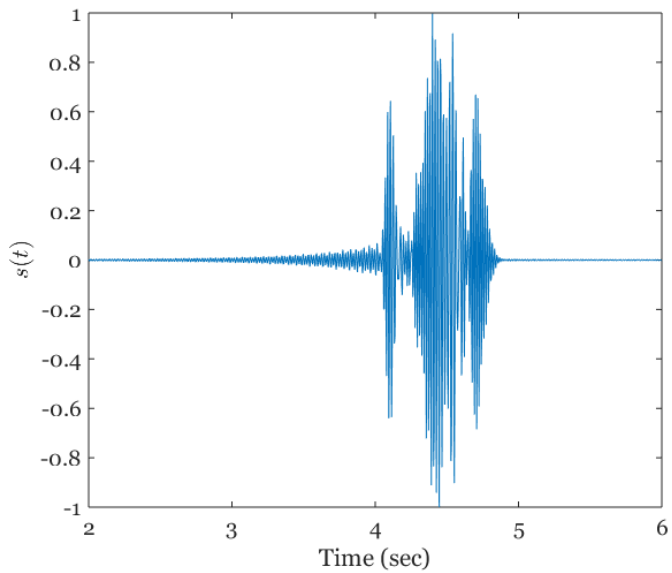
Διάδοση ευρυζώνιου (broadband) σήματος



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Διάδοση ευρυζώνιου (broadband) σήματος

