Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Κυματική Διάδοση

2023-2024

1η διάλεξη

Μιχάλης Ταρουδάκης

Περιεχόμενα

- Θεμελίωση της Κυματικής Θεωρίας
- Γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση
- Γενικές λύσεις
- Η ακουστική εξίσωση στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων
- Η εξίσωση Bessel και λύσεις της
- Πρόβλημα Sturm-Liouville
- Θεωρήματα αναπαράστασης
- Συναρτήσεις Green

Περιεχόμενα

- Η ακουστική εξίσωση σε κυματοδηγούς
- Ο απλός κυματοδηγός
- Ο κυματοδηγός Pekeris
- Ο κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη ταχύτητα διάδοσης σε μία διάσταση
- Ο κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη ταχύτητα διάδοσης και γεωμετρία σε δύο διαστάσεις
- Ευρυζώνια ακουστικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier
- Φασική ταχύτητα – ταχύτητα ομάδας

Απαιτούμενο υπόβαθρο

- Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
- Διαφορικές Εξισώσεις με μερικές παραγώγους
- Αριθμητική Ανάλυση
- Μιγαδικοί Αριθμοί
- Προγραμματισμός σε οποιοδήποτε γλώσσα-περιβάλλον

Διδασκαλία Μαθήματος

Οι διαλέξεις με τη μορφή .pdf θα ανεβαίνουν στην ιστοσελίδα του μαθήματος

users.math.uoc.gr/~taroud/Wave2024.htm

Στην ιστοσελίδα θα ανεβαίνουν και οι εκφωνήσεις των ασκήσεων του Μαθήματος

Εξέταση μαθήματος

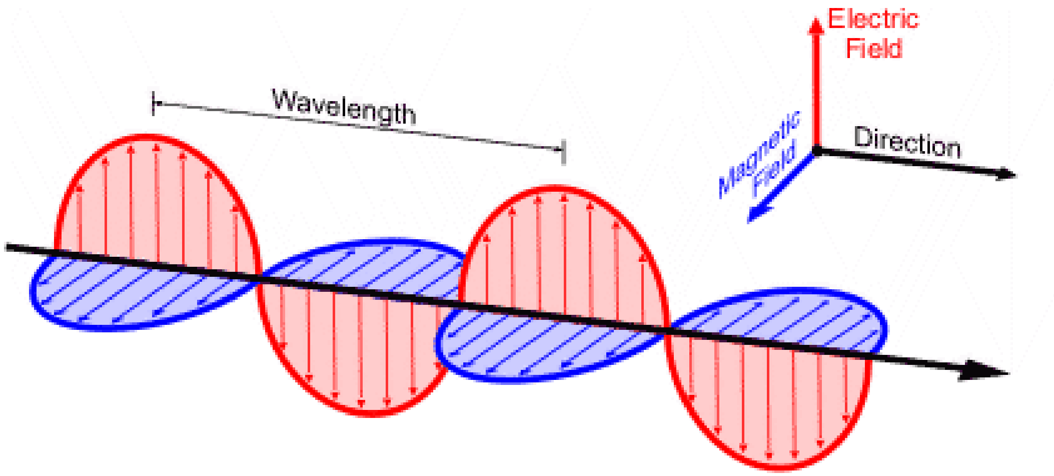
- Θα δοθούν δύο εργαστηριακές ασκήσεις στη διάρκεια του εξαμήνου.
- Οι ασκήσεις θα παραδοθούν και θα εξετασθούν δια ζώσης.
- Η παράδοση και εξέταση και των δύο ασκήσεων είναι υποχρεωτική για συμμετοχή των φοιτητών στην τελική εξέταση
- Η βαθμολογία των ασκήσεων συμμετέχει στη βαθμολογία του μαθήματος σε ποσοστό 30 %
- Τελική εξέταση με συμμετοχή στη βαθμολογία του μαθήματος 70 %

Τι είναι κύμα

- **Κύμα** ονομάζεται μια διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και το χρόνο διαμέσου ενός μέσου.
- Προέρχεται από το αρχείο ρήμα «κύω» (φουσκώνω).
- Διάδοση γίνεται συνήθως σε υλικά μέσα, και χαρακτηρίζεται από την κίνηση μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου.
- Ορισμένα είδη κυμάτων, όπως τα ηλεκτρομαγνητικά, μπορούν να διαδίδονται και στο κενό.

