

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

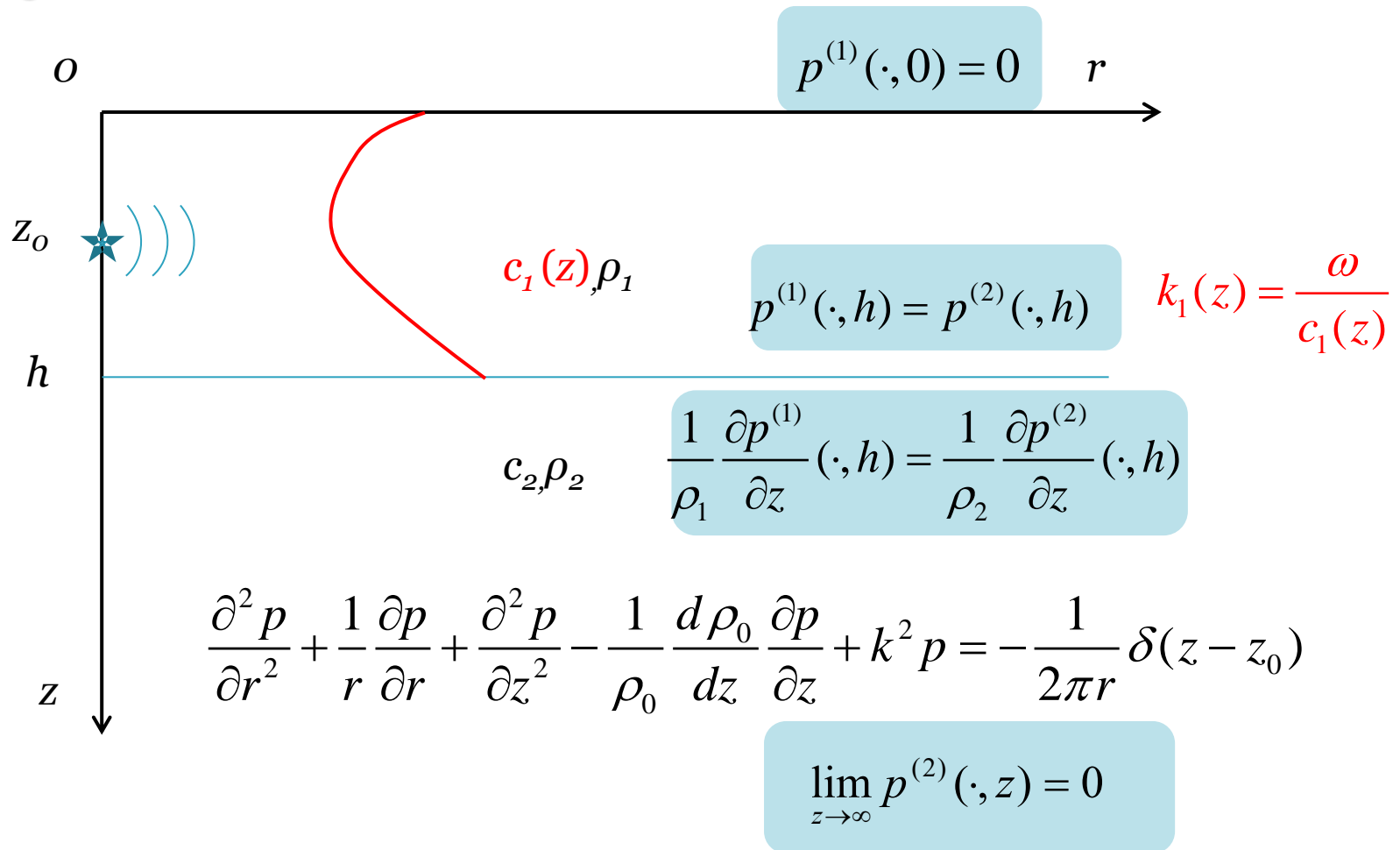
Κυματική Διάδοση

10^η διάλεξη μέρος Β'

2023-2024

Μιχάλης Ταρουδάκης

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



Δεν υπάρχει επανακτινοβολία ενέργειας από το άπειρο

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u(z): [0, \infty)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{du}{dz}(z) \right) + \left(\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)} - \frac{\lambda}{\rho_0(z)} \right) u(z) = 0$$

$$u(z) = \begin{cases} u^{(1)}(z) & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ u^{(2)}(z) & \text{για } z \geq h \end{cases}$$

$$\rho_0(z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ \rho_2 & \text{για } z > h \end{cases}$$

$$k(z) = \begin{cases} \frac{\omega}{c_1(z)} = k_1(z) & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ \frac{\omega}{c_2} = k_2 & \text{για } z > h \end{cases}$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων S-L