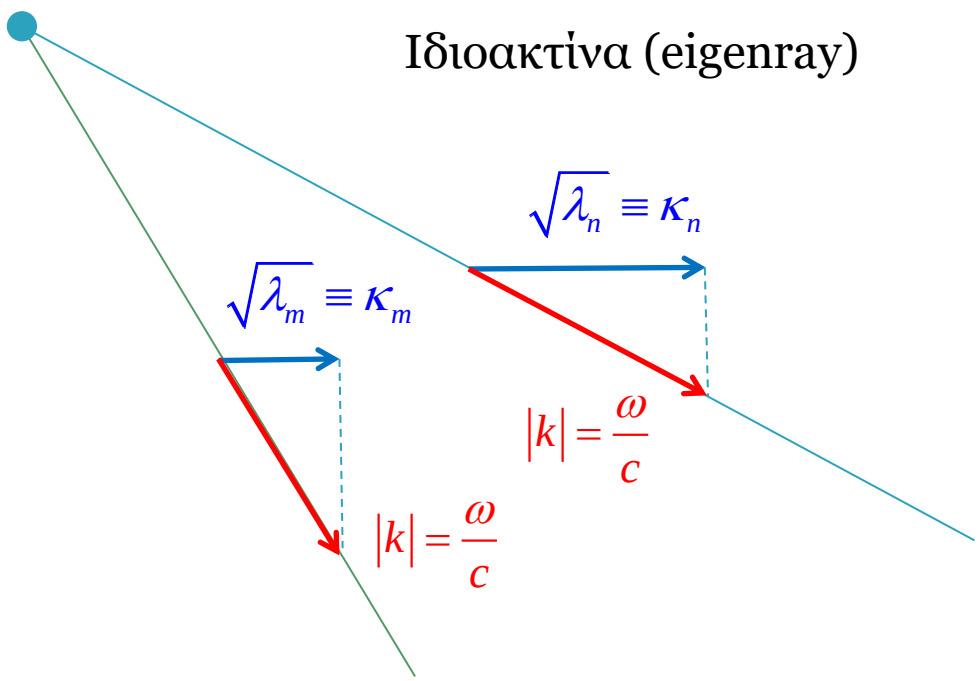


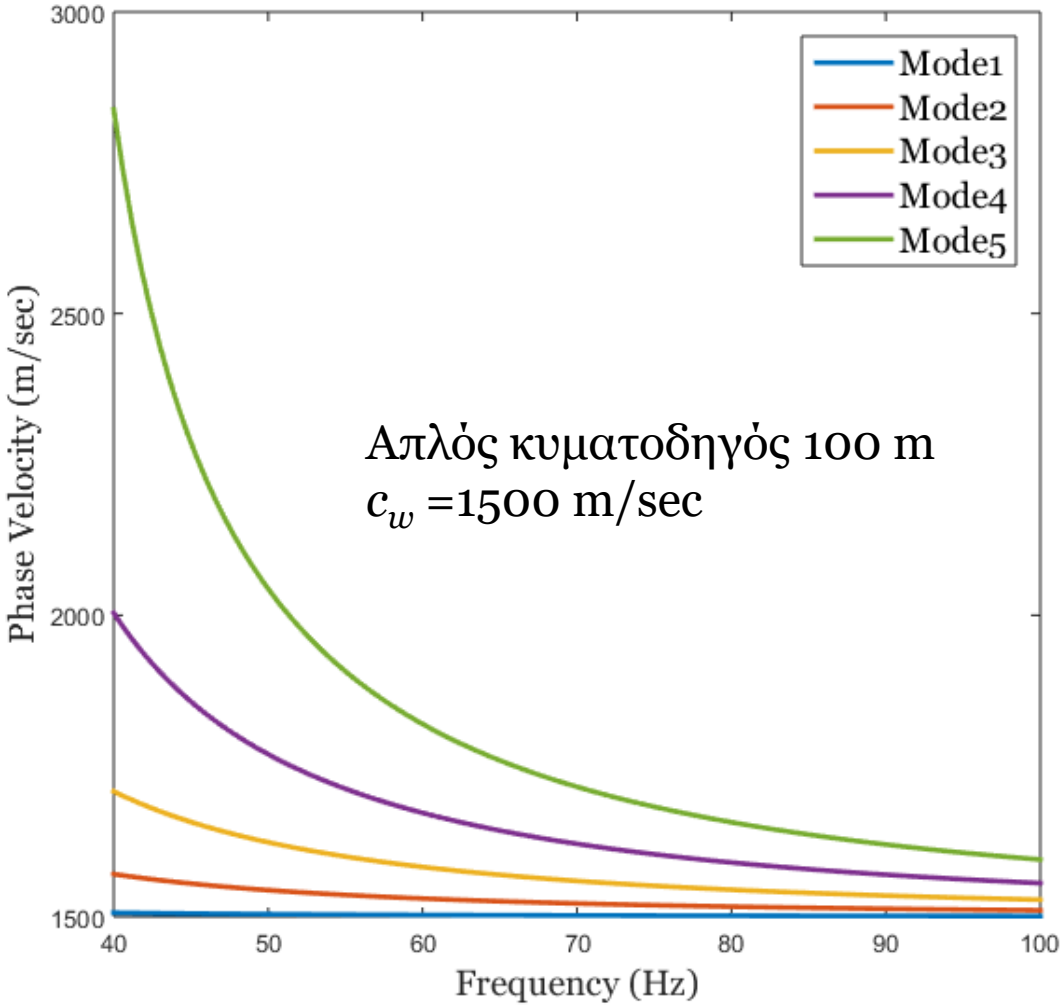
$$\bar{F}(n\omega_0) = T_1 \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}(mT_1) w_N^{-mn}, \; n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N^{\;mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N}$$

Φασική ταχύτητα

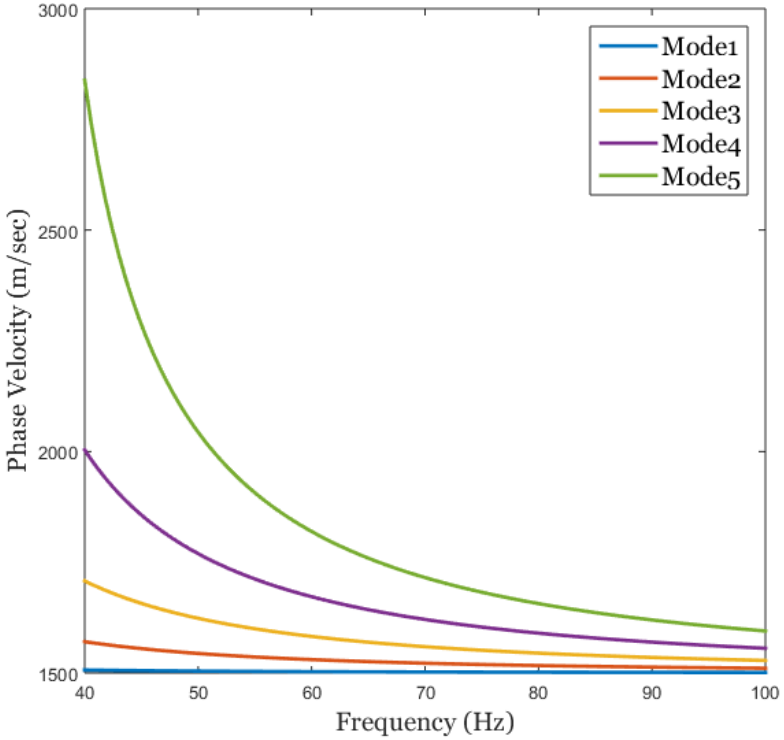
$$v_n = \frac{\omega}{\kappa_n}$$




Mode1
Mode2
Mode3
Mode4
Mode5
Phase Velocity (m/sec)
Frequency (Hz)
3000
2500
2000
1500
40
50
60
70
80
90
100
Απλός κυματοδηγός 100 m
c_w =1500 m/sec

Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη της ιδιομορφής, τόσο μικρότερη είναι η ιδιοτιμή κ_n και επομένως τόσο μεγαλύτερη είναι η φασική ταχύτητα για δεδομένη συχνότητα.

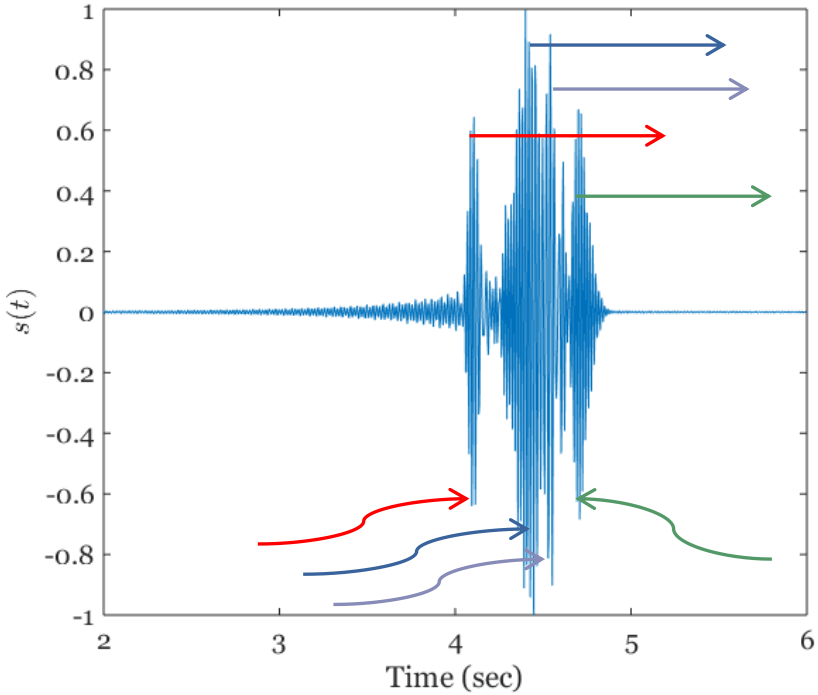
Η φασική ταχύτητα είναι πάντα μεγαλύτερη της (ελάχιστης) ταχύτητας διάδοσης του ήχου στο νερό.