Τι είναι κύμα

- Η διαταραχή αφορά ένα συγκεκριμένο φυσικό μέγεθος, ανάλογα με το είδος του κύματος.
- Για παράδειγμα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα η διαταραχή αφορά την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

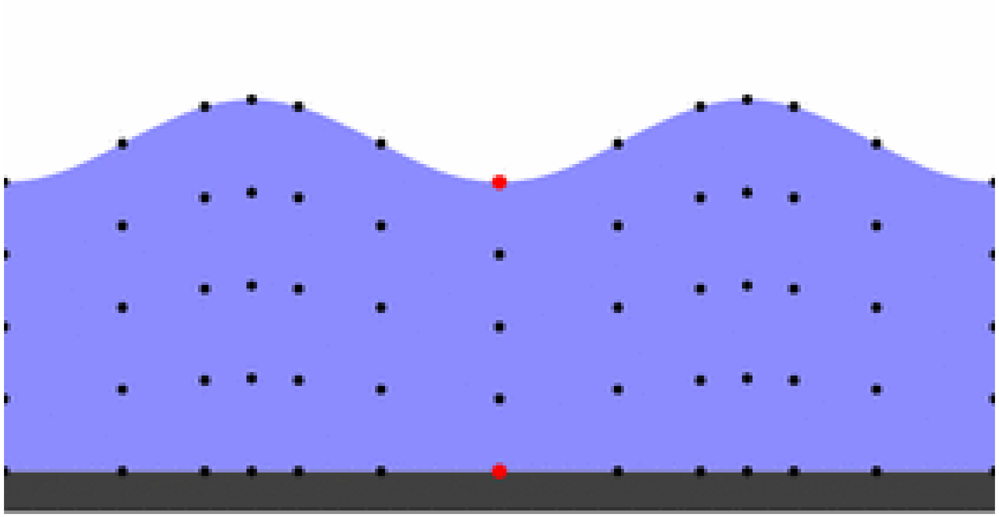


Τι είναι κύμα

- Στα κύματα της θάλασσας αναφερόμαστε στην ανύψωση της επιφάνειας της θάλασσας

Τι είναι κύμα

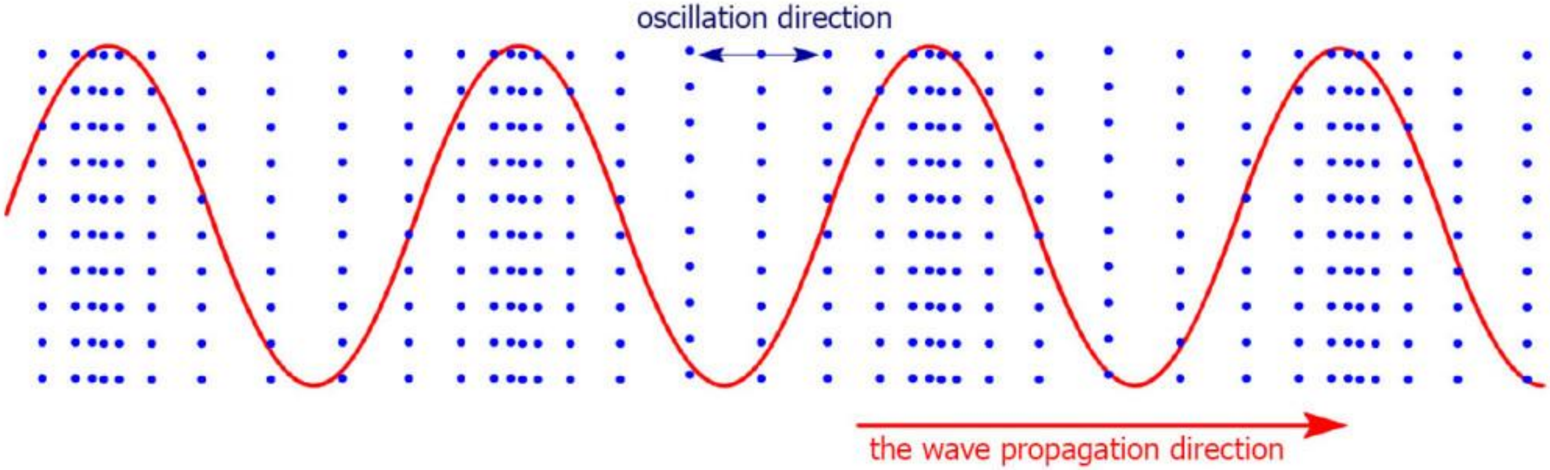
- Στα κύματα της θάλασσας αναφερόμαστε στην ανύψωση της επιφάνειας της θάλασσας



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4861714

Τι είναι κύμα

- Στα ακουστικά κύματα συνήθως αναφερόμαστε στην ακουστική πίεση.



