Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

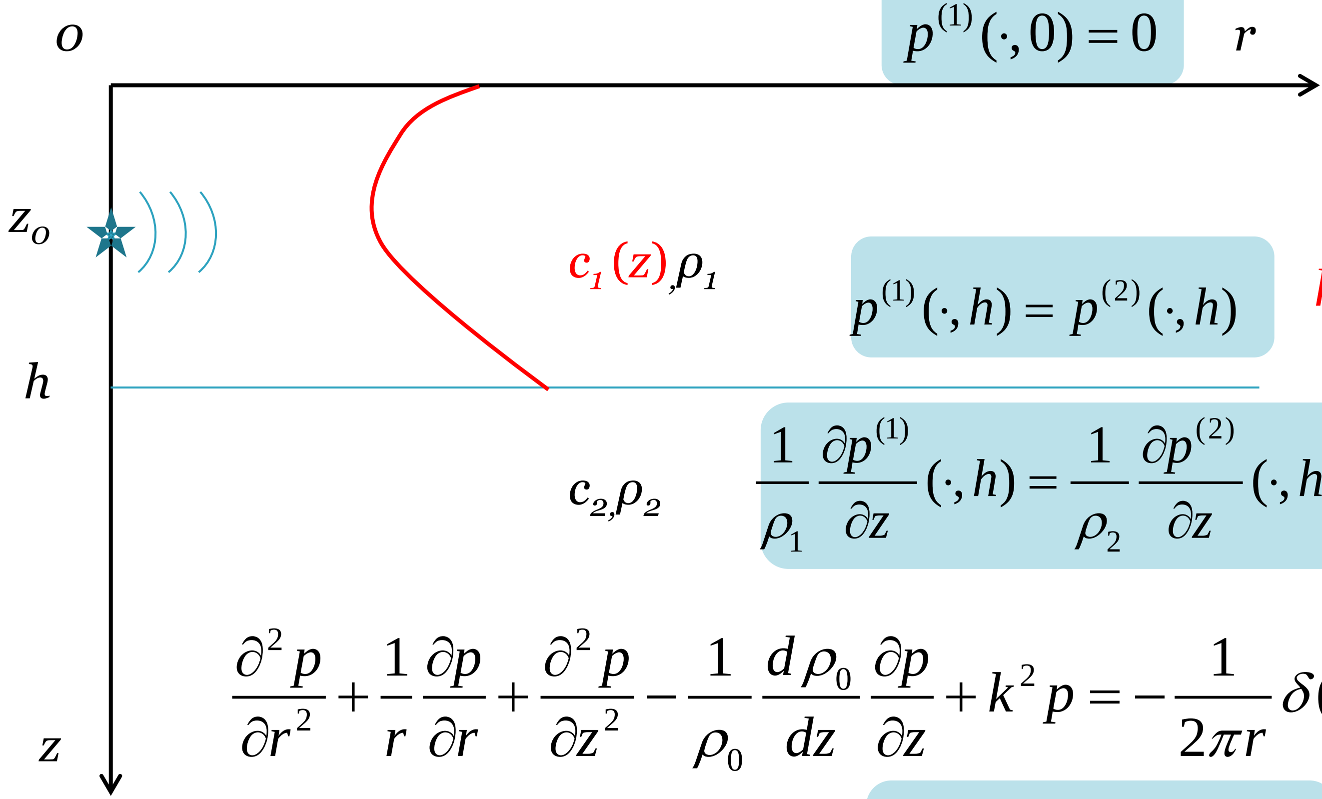
Κυματική Διάδοση

10η διάλεξη

2023-2024

Μιχάλης Ταρουδάκης

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



$$p^{(1)}(\cdot,0)=0$$

$$p^{(1)}(\cdot,h)=p^{(2)}(\cdot,h)$$

$$k_1(z)=\frac{\omega}{c_1(z)}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}(\cdot,h)=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial z}(\cdot,h)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{\partial p}{\partial z}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(z-z_0)$$

$$\lim_{z\to\infty} p^{(2)}(\cdot,z)=0$$

Δεν υπάρχει επανακτινοβολία ενέργειας από το άπειρο

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u(z):[0,\infty)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{du}{dz}(z)\right)+\left(\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)}-\frac{\lambda}{\rho_0(z)}\right)u(z)=0$$

$$u(z)=\begin{cases} u^{(1)}(z) & \text{για} \quad 0\le z\le h \\ u^{(2)}(z) & \text{για} \quad z\ge h \end{cases}$$

$$\rho_0(z)=\begin{cases} \rho_1 & \text{για} \quad 0\le z\le h \\ \rho_2 & \text{για} \quad z> h \end{cases}$$

$$k(z)=\begin{cases} \dfrac{\omega}{c_1(z)}=k_1(z) & \text{για} \quad 0\le z\le h \\[2ex] \dfrac{\omega}{c_2}=k_2 & \text{για} \quad z> h \end{cases}$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων S-L

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{du}{dz}(z)\right)+\left(\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)}-\frac{\lambda}{\rho_0(z)}\right)u(z)=0$$

$$p(r,z)=\sum_{n=1}^{N}A_n(r)u_n(z)+\int_S b(r,\lambda)u(z,\lambda)d\lambda$$

Σε μεγάλες αποστάσεις

$$p(r,z)\approx\sum_{n=1}^{N}A_n(r)u_n(z)$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