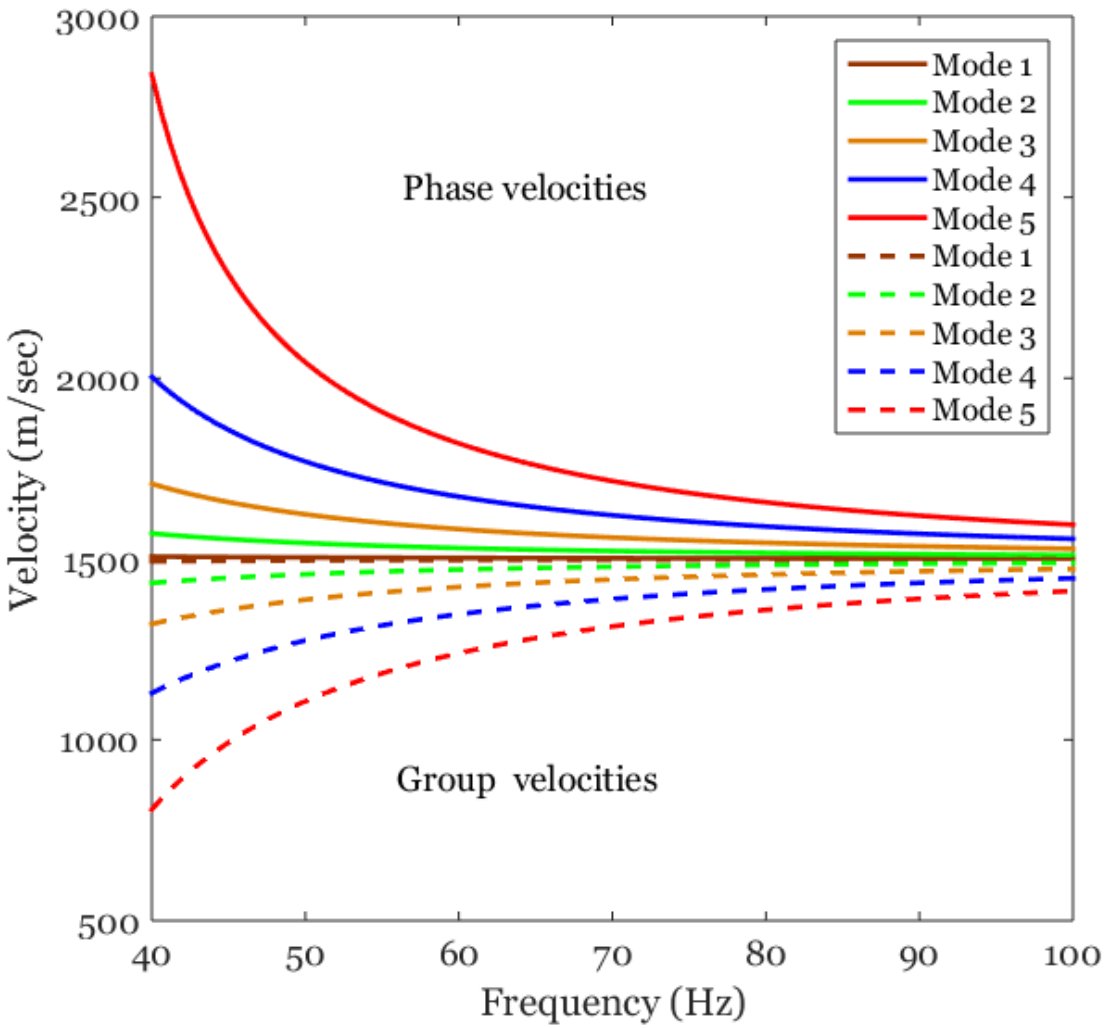
Ταχύτητα Ομάδας

$$u_n(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa_n}$$

Ταχύτητες ομάδας (group or modal velocities)

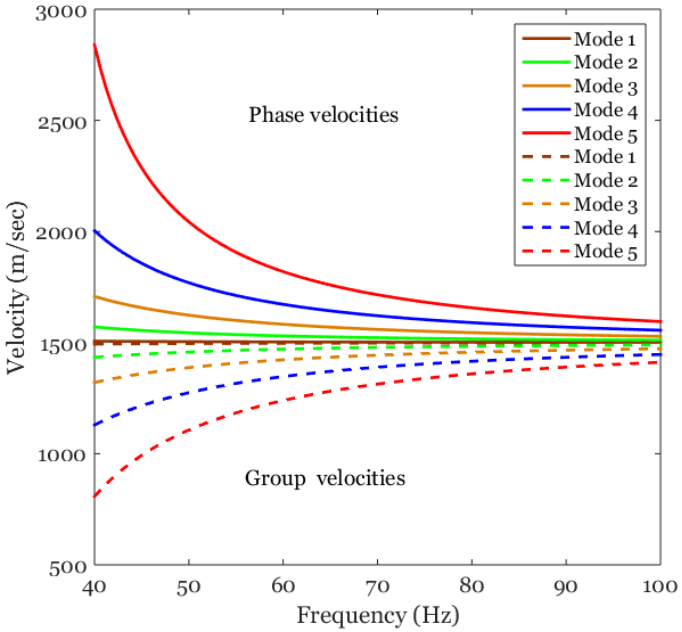


Ιδιομορφές διάδοσης (κυματοπακέτα)


Phase velocities
Group velocities
Mode 1
Mode 2
Mode 3
Mode 4
Mode 5
Mode 1
Mode 2
Mode 3
Mode 4
Mode 5
Velocity (m/sec)
Frequency (Hz)
3000
2500
2000
1500
1000
500
40
50
60
70
80
90
100

Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη της ιδιομορφής, τόσο μικρότερη είναι η ταχύτητα ομάδας μακριά από τη συχνότητα αποκοπής.

Η ταχύτητα ομάδας είναι πάντα μικρότερη της (μέγιστης) ταχύτητας διάδοσης του ήχου στο νερό μακριά από τη συχνότητα αποκοπής.