Τι είναι κύμα

- Όλα τα είδη κυμάτων έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: **μεταφέρουν ενέργεια.**

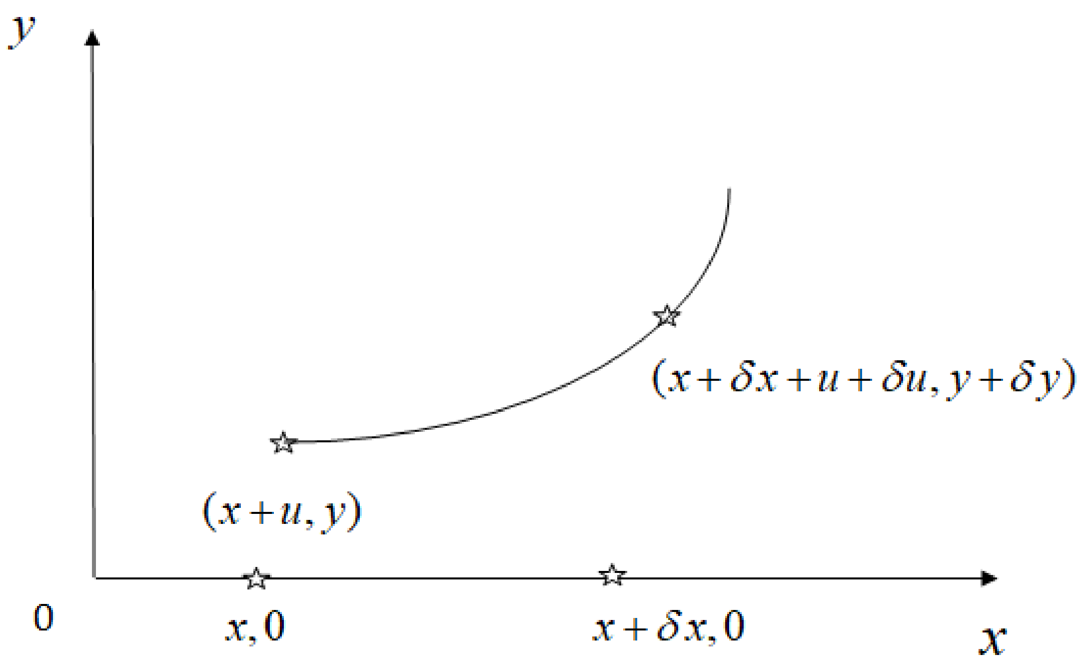
Λίγη ιστορία.....

- 1746, ο D’ Alembert
  διατύπωσε τη μονοδιάστατη
  κυματική εξίσωση
  (για ταλαντευόμενη χορδή).

- 1766 ο Euler
  αναφέρεται στην τρισδιάστατη
  κυματική εξίσωση.