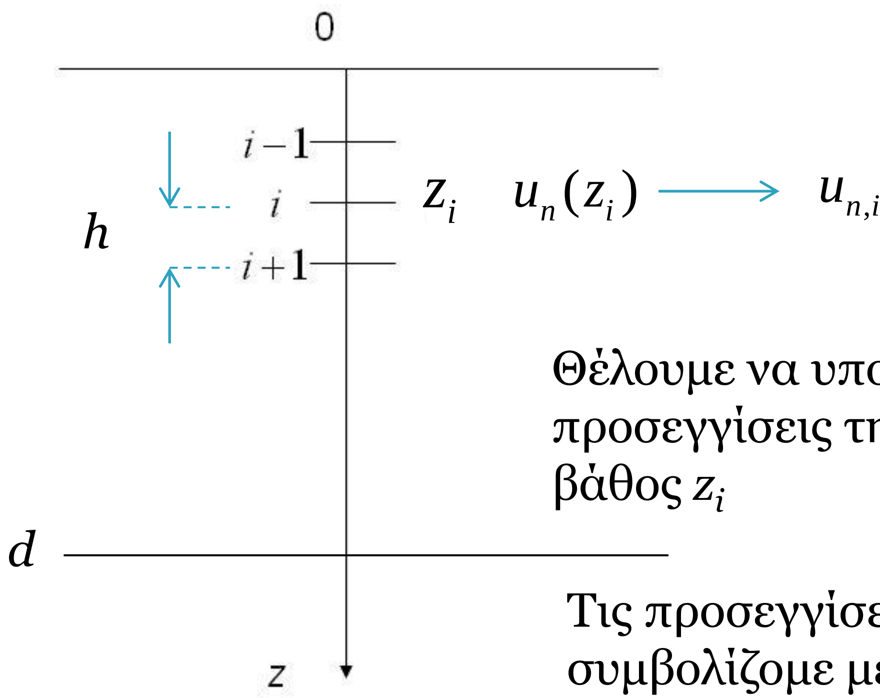
$$\frac{d^2 u^{(1)}}{dz^2}(z) + (k_1^2(z) - \lambda) u^{(1)}(z) = 0$$

Η εξίσωση του προβλήματος S-L στο νερό ΔΕΝ έχει αναλυτική λύση !

Θα πρέπει να καταφύγουμε σε αριθμητική λύση !

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Εφαρμογή σχήματος πεπερασμένων διαφορών



Διαμέριση του στρώματος του νερού σε I ισοδιαστήματα h ώστε d=Ixh

Θέλουμε να υπολογίσομε προσεγγίσεις της $u_n(z_i)$ σε κάθε βάθος z_i

Τις προσεγγίσεις αυτές τις συμβολίζομε με $u_{n,i}$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Εφαρμογή σχήματος πεπερασμένων διαφορών

$$u(z+h)=u(z)+h\frac{du}{dz}(z)+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u}{dz^2}(z)+\frac{h^3}{3!}\frac{d^3u}{dz^3}(z)+O(h^4)$$

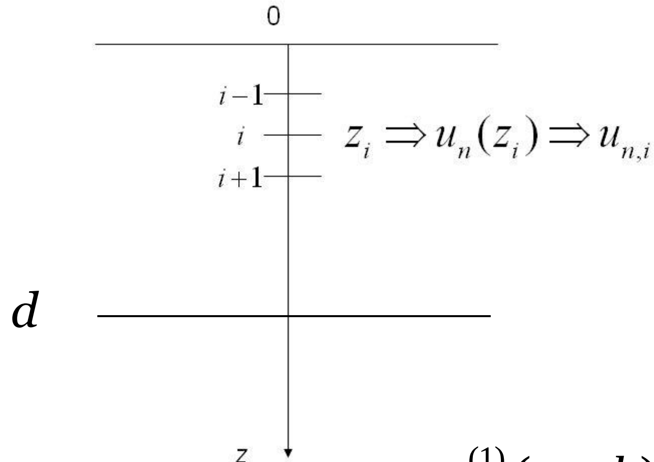
$$+$$

$$u(z-h)=u(z)-h\frac{du}{dz}(z)+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u}{dz^2}(z)-\frac{h^3}{3!}\frac{d^3u}{dz^3}(z)+O(h^4)$$

$$u(z+h)+\mathrm{u}(z-h)=2u(z)+h^2\frac{d^2u}{dz^2}(z)+O(h^4)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}(z)=\frac{u(z+h)-2u(z)+u(z-h)}{h^2}+O(h^2)$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



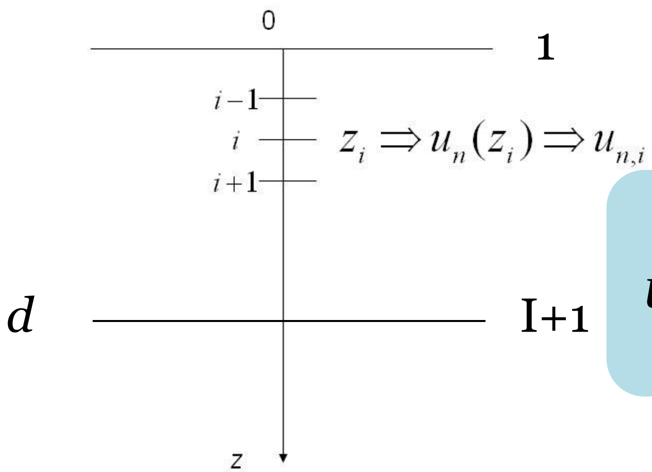
$$\frac{d^2u}{dz^2}(z) \approx \frac{u(z+h)-2u(z)+u(z-h)}{h^2}$$

