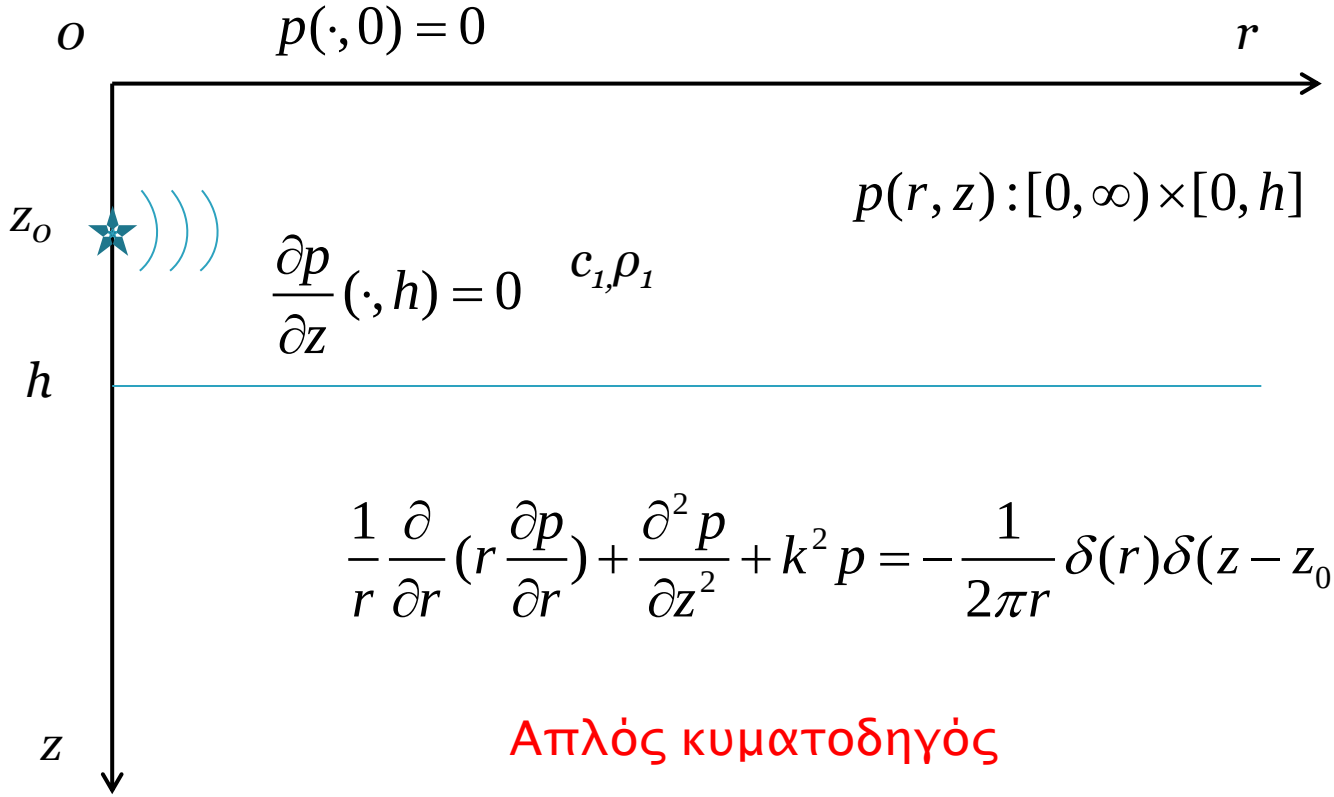
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Κυματική Διάδοση

6η διάλεξη

Π1 Απλός κυματοδηγός



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

Απλός κυματοδηγός

Δεν υπάρχει επανακτινοβολία ενέργειας από το άπειρο

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$G_1(r, r_0, \lambda) \qquad G_1 : [0, \infty)$$

$$r_0 = 0 \qquad \frac{d^2 G_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr} + \lambda G_1 = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

Π1a

Ιδιότητες Green

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left\{\varepsilon \frac{dG_1}{dr}(\varepsilon, \lambda)\right\} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\lim_{r \to \infty}\sqrt{r}\left\{\frac{dG_1}{dr}(r, \lambda) - i\sqrt{\lambda}\, G_1(r, \lambda)\right\} = 0$$

Συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$G_2(z, z_0, \lambda) \qquad G_2 : [0, h]$$

$$\frac{d^2 G_2}{dz^2} + (k^2 - \lambda) G_2 = -\delta(z - z_0)$$

$$G_2(0, z_0, \lambda) = 0$$

Π1 b

Ιδιότητες Green

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{ G_2(z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - G_2(z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda \} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{dG_2}{dz}(z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - \frac{dG_2}{dz}(z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda \right\} = -1$$

$$\frac{dG_2}{dz}(h, z_0, \lambda) = 0$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

ΘΕΩΡΗΜΑ : Έστω G_1, G_2 οι συναρτήσεις Green που επιλύουν τα προβλήματα Π1a και Π1b αντίστοιχα. Τότε η λύση του προβλήματος του απλού κυματοδηγού (Πρόβλημα Π1) δίδεται από τη σχέση

$$p(r, r_0, z, z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1(r, r_0, \lambda) G_2(z, z_0, \lambda) d\lambda$$

όπου c_λ είναι κατάλληλη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο που λαμβάνεται με τη θετική φορά.