Θεμελίωση Κυματικής Θεωρίας

- Κύματα σε χορδές

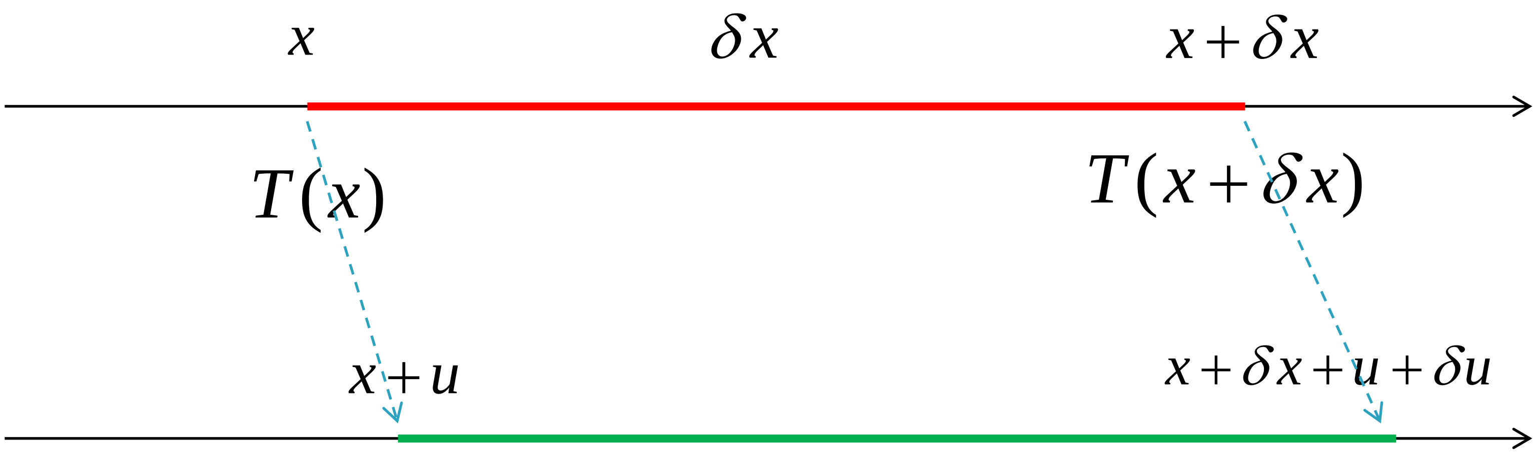


$$u = u(x,t),\ y = y(y,t)$$

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x \qquad \delta y = \frac{\partial y}{\partial x}\delta x$$

Θεμελίωση Κυματικής Θεωρίας

- Διαμήκη κύματα σε χορδές $\quad y \equiv 0$



$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x$$

Διαμήκης κίνηση χορδής

- 2ος Νόμος Newton

$$m\gamma = F$$

ρ μάζα ανά μονάδα μήκους

$$\rho \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x+\delta x, t) - T(x,t)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T(x+\delta x, t) - T(x,t)}{\delta x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

Νόμος Hooke

$$(T - T_0)/A = E\varepsilon$$

A : διατομή
E : μέτρο ελαστικότητας

ε : παραμόρφωση $\varepsilon = \partial u / \partial x$

$$\delta T = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Διαμήκης κίνηση χορδής

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{EA}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$c_t = \sqrt{\frac{EA}{\rho}}$$

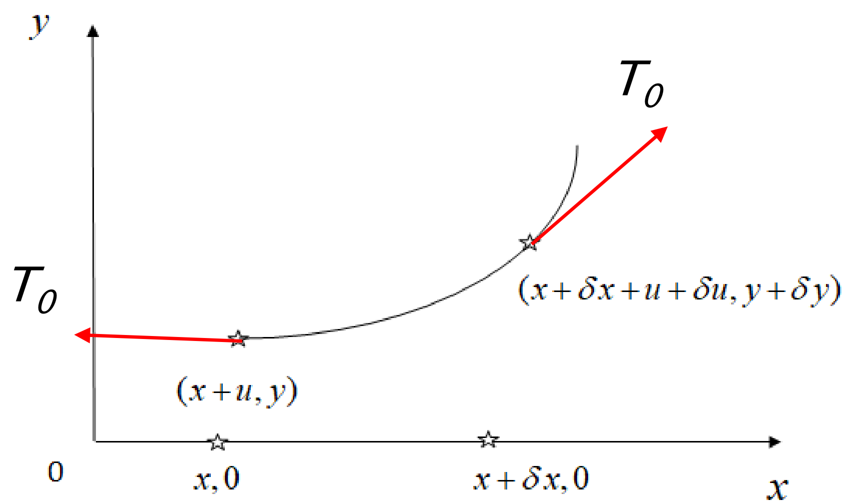
$$\boxed{\frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{\rho_v}}$$

Εγκάρσια κίνηση χορδής

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

Προβλήματα οριακών τιμών

$$\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0$$

$$u(0,t)=0, u(L,t)=0, t>0$$

$$u(x,0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x),\quad 0<x<L$$

Λύση D'Alembert

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u \rightarrow y$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) y = 0$$

c: σταθερό

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) y = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) y = 0$$

Λύση D'Alembert

Θεώρημα Ι

Η εξίσωση $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)y=0$ έχει λύση $y=f(x-ct)$

όπου f οποιαδήποτε συνάρτηση με όρισμα $x-ct$

Θεώρημα ΙΙ

Η λύση της εξίσωσης $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ είναι

$$y=f(x-ct)+g(x+ct)$$

Λύση D'Alembert

Θεώρημα Ι

Η εξίσωση $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)y=0$ έχει λύση $y=f(x-ct)$