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dz^2}(z)+(k_1^2(z)-\lambda)u^{(1)}(z)=0$$

$$\frac{u_n^{(1)}(z+h)-2u_n^{(1)}(z)+u_n^{(1)}(z-h)}{h^2}+(k_1^2(z)-\lambda_n)u_n^{(1)}(z) \approx 0$$

$$\frac{u_{n,i+1}^{(1)}-2u_{n,i}^{(1)}+u_{n,i-1}^{(1)}}{h^2}+(k_1^2(z_i)-\lambda)u_{n,i}^{(1)}=0$$

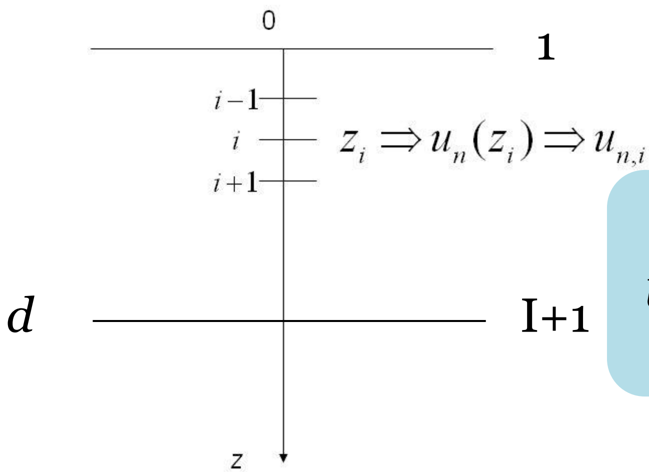
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



$$u^{(1)}_{n,i\text{-}1} = \left(2 - h^2\left[k_1^{\ 2}(z_i) - \lambda_n\right]\right)u^{(1)}_{n,i} - u^{(1)}_{n,i+1}$$

Εάν το λ_n ήταν γνωστό, εφαρμόζουμε το σχήμα για κάθε i από 2 έως I και αυτό μας δίνει I-1 αλγεβρικές γραμμικές εξισώσεις με I+1 αγνώστους. Οι επί πλέον 2 άγνωστοι σε ένα κλειστό χωρίο θα προέκυπταν από την εφαρμογή των οριακών συνθηκών που είτε θα μας έδιναν τους αγνώστους ή κάποιες σχέσεις μεταξύ τους.

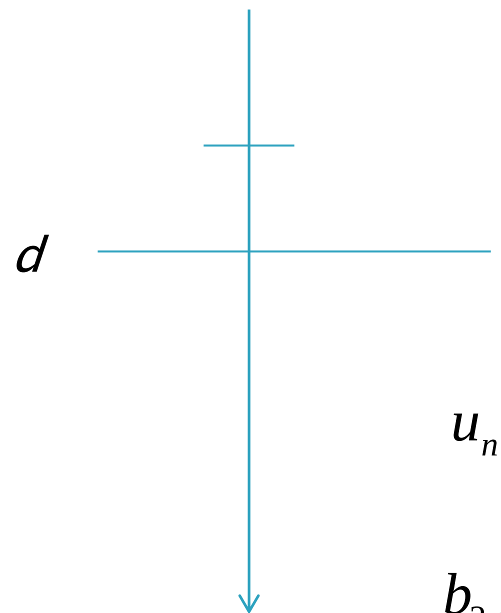
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



$$u^{(1)}_{n,i-1} = \left(2 - h^2\left[k_1^{\,2}(z_i) - \lambda_n\right]\right)u^{(1)}_{n,i} - u^{(1)}_{n,i+1}$$

Στο πρόβλημά μας το $u_{n,1}$ αντιστοιχεί στην τιμή της ιδιοσυνάρτησης στην επιφάνεια που θα πρέπει να είναι ο, αλλά για τον υπολογισμό της $u_{n,I+1}$ θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι οριακές συνθήκες στο όριο νερού-πυθμένα.