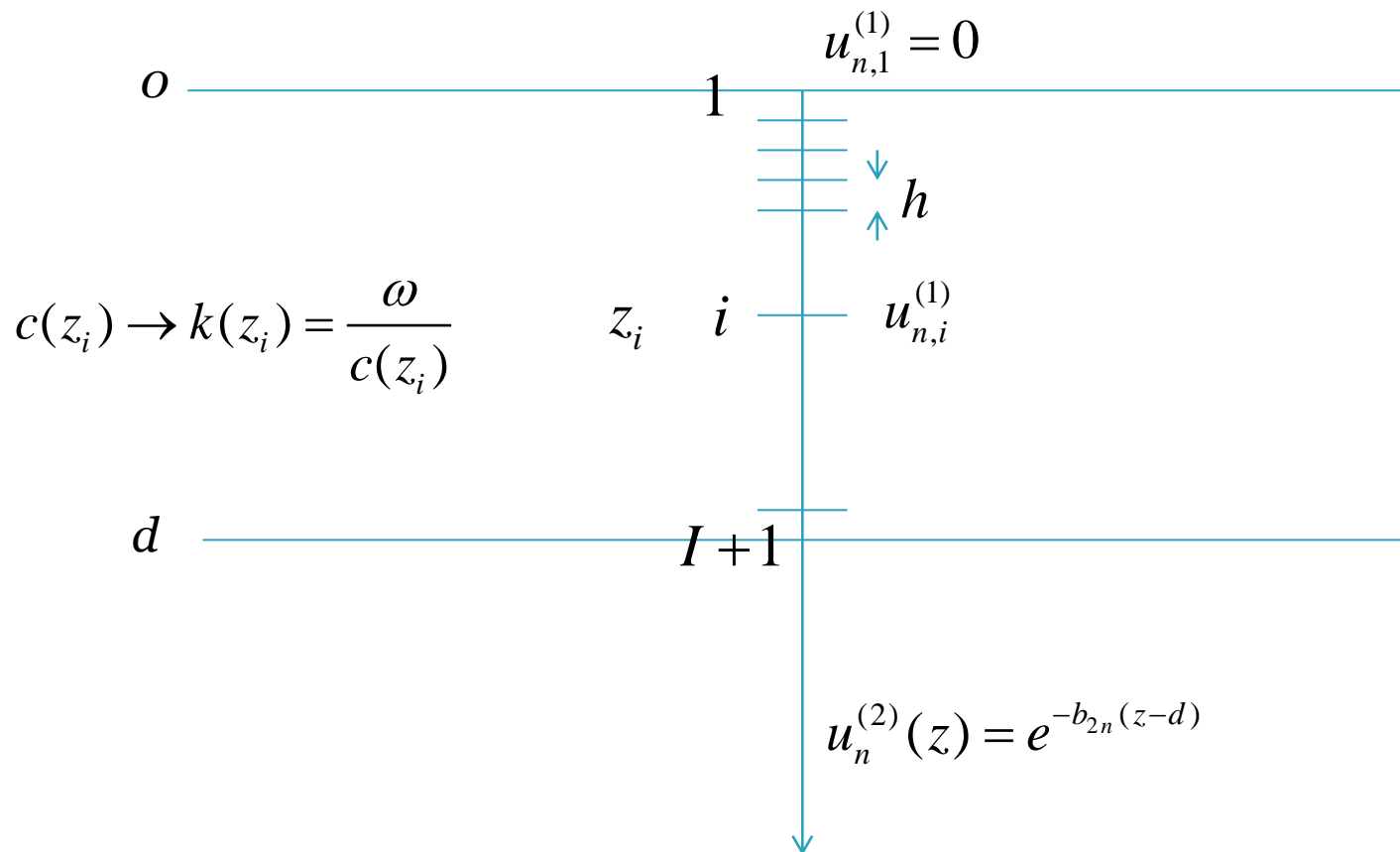
$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{du}{dz}(z) \right) + \left(\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)} - \frac{\lambda}{\rho_0(z)} \right) u(z) = 0$$

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^N A_n(r) u_n(z) + \int_S b(r, \lambda) u(z, \lambda) d\lambda$$

Σε μεγάλες αποστάσεις

$$p(r, z) \approx \sum_{n=1}^N A_n(r) u_n(z)$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



Διακριτοποίηση για υπολογισμό των προσεγγίσεων $u_{n,i}^{(1)}$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u_{n,i-1}^{(1)} = \left\{ 2 - h^2 \left[\left(\frac{\omega}{c(z_i)} \right)^2 - \lambda_n \right] \right\} u_{n,i}^{(1)} - u_{n,i+1}^{(1)}, \quad i = 2, \dots, I$$

$$u_{n,I}^{(1)} = 1 + hRB_n^{1/2} - \frac{h^2}{3} C_n - \frac{h^2}{6} D_n - \frac{h^3}{6} C_n RB_n^{1/2}$$

$$u_{n,I+1}^{(1)} = 1$$

Σχήμα διαφορών για την προσέγγιση των τιμών των ιδιοσυναρτήσεων σε δεδομένα βάθη διακριτοποίησης για δεδομένη ιδιοτιμή.