όπου f οποιαδήποτε συνάρτηση με όρισμα $x-ct$

Απόδειξη

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial f(x-ct)}{\partial(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x}=f'(x-ct)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial f(x-ct)}{\partial(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}=-cf'(x-ct)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)y=f'(x-ct)+\frac{1}{c}\left[-cf'(x-ct)\right]=0$$

Λύση D'Alembert

Θεώρημα Ια

Η εξίσωση $\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)y=0$ έχει λύση $y=g(x+ct)$

όπου f οποιαδήποτε συνάρτηση με όρισμα $x+ct$

Λύση D'Alembert

Θεώρημα ΙΙ

Η λύση της εξίσωσης $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ είναι $y = f(x-ct) + g(x+ct)$

Απόδειξη

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(x-ct) + g'(x+ct)\right)$$

$$= \frac{\partial f'(x-ct)}{\partial(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + \frac{\partial g'(x+ct)}{\partial(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial x}$$

$$= f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

Λύση D'Alembert

Θεώρημα ΙΙ

Η λύση της εξίσωσης $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ είναι $y = f(x-ct) + g(x+ct)$

Απόδειξη

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-cf'(x-ct) + cg'(x+ct)\right)$$

$$= -c\frac{\partial f'(x-ct)}{\partial(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + c\frac{\partial g'(x+ct)}{\partial(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}$$

$$= c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Λύση D'Alembert

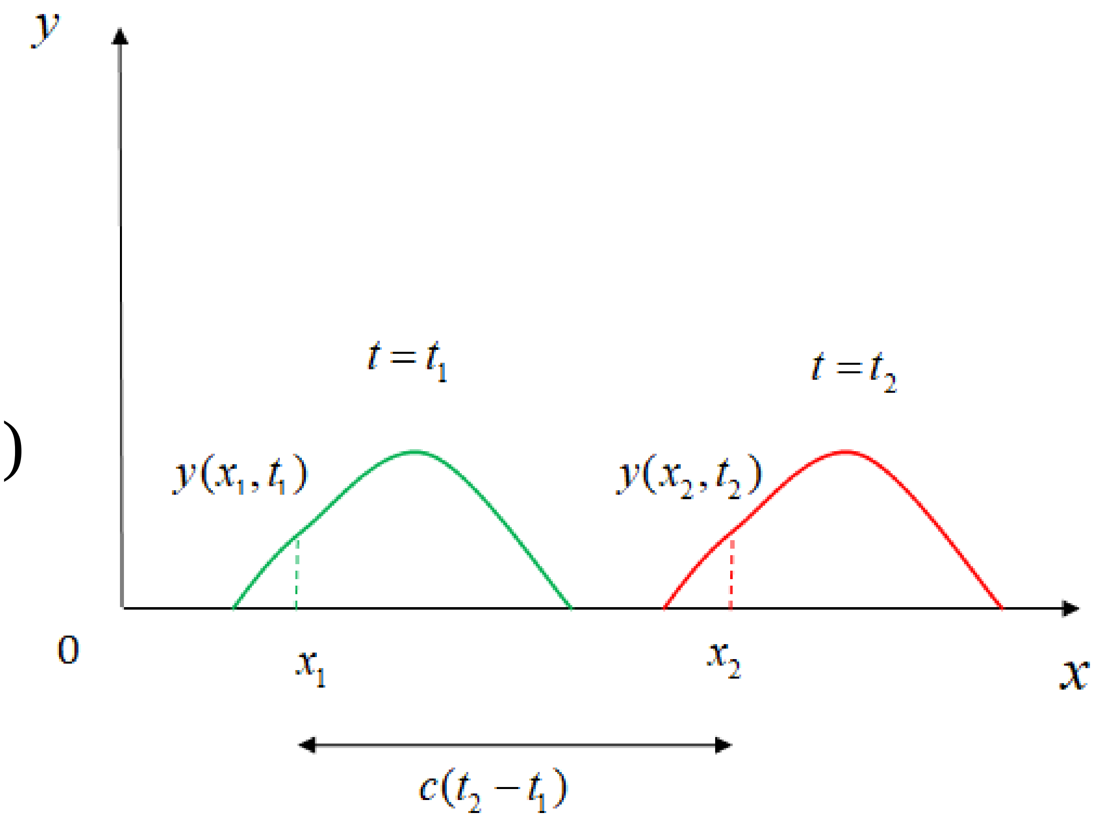
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$y = f(x - ct)$$