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



$I \quad u_{n,I}^{(1)}$

$I+1 \quad u_{n,I+1}^{(1)}$

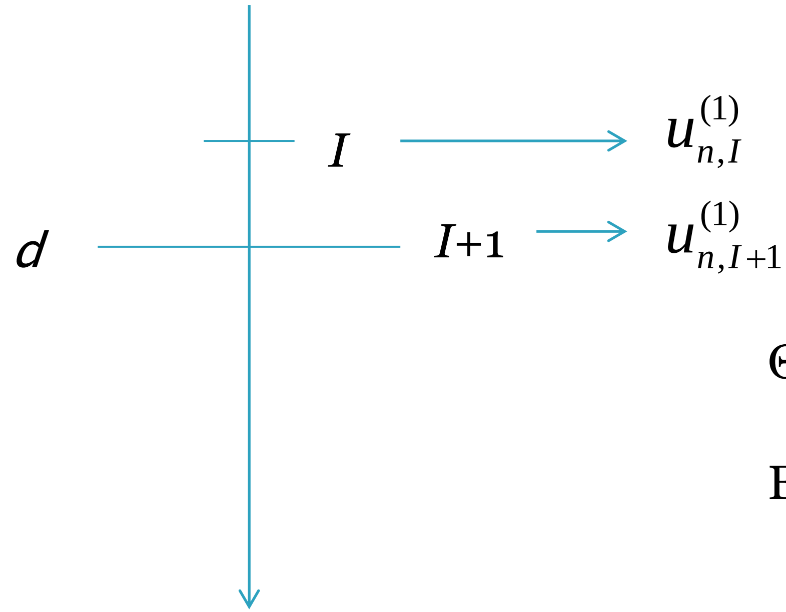
$$u_n^{(2)}(z) = A' e^{i\gamma_2 (z-d)} = A' \exp\left\{-b_{2n}\left(z-d\right)\right\}$$

$$b_{2n} = \sqrt{\lambda_n - k_2^2} = \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$u_n^{(2)}(d) = A' = u_{n,I+1}^{(1)}$$

Η σχέση αυτή δεν επαρκεί για να έχομε την ορθή λύση στο πρόβλημά μας γιατί έχομε και δεύτερη συνθήκη για την παράγωγο.

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



$$\frac{1}{\rho_1}\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) = \frac{1}{\rho_2}\frac{du_n^{(2)}}{dz}(d)$$

Θα θεωρήσουμε $\quad u_n^{(2)}(d) = 1 \qquad A' = 1$

Επομένως $\quad u_{n,I+1}^{(1)} = u_n^{(1)}(d) = 1$

$$u_n^{(2)}(z) = \exp\left\{-b_{2n}\left(z-d\right)\right\}$$

$$\frac{du_n^{(2)}}{dz}(d) = -b_{2n}$$

$$\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) = -\frac{\rho_1}{\rho_2}b_{2n}$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Αντικαθιστούμε $\frac{\rho_1}{\rho_2} = R$ $\quad B_n = b_{2n}^2 = \left[\lambda_n - \left[\frac{\omega}{c_2} \right]^2 \right]$

$$\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) = -RB_n^{1/2}$$

Θέλομε μία καλή προσέγγιση της πρώτης παραγώγου

$$u_n^{(1)}(z-h) = u_n^{(1)}(z) - h\frac{du_n^{(1)}}{dz}(z) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u_n^{(1)}}{dz^2}(z) - \frac{h^3}{6}\frac{d^3u_n^{(1)}}{dz^3}(z) + \mathrm{O}(h^4)$$

προσέγγιση 1ης τάξης

$$u_n^{(1)}(z-h) = u_n^{(1)}(z) - h\frac{du_n^{(1)}}{dz}(z) + \mathrm{O}(h^2)$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u_n^{(1)}(z-h) = u_n^{(1)}(z) - h\frac{du_n^{(1)}}{dz}(z) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u_n^{(1)}}{dz^2}(z) - \frac{h^3}{6}\frac{d^3u_n^{(1)}}{dz^3}(z) + \mathrm{O}(h^4)$$

$$u_n^{(1)}(z-h) = u_n^{(1)}(z) - h\frac{du_n^{(1)}}{dz}(z) + \mathrm{O}(h^2)$$

$$\frac{du_n^{(1)}}{dz}(z) = \frac{u_n^{(1)}(z) - u_n^{(1)}(z-h)}{h} + \mathrm{O}(h)$$

$$\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) = -RB_n^{1/2}$$

$$\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) \simeq \frac{u_n^{(1)}(d) - u_n^{(1)}(d-h)}{h}$$

$$\frac{u_n^{(1)}(d) - u_n^{(1)}(d-h)}{h} \simeq -RB_n^{1/2}$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$\frac{u_n^{(1)}(d-h)-u_n^{(1)}(d)}{h} \simeq RB_n{}^{1/2} \rightarrow u_{n,I}^{(1)} - u_{n,I+1}^{(1)} = hRB_n{}^{1/2}$$

$$u_{n,I+1}^{(1)} = 1$$

$$u_{n,I}^{(1)} = 1 + hRB_n{}^{1/2}$$

Προσέγγιση 1^{ης} τάξης για την παράγωγο

Θέλομε κάτι καλύτερο

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u_n^{(1)}(d-h)=u_n^{(1)}(d)-h\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d)+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u_n^{(1)}}{dz^2}(d)-\frac{h^3}{6}\frac{d^3u_n^{(1)}}{dz^3}(d)+\mathrm{O}(h^4)$$

$$\frac{d^2u_n^{(1)}}{dz^2}(d)=-\left[\left[\frac{\omega}{c_1(d)}\right]^2-\lambda_n\right]u_n^{(1)}(d)$$

$$\frac{d^3u_n^{(1)}}{dz^3}(d)\approx-\left[\left[\frac{\omega}{c_1(d)}\right]^2-\lambda_n\right]\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d)-\frac{\omega^2}{h}\left[\frac{1}{c_1^{\,2}(d)}-\frac{1}{c_1^{\,2}(d-h)}\right]u_n^{(1)}(d)$$