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u_n^{(2)}(z) = \exp\{-b_{2n}(z-d)\}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = R \quad B_n = b_{2n}^2 = \left[\lambda_n - \left[\frac{\omega}{c_2} \right]^2 \right] \quad C_n = \left[\left[\frac{\omega}{c_1(d)} \right]^2 - \lambda_n \right]$$

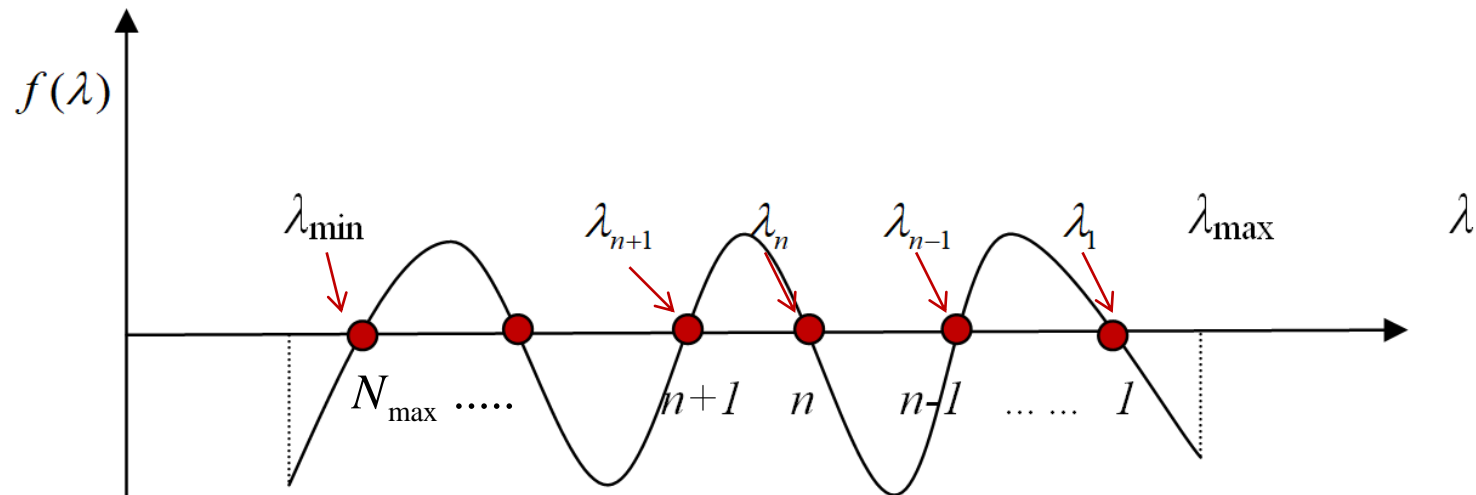
$$D_n = \left[\left[\frac{\omega}{c_1(d-h)} \right]^2 - \lambda_n \right] \quad u_{n,I+1}^{(1)} = 1$$

$$u_{n,I}^{(1)} = 1 + hRB_n^{1/2} - \frac{h^2}{3}C_n - \frac{h^2}{6}D_n - \frac{h^3}{6}C_nRB_n^{1/2}$$

$$u_{n,i-1}^{(1)} = \left\{ 2 - h^2 \left[\left(\frac{\omega}{c(z_i)} \right)^2 - \lambda_n \right] \right\} u_{n,i}^{(1)} - u_{n,i+1}^{(1)}, \quad i = 2, \dots, I$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$$u_1^{(1)} = f(\lambda)$$