$$x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2 \Rightarrow$$

$$y(x_1 - ct) = y(x_2 - ct_2)$$

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$



Λύση D'Alembert

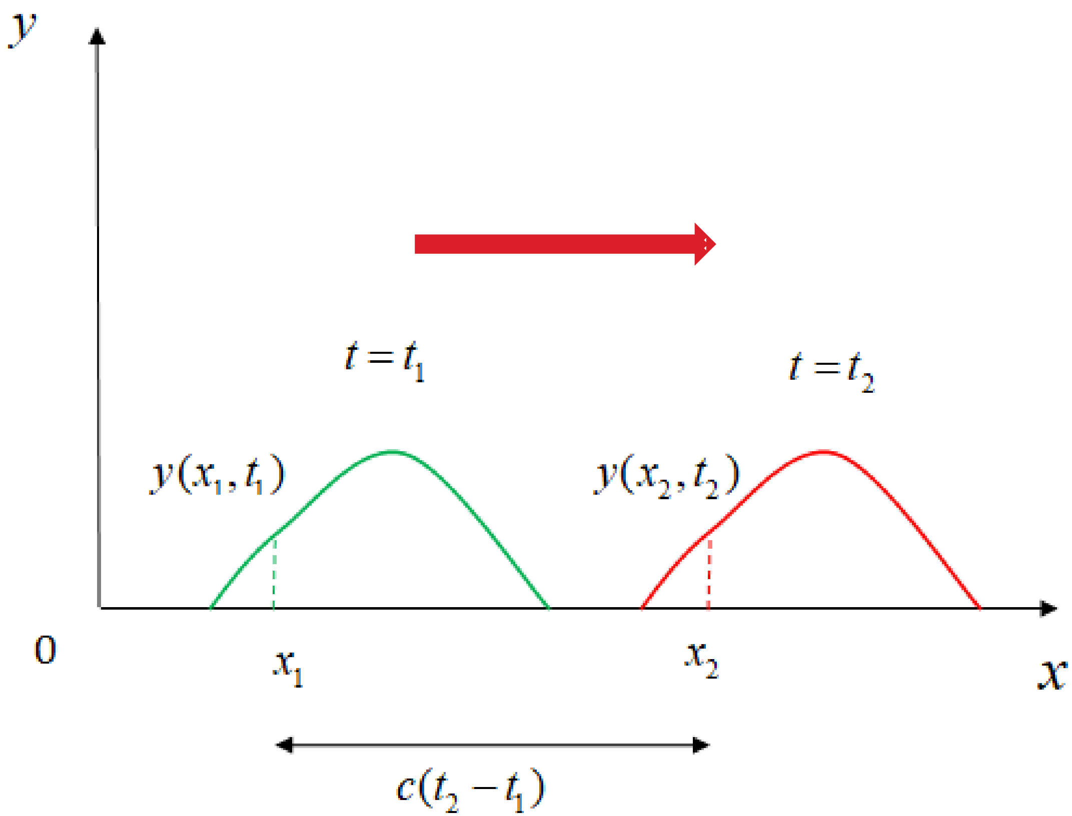
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$y = f(x - ct)$$

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$

Μέση ταχύτητα

$$c = \frac{(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1}$$



$$y = f(x - ct)$$

Αντιπροσωπεύει μετατόπιση τυχαίου σχήματος που οδεύει προς την θετική κατεύθυνση.