$$\left[\left[\frac{\omega}{c_1(d)}\right]^2-\lambda_n\right]=C_n \qquad \left[\left[\frac{\omega}{c_1(d-h)}\right]^2-\lambda_n\right]=D_n$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u_n^{(1)}(d-h) = u_n^{(1)}(d) - h\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u_n^{(1)}}{dz^2}(d) - \frac{h^3}{6}\frac{d^3u_n^{(1)}}{dz^3}(d) + \mathrm{O}(h^4)$$

$$\frac{d^2u_n^{(1)}}{dz^2}(d) = -C_n\, u_n^{(1)}(d), \quad \frac{d^3u_n^{(1)}}{dz^3}(d) \approx C_n R B_n^{\;1/2} - \frac{1}{h}[C_n - D_n]u_n^{(1)}(d)$$

$$\frac{d^2u_n^{(1)}}{dz^2}(d) = -C_n\,, \quad \frac{d^3u_n^{(1)}}{dz^3}(d) \approx C_n R B_n^{\;1/2} - \frac{1}{h}[C_n - D_n]$$

$$u_n^{(1)}(d-h) \approx 1 + hRB_n^{\;1/2} - \frac{h^2}{2}C_n - \frac{h^3}{6}\left\{C_n R B_n^{\;1/2} - \frac{1}{h}[C_n - D_n]\right\}$$

$$u_n^{(1)}(d-h) \approx 1 + hRB_n^{\;1/2} - \frac{h^2}{3}C_n - \frac{h^2}{6}D_n - \frac{h^3}{6}C_n R B_n^{\;1/2}$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u_n^{(1)}(d-h) \approx 1 + hRB_n^{\ 1/2} - \frac{h^2}{3}C_n - \frac{h^2}{6}D_n - \frac{h^3}{6}C_n RB_n^{\ 1/2}$$

$$u_{n,I}^{(1)} = 1 + hRB_n^{\ 1/2} - \frac{h^2}{3}C_n - \frac{h^2}{6}D_n - \frac{h^3}{6}C_n RB_n^{\ 1/2}$$

$$u_{n,I}^{(1)} = 1 + hRB_n^{\ 1/2}$$ Η λιγότερο ακριβής προσέγγιση

$$u_{n,i-1}^{(1)} = \left\{ 2 - h^2 \left[\left(\frac{\omega}{c(z_i)} \right)^2 - \lambda_n \right] \right\} u_{n,i}^{(1)} - u_{n,i+1}^{(1)}, \quad i = 2, \ldots . I$$

$$u_{n,I}^{(1)} = 1 + hRB_n^{\ 1/2} - \frac{h^2}{3}C_n - \frac{h^2}{6}D_n - \frac{h^3}{6}C_n RB_n^{\ 1/2}$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

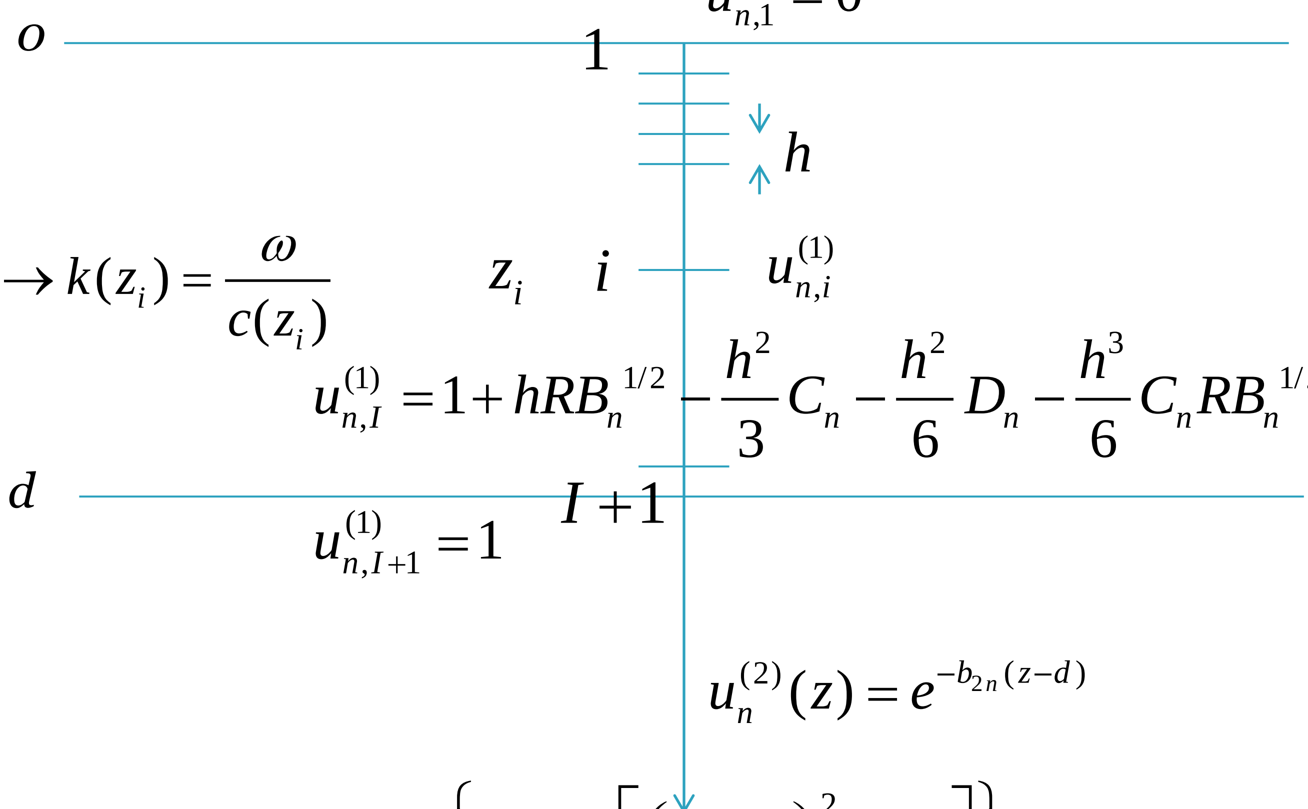
$$u_{n,i-1}^{(1)} = \left\{ 2 - h^2 \left[\left(\frac{\omega}{c(z_i)} \right)^2 - \lambda_n \right] \right\} u_{n,i}^{(1)} - u_{n,i+1}^{(1)}, \quad i = 2,.....I$$