Ταχύτητα Ομάδας

$$u_n(\omega) \simeq \frac{\Delta\omega}{\Delta\kappa_n} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\kappa_n(\omega_2) - \kappa_n(\omega_1)}, \quad \Delta\omega \ll$$

Ακριβέστερος υπολογισμός στην κεντρική συχνότητα ενός σήματος στενού εύρους

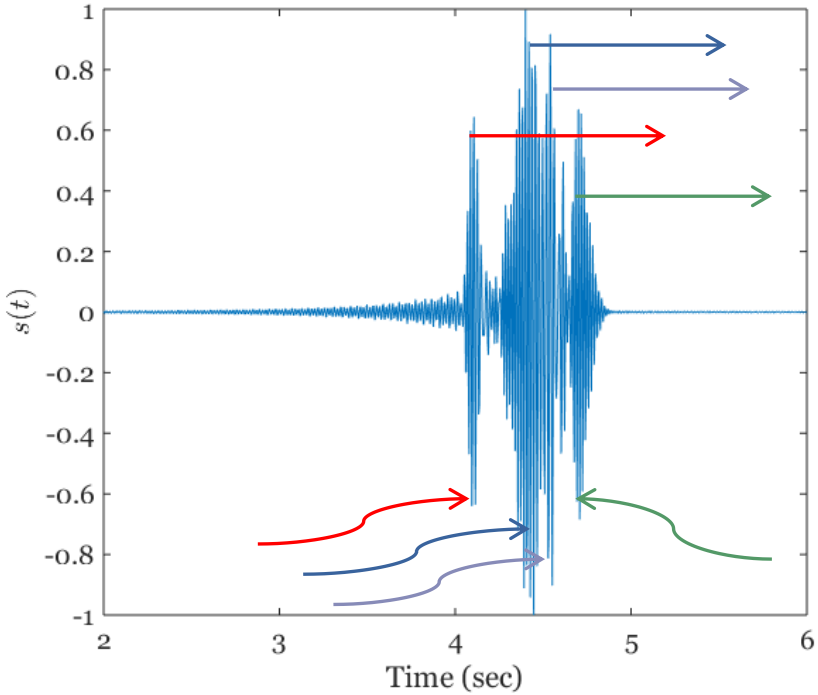
$$\frac{1}{u_n(\omega_0)} = \left.\frac{\partial\kappa_n}{\partial\omega}\right|_{\omega_0} \simeq \frac{\omega}{\kappa_{n,0}} \int_0^D \frac{u_{n,0}^2(z)}{\rho(z)c^2(z)} dz$$

D : Μέγιστο πλάτος κυματοδηγού

Ταχύτητα Ομάδας

$$u_n(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa_n}$$

Ταχύτητες ομάδας (group or modal velocities)



Ιδιομορφές διάδοσης (κυματοπακέτα)

Υπολογισμός σήματος στο πεδίο του χρόνου

Συνάρτηση διέγερσης πηγής *S(ω)*

Υπολογισμός του ακουστικού πεδίου σε συχνότητα *ω* για σημειακή πηγή μοναδιαίου πλάτους *: H(ω)*

Υπολογισμός του ακουστικού πεδίου σε συχνότητα *ω* για τη δεδομένη διέγερση *: P(ω)*

$$P(\omega) = H(\omega)S(\omega)$$

Για να πάρομε το σήμα στο πεδίο του χρόνου

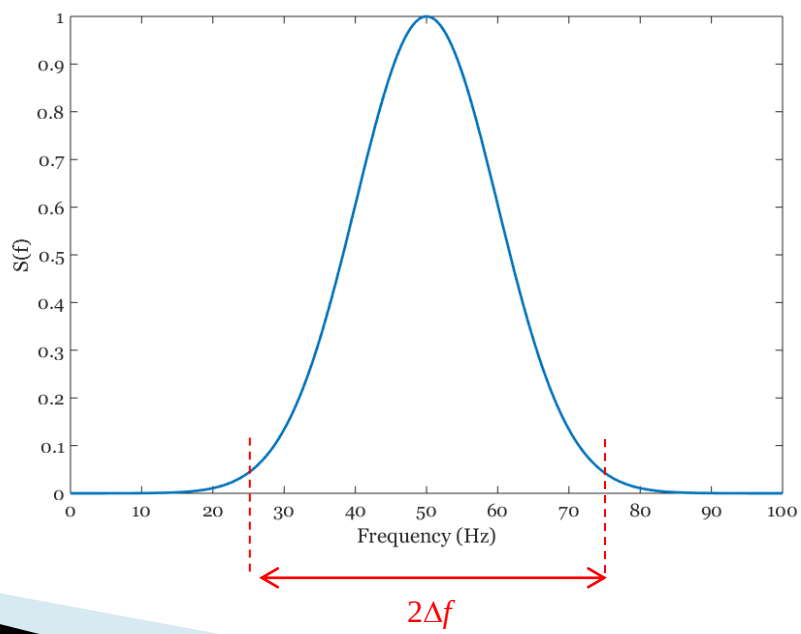
Εφαρμογή αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier

$$s(t) = \Im^{-1}P(\omega)$$

Υπολογισμός σήματος στο πεδίο του χρόνου

Συνάρτηση διέγερσης πηγής $S(\omega)$

$$S(\omega) = \exp\left[-\frac{\pi(\omega-\omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2}\right]$$

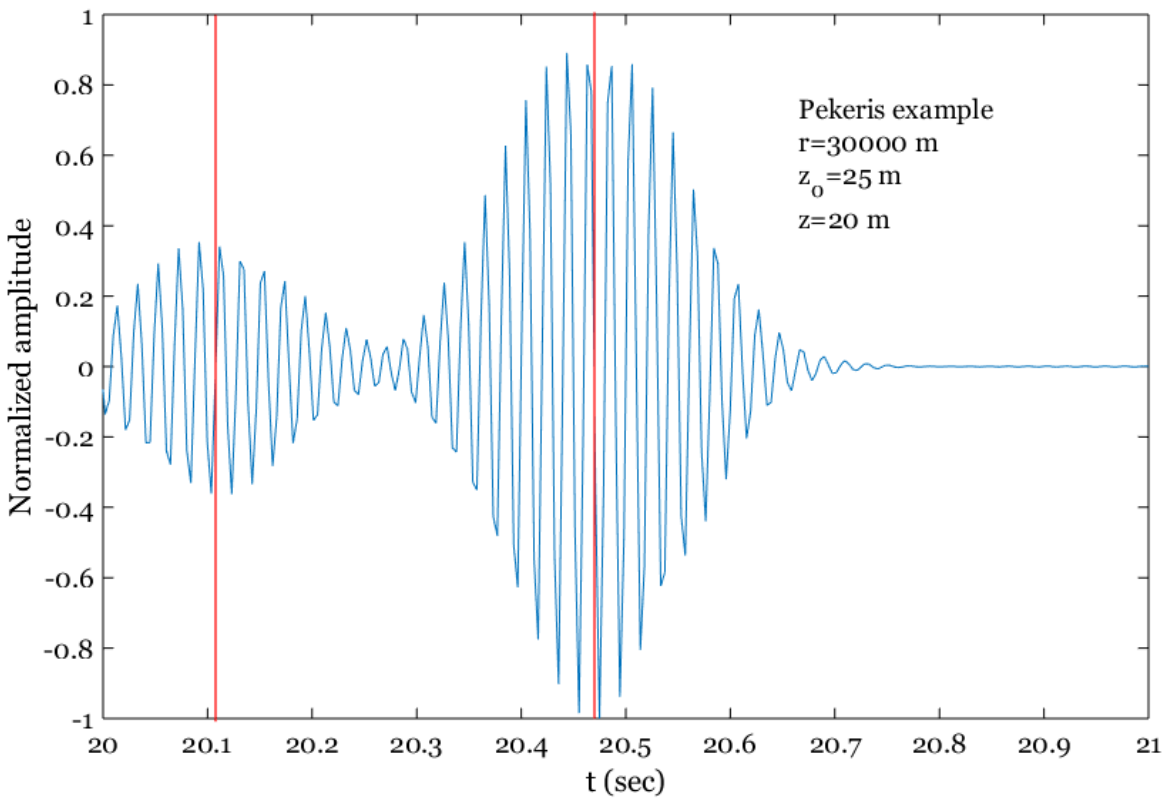


$f_0 = 50\,\text{Hz}$

$\Delta f = 25\,\text{Hz}$

Υπολογισμός σήματος στο πεδίο του χρόνου

$u_1(50) = 1491.95$ m/sec $\quad u_2(50) = 1465.80$ m/sec



h=100 m
c_w=1500 m/sec
ρ_w =1000 kg/m^3
c_b =1600 m/sec
ρ_b =1500 kg/m^3

t_1=20.107 sec $\quad t_2$=20.467 sec