Λύση D'Alembert

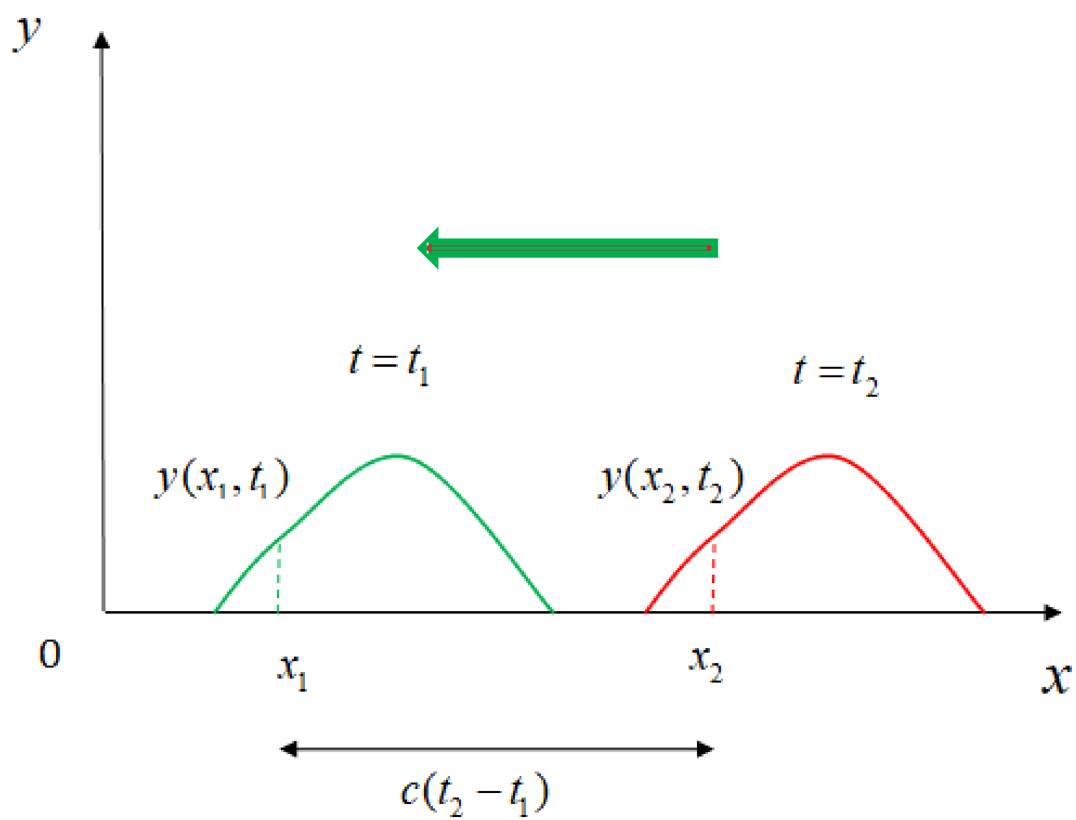
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$y = f(x - ct)$$

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$

Μέση ταχύτητα

$$c = \frac{(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1}$$



$$y = g(x + ct)$$

Αντιπροσωπεύει μετατόπιση τυχαίου σχήματος που οδεύει προς την αρνητική κατεύθυνση.

Αρμονικά κύματα

- Γενικές συναρτήσεις δεν αποτελούν πάντα λύσεις σε γενικά προβλήματα κυμάτων

- Λύσεις ημιτονοειδούς μορφής αποτελούν λύσεις σε ευρείες κλάσεις κυματικών προβλημάτων και θα μας απασχολήσουν σε αυτό το μάθημα.

Αρμονικά κύματα

$$y = a\cos(\alpha(x - ct) + \varepsilon)$$
$$y = b\cos(\beta(x + ct) - \gamma)$$

$$a, b, \alpha, \beta, \varepsilon, \gamma \in \mathbb{R} \qquad a, b, \alpha, \beta > 0$$

Αρχικές συνθήκες στην εξίσωση της εγκάρσιας κίνησης της χορδής

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$y = a\cos(\alpha x + \varepsilon) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \alpha c a \sin(\alpha x + \varepsilon)$$

$$y = b\cos(\beta x - \gamma) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -\beta c b \cos(\beta x - \gamma)$$

Αρμονικά κύματα

$$y = a\cos(\alpha(x - ct) + \varepsilon)$$

$$y = b\cos(\beta(x + ct) - \gamma)$$

$a, b, \alpha, \beta, \varepsilon, \gamma \in \mathbb{R}$ $\qquad a, b, \alpha, \beta > 0$

Πλάτος a, b

Για δεδομένο t η μετατόπιση y είναι περιοδική *στο* x

Μήκος κύματος λ: Ελάχιστη απόσταση που η μετατόπιση y επαναλαμβάνει τις τιμές της

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Αρμονικά κύματα

$$y = a\cos(\alpha(x - ct) + \varepsilon)$$

$$y = b\cos(\beta(x + ct) - \gamma)$$

Περίοδος κύματος T : Χρόνος που απαιτείται για να περάσει ένα πλήρες μήκος κύματος από ένα συγκεκριμένο σημείο

$$T = \frac{\lambda}{c}$$

Συχνότητα κύματος f : Αριθμός μηκών κύματος που περνούν από ένα συγκεκριμένο σημείο στη μονάδα του χρόνου.