$$u_{n,I}^{(1)} = 1 + hRB_n^{\ 1/2} - \frac{h^2}{3} C_n - \frac{h^2}{6} D_n - \frac{h^3}{6} C_n RB_n^{\ 1/2}$$

$$u_{n,I+1}^{(1)} = 1$$

Όλες οι προσεγγίσεις θα πολλαπλασιαστούν με το συντελεστή κανονικοποίησης

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



$$u_{n,1}^{(1)} = 0$$

$$c(z_i) \to k(z_i) = \frac{\omega}{c(z_i)}$$

$$u_{n,i}^{(1)}$$

$$u_{n,I}^{(1)} = 1 + hRB_n^{1/2} - \frac{h^2}{3}C_n - \frac{h^2}{6}D_n - \frac{h^3}{6}C_n RB_n^{1/2}$$

$$u_{n,I+1}^{(1)} = 1$$

$$u_n^{(2)}(z) = e^{-b_{2n}(z-d)}$$

$$u_{n,i-1}^{(1)} = \left\{ 2 - h^2 \left[\left(\frac{\omega}{c(z_i)} \right)^2 - \lambda_n \right] \right\} u_{n,i}^{(1)} - u_{n,i+1}^{(1)}, \quad i = 2,.....I$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u_n^{(2)}(z) = \exp\left\{-b_{2n}\left(z-d\right)\right\}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = R \qquad B_n = b_{2n}^2 = \left[\lambda_n - \left[\frac{\omega}{c_2}\right]^2\right] \qquad C_n = \left[\left[\frac{\omega}{c_1(d)}\right]^2 - \lambda_n\right]$$

$$D_n = \left[\left[\frac{\omega}{c_1(d-h)}\right]^2 - \lambda_n\right] \qquad u_{n,I+1}^{(1)} = 1$$

$$u_{n,I}^{(1)} = 1 + hRB_n^{\;1/2} - \frac{h^2}{3}C_n - \frac{h^2}{6}D_n - \frac{h^3}{6}C_n RB_n^{\;1/2}$$

$$u_{n,i-1}^{(1)} = \left\{2 - h^2\left[\left(\frac{\omega}{c(z_i)}\right)^2 - \lambda_n\right]\right\}u_{n,i}^{(1)} - u_{n,i+1}^{(1)}, \quad i = 2,.....I$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