Π1 Απλός κυματοδηγός

Έχομε δει

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G(z,z_0,\lambda)d\lambda = -\frac{\delta(z-z_0)}{r(z)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)d\lambda = -\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda = \delta(z-z_0)$$

$$p(r,r_0,z,z_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

Έχομε δει

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G(z,z_0,\lambda)d\lambda = -\frac{\delta(z-z_0)}{r(z)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)d\lambda = -\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda = \delta(z-z_0)$$

$$p(r,r_0,z,z_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\frac{d^2G_1}{dr^2}G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i r}\int_{C_\lambda}\frac{dG_1}{dr}G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1\frac{d^2G_2}{dz^2}d\lambda$$

$$-\frac{k^2}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1G_2 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\{\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}\}G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1\frac{d^2G_2}{dz^2}d\lambda - \frac{k^2}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1G_2 d\lambda =$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\{-\lambda G_1-\frac{1}{2\pi r}\delta(r-r_0)\}G_2 d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}G_1\{-k^2G_2+\lambda G_2-\delta(z-z_0)\}d\lambda$$

$$-\frac{k^2}{2\pi i}\int_{C_\lambda}G_1G_2 d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\lambda G_1G_2 d\lambda+\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_\lambda}G_2 d\lambda+\frac{k^2}{2\pi i}\int_{C_\lambda}G_1G_2 d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\lambda G_1G_2 d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\delta(z-z_0)\int_{C_\lambda}G_1 d\lambda-\frac{k^2}{2\pi i}\int_{C_l}G_1G_2 d\lambda$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_\lambda}G_2 d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\delta(z-z_0)\int_{C_\lambda}G_1 d\lambda$$

$$\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}+\lambda G_1=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

$$\frac{d^2G_2}{dz^2}+(k^2-\lambda)G_2=-\delta(z-z_0)$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r})+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_\lambda} G_2 d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\delta(z-z_0)\int_{C_\lambda} G_1 d\lambda$$

1η επιλογή

$$\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_r^+} G_2 d\lambda=0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^+} G_1(r,r_0,\lambda)d\lambda=-\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r}$$

$$\delta(z-z_0)\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^+} G_1 d\lambda=\delta(z-z_0)\cdot-\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r}=-\frac{1}{2\pi r}\delta(z-z_0)\delta(r-r_0)$$

2η επιλογή

$$\frac{1}{2\pi i}\delta(z-z_0)\int_{C_z^-} G_1 d\lambda=0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z^-} G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda=-\delta(z-z_0)$$

$$\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_z^-} G_2 d\lambda=-\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\cdot\delta(z-z_0)\cdot 2\pi i=-\frac{1}{2\pi r}\delta(z-z_0)\delta(r-r_0)$$

$$r_0=0$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$p(r,r_0,z,z_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda$$

$$r_0 = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r}) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

Η συνάρτηση G_1

$$\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}+\lambda G_1=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r) \qquad G_1:[0,\infty)$$

Λύνουμε για r>ο και εφαρμόζουμε την κατάλληλη συνθήκη στο ιδιόμορφο σημείο r=ο

$$\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}+\lambda G_1=0$$

$$G_1(r,r_0,\lambda)=AH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)+BH_0^{(2)}(\sqrt{\lambda}r)$$

$$r_0=0$$

Η συνάρτηση G_1

$$\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}+\lambda G_1=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r) \qquad r_0=0$$

Συνθήκη ακτινοβολίας

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left\{\frac{dG_1}{dr}(r,0,\lambda)-i\sqrt{\lambda}G_1(r,0,\lambda)\right\}=0$$

$$G_1(r,0,\lambda)=AH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)$$

Συνθήκη στο ιδιόμορφο σημείο

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon\frac{dG_1}{dr}(\varepsilon,0,\lambda)\right\}=-\frac{1}{2\pi}$$

$$\varepsilon\frac{dG_1}{dr}(\varepsilon,0,\lambda)=A\varepsilon\sqrt{\lambda}H_0^{(1)\prime}\sqrt{\lambda}\varepsilon)=-\frac{1}{2\pi}$$

Η συνάρτηση G_1

$$\varepsilon \frac{dG_1}{dr}(\varepsilon, 0, \lambda) = A\varepsilon\sqrt{\lambda}\, H_0^{(1)'}\sqrt{\lambda}\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi}$$

$$A\varepsilon\sqrt{\lambda}\left\{J_0^{'}(\sqrt{\lambda}\varepsilon) + i\, N_0^{'}(\sqrt{\lambda}\varepsilon)\right\} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$-A\varepsilon\sqrt{\lambda}\left\{J_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon) + i\, N_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon)\right\} = -\frac{1}{2\pi}$$