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{T}$$

Αρμονικά κύματα

$$y = a\cos(\alpha(x - ct) + \varepsilon)$$

$$y = b\cos(\beta(x + ct) - \gamma)$$

Κυκλική συχνότητα ω: $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

Αριθμός κύματος k: $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi f}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

ε, γ ***: Σταθερές φάσεις .*** Όταν οι διαφορές φάσεις δύο όμοιων κατά τα άλλα κυμάτων είναι 0 ή ζυγά πολλαπλάσια του π, τα κύματα είναι «***σε φάση***». Σε διαφορετική περίπτωση είναι «***εκτός φάσης***».

Αρμονικά κύματα

$$y = a\cos(\alpha(x-ct)+\varepsilon)$$
$$y = b\cos(\beta(x+ct)-\gamma)$$

$$\alpha = \beta = k$$

$$y = a\cos(kx-\omega t+\varepsilon)$$
$$y = b\cos(kx+\omega t-\gamma)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

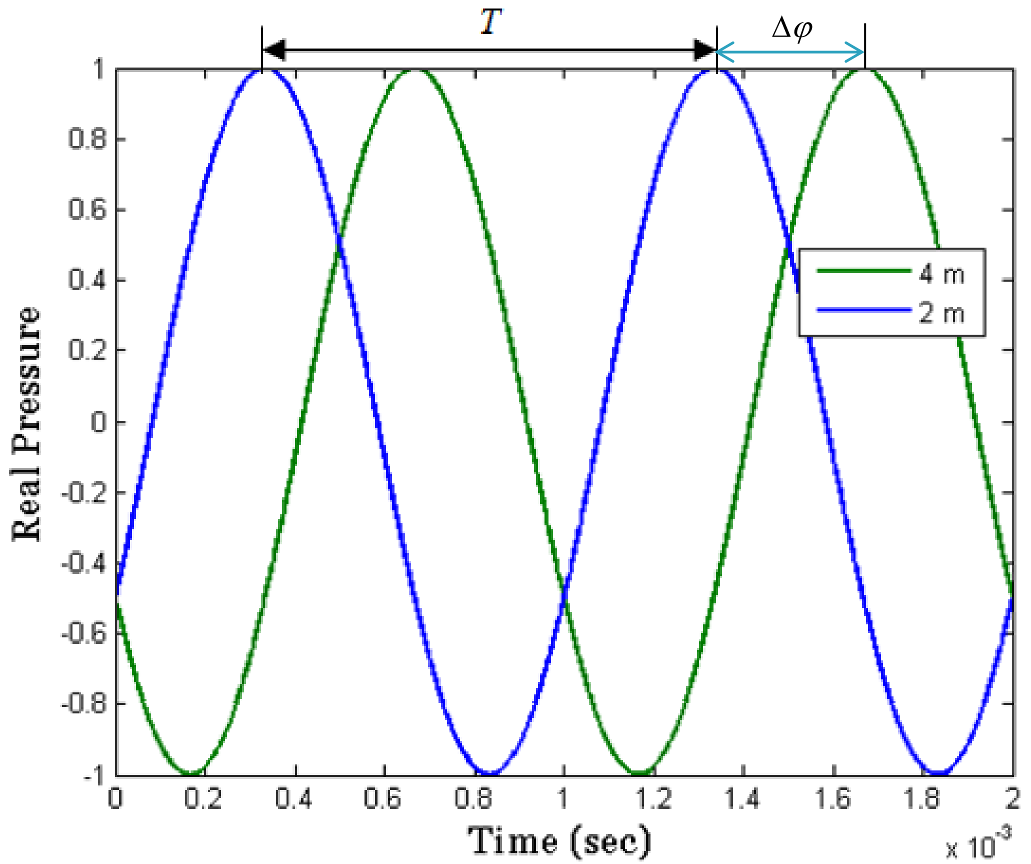
$$y = aR\left[e^{i(kx-\omega t+\varepsilon)}\right]$$
$$= R\left[ae^{i\varepsilon}e^{i(kx-\omega t)}\right]$$
$$= R\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]$$

Εάν y είναι μια πραγματική φυσική παράμετρος

$$y = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$y = Be^{i(kx+\omega t)}$$

Αρμονικά κύματα



Αρμονικά κύματα