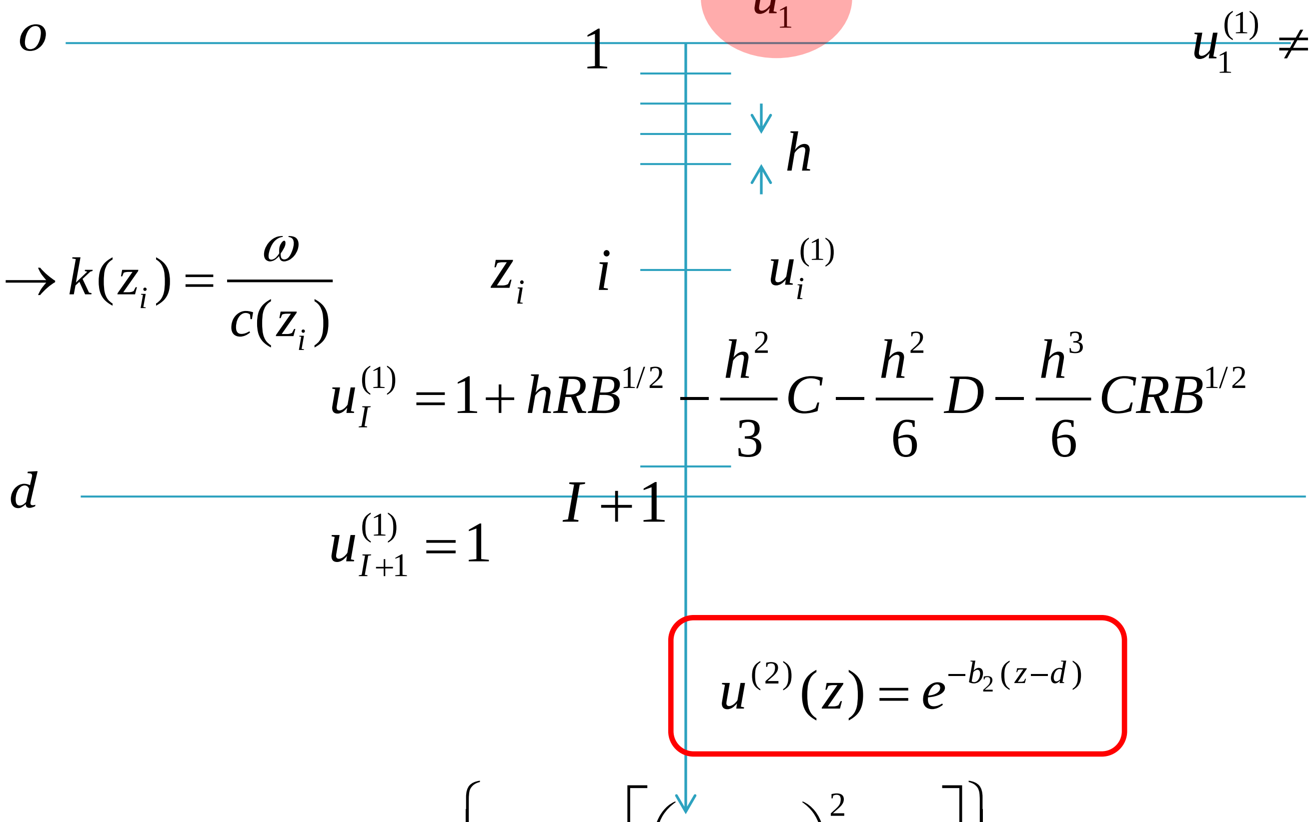
Εφαρμογή για τυχαίο λ

Επαναλαμβάνονται όλοι οι υπολογισμοί για το συγκεκριμένο λ

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Εάν λ δεν είναι ιδιοτιμή τότε

$$u_1^{(1)} \neq 0$$



$$c(z_i) \rightarrow k(z_i) = \frac{\omega}{c(z_i)}$$

$$u_I^{(1)} = 1 + hRB^{1/2} - \frac{h^2}{3}C - \frac{h^2}{6}D - \frac{h^3}{6}CRB^{1/2}$$

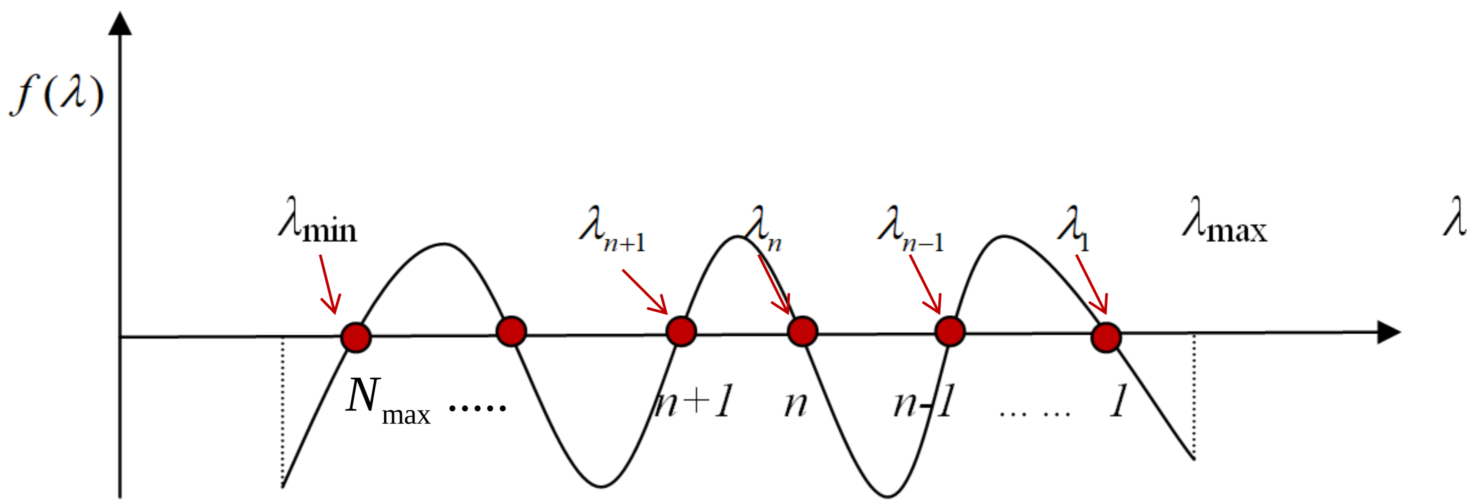
$$u_{I+1}^{(1)} = 1$$

$$\boxed{u^{(2)}(z) = e^{-b_2(z-d)}}$$

$$u_{i-1}^{(1)} = \left\{2 - h^2\left[\left(\frac{\omega}{c(z_i)}\right)^2 - \lambda\right]\right\}u_i^{(1)} - u_{i+1}^{(1)}, \quad i = 2,\ldots..I$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u_1^{(1)} = f(\lambda)$$



$$\lambda_{\min} = \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 \qquad \lambda_{\max} = \left(\frac{\omega}{c_{1\min}}\right)^2$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$\lambda_{\max} = \left(\frac{\omega}{c_{1\min}} \right)^2$$

γιατί $c_{1\min}$;