Ασυμπτωτικές εκφράσεις για μικρά ορίσματα

$$J_1(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon) \approx \frac{\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}{2} \qquad N_1(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon) \approx -\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\,\varepsilon},\ \varepsilon \neq 0$$

$$-A\varepsilon\sqrt{\lambda}\left\{\frac{\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}{2} - i\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}\right\} = -\frac{1}{2\pi} \qquad -\frac{1}{2}A\varepsilon^2\lambda + i\frac{2A}{\pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

για $\varepsilon \to 0$ $-\frac{1}{2}A\varepsilon^2\lambda + i\frac{2A}{\pi} \to i\frac{2A}{\pi}$ ➡ $i\frac{2A}{\pi} = -\frac{1}{2\pi}$ ➡ $A = \frac{i}{4}$

Η συνάρτηση G_1

$$G_1(r, r_0, \lambda) = AH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r) \qquad r_0 = 0$$

$$A = \frac{i}{4} \longrightarrow \boxed{G_1(r, 0, \lambda) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r)}$$

Για μεγάλα ορίσματα

$$H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r \sqrt{\lambda}}}\, e^{i(\sqrt{\lambda} r - \pi/4)}$$

$$G_1(r, 0, \lambda) \approx \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi r \sqrt{\lambda}}}\, e^{i(\sqrt{\lambda} r - \pi/4)}$$

Η συνάρτηση G_2

$$\frac{d^2 G_2}{dz^2} + (k^2 - \lambda) G_2 = -\delta(z - z_0) \qquad G_2 : [0, h]$$

Ιδιόμορφο σημείο στο z_o

Λύνουμε για $z < z_o$ και για $z > z_o$ εφαρμόζουμε την κατάλληλη συνθήκη στο ιδιόμορφο σημείο z_o

$$\gamma^2 = k^2 - \lambda$$

$$G_2(z, z_0, \lambda) = \begin{cases} A_2(z_0, \lambda) e^{i\gamma z} + B_2(z_0, \lambda) e^{-i\gamma z}, & 0 \le z \le z_0 \\ A_3(z_0, \lambda) e^{i\gamma z} + B_3(z_0, \lambda) e^{-i\gamma z}, & z_0 \le z < h \end{cases}$$

Η συνάρτηση G_2

$$\frac{d^2G_2}{dz^2}+(k^2-\lambda)G_2=-\delta(z-z_0) \qquad G_2:[0,h]$$

$$G_2(0,z_0,\lambda)=0$$

$$A_2+B_2=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{G_2(z_0+\varepsilon,z_0,\lambda)-G_2(z_0-\varepsilon,z_0,\lambda\}=0$$

$$A_2e^{i\gamma z_0}+B_2e^{-i\gamma z_0}=A_3e^{i\gamma z_0}+B_3e^{-i\gamma z_0}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{dG_2}{dz}(z_0+\varepsilon,z_0,\lambda)-\frac{dG_2}{dz}(z_0-\varepsilon,z_0,\lambda\right\}=-1$$

$$i\gamma\left\{A_3e^{i\gamma z_0}-B_3e^{-i\gamma z_0}-A_2e^{i\gamma z_0}+B_2e^{-i\gamma z_0}\right\}=-1$$

$$\frac{dG_2}{dz}(h,z_0,\lambda)=0$$

$$i\gamma A_3e^{i\gamma h}-i\gamma B_3e^{-i\gamma h}=0$$

Η συνάρτηση G_2

$$\frac{d^2 G_2}{dz^2} + (k^2 - \lambda) G_2 = -\delta(z - z_0) \qquad G_2 : [0, h]$$

Λύση συστήματος

$$A_2 = -\frac{i}{2\gamma} \frac{\cos\gamma(z_0 - h)}{\cos\gamma h}, \quad B_2 = \frac{i}{2\gamma} \frac{\cos\gamma(z_0 - h)}{\cos\gamma h},$$

$$A_3 = \frac{e^{-i\gamma h}}{2\gamma} \frac{\sin\gamma z_0}{\cos\gamma h}, \qquad B_3 = \frac{e^{i\gamma h}}{2\gamma} \frac{\sin\gamma z_0}{\cos\gamma h}.$$

$$G_2(z, z_0, \lambda) = \frac{\cos\gamma(z_0 - h)}{\gamma\cos\gamma h} \sin\gamma z, \quad 0 \le z \le z_0$$

$$G_2(z, z_0, \lambda) = \frac{\sin\gamma z_0}{\gamma\cos\gamma h} \cos\gamma(z - h), \quad z_0 \le z \le h$$

Η ακουστική πίεση

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0) \qquad p(r,z):[0,\infty)\times[0,h]$$

$$p(r,r_0,z,z_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)G_2(z,z_0,\lambda)\,d\lambda$$

$$p(r,r_0,z,z_0)=\begin{cases} -\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{C_\lambda}\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\cos\gamma(z_0-h)}{\cos\gamma h}\right\}\sin\gamma z\, H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)\,d\lambda, & 0\le z\le z_0 \\ -\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{C_\lambda}\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\sin\gamma z_0}{\cos\gamma h}\right\}\cos\gamma(z-h)\, H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)\,d\lambda, & z_0\le z\le h \end{cases}$$

$$r_0=0$$