Για να έχομε κυματικό φαινόμενο στο νερό αρκεί να έχομε $\sqrt{\lambda} < k_1(z)$ για ένα τουλάχιστον βάθος

Επομένως $\sqrt{\lambda} < \max\left(k_1(z)\right) = \dfrac{\omega}{c_{1\min}}$ ή $\lambda < \left(\dfrac{\omega}{c_{1\min}} \right)^2$

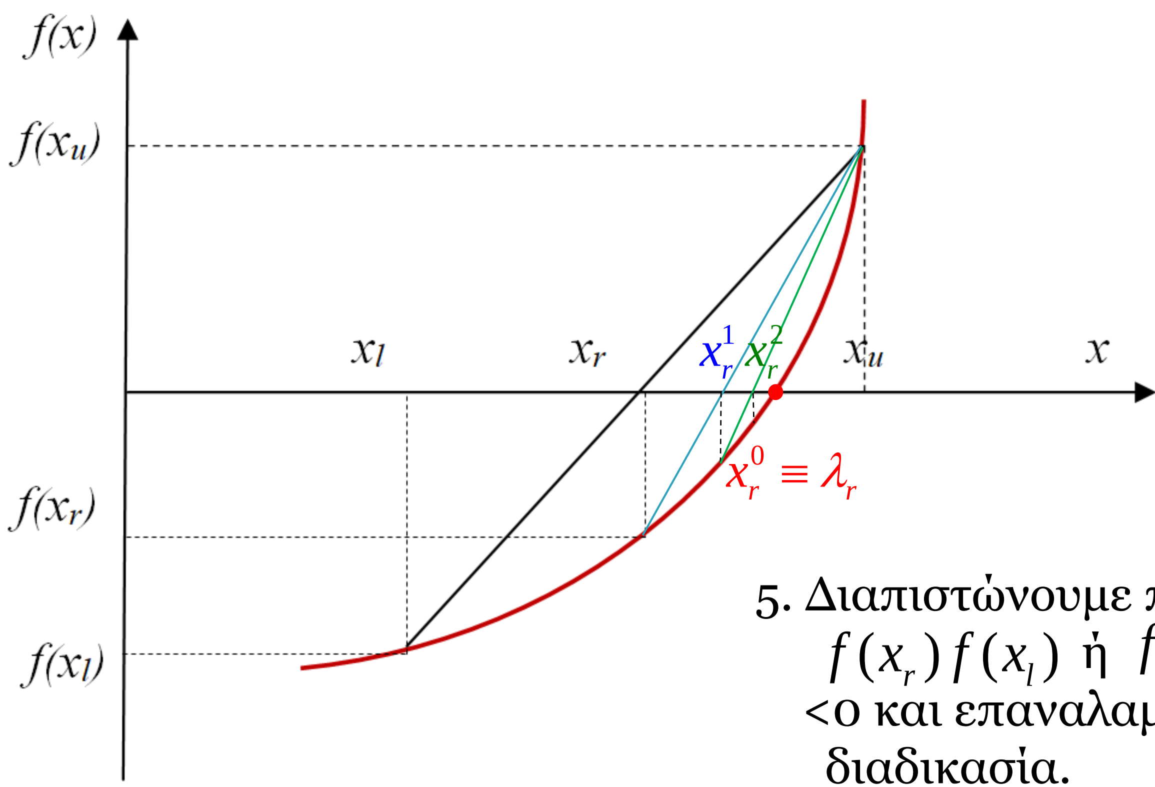
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Ένας πιθανός αλγόριθμος υπολογισμού των ιδιοτιμών

1. Υπολογισμός των ορίων υπολογισμού τους : $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$
2. Διαμερισμός του διαστήματος σε ίσοδιαστήματα.
3. Εφαρμογή του σχήματος των διαφορών στους κόμβους λ_m και υπολογισμός του $u_1^1(\lambda_m)$
4. Εάν εντοπίσουμε δύο τιμές $\lambda_l = x_1$ και $\lambda_u = x_u$ που μας δίνουν $f(x_l)f(x_u) < 0$ τότε η μια πρώτη προσέγγιση x_r της $f(x)=0$ είναι:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \qquad \text{Τέμνουσα}$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



5. Διαπιστώνουμε ποιο από $f(x_r)f(x_l)$ ή $f(x_r)f(x_l)$ <0 και επαναλαμβάνομε τη διαδικασία.

6. Σταματάμε εάν $f(x_r^k) < \varepsilon$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Ένας πιθανός αλγόριθμος υπολογισμού των ιδιοτιμών

7. Υπολογίζομε τους μηδενισμούς *m* της συνάρτησης που προσεγγίζεται από την $u_i^{(1)}(\lambda_r)$

8. Αποδίδομε στο λ_r την τάξη $n=m+1$

9. Ελέγχουμε ότι έχομε εξαντλήσει όλες τις τάξεις ιδιοτιμών.

10. Μία εμπειρική formula για να εξασφαλίσουμε ότι έχομε υπολογίσει όλες τις ιδιοτιμές είναι η

$$N_{\max} = INT\left(\frac{2\,f\,h}{\bar{c}_1} \frac{\ln\left(\sqrt{1-\bar{c}_1/c_2}+1\right)}{\ln 2} + 0.5 \right)$$

$\bar{c}_1$ Μέση ταχύτητα στο νερό