$$\lambda_{\min} = \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2$$

$$\lambda_{\max} = \left(\frac{\omega}{c_{1\min}} \right)^2$$

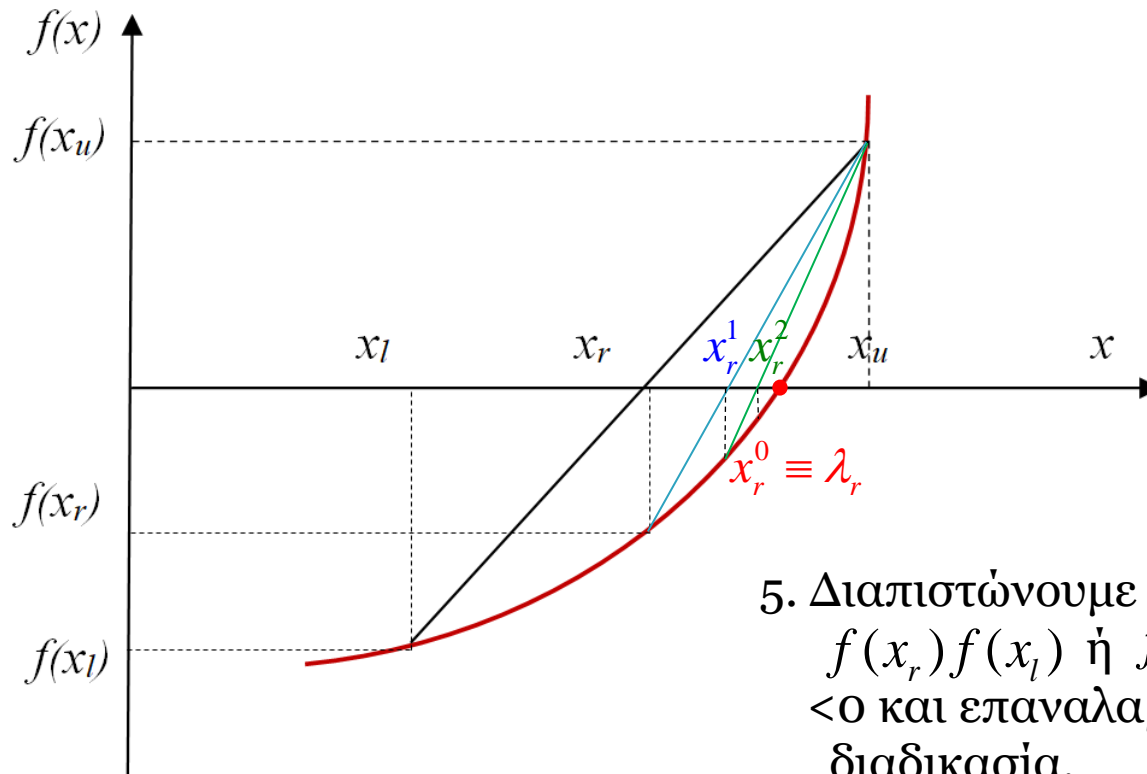
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Ένας πιθανός αλγόριθμος υπολογισμού των ιδιοτιμών

1. Υπολογισμός των ορίων υπολογισμού τους : $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$
2. Διαμερισμός του διαστήματος σε ίσοδιαστήματα.
3. Εφαρμογή του σχήματος των διαφορών στους κόμβους λ_m και υπολογισμός του $u_1^1(\lambda_m)$
4. Εάν εντοπίσουμε δύο τιμές $\lambda_l = x_l$ και $\lambda_u = x_u$ που μας δίνουν $f(x_l)f(x_u) < 0$ τότε η μια πρώτη προσέγγιση x_r της $f(x)=0$ είναι:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \quad \text{Τέμνουσα}$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



5. Διαπιστώνουμε ποιο από $f(x_r)f(x_l)$ ή $f(x_r)f(x_l) < 0$ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.
6. Σταματάμε εάν $f(x_r^k) < \varepsilon$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Ένας πιθανός αλγόριθμος υπολογισμού των ιδιοτιμών

7. Υπολογίζουμε τους μηδενισμούς m της συνάρτησης που προσεγγίζεται από την $u_i^{(1)}(\lambda_r)$
8. Αποδίδουμε στο λ_r την τάξη $n=m+1$
9. Ελέγχουμε ότι έχουμε εξαντλήσει όλες τις τάξεις ιδιοτιμών.
10. Μία εμπειρική formula για να εξασφαλίσουμε ότι έχουμε υπολογίσει όλες τις ιδιοτιμές είναι η

$$N_{\max} = INT \left(\frac{2f h \ln \left(\sqrt{1 - \bar{c}_1 / c_2} + 1 \right)}{\bar{c}_1 \ln 2} + 0.5 \right)$$

\bar{c}_1 Μέση ταχύτητα στο νερό

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Κανονικοποίηση

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho(z)} u_n^2(z) dz = 1$$

$$\int_0^d \frac{1}{\rho_1} u_n^{(1)2}(z) dz + \int_d^{\infty} \frac{1}{\rho_2} u_n^{(2)2}(z) dz = 1$$

$$\int_0^d \frac{1}{\rho_1} u_n^{(1)2}(z) dz \quad \text{Υπολογίζεται αριθμητικά}$$

$$\int_d^{\infty} \frac{1}{\rho_2} u_n^{(2)2}(z) dz \quad \text{Υπολογίζεται αναλυτικά}$$

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Κανονικοποίηση

Επειδή έχει δοθεί αυθαίρετα η τιμή της ιδιοσυνάρτησης στη διεπιφάνεια

$$\int_0^d \frac{1}{\rho_1} \widehat{u}_n^{(1)2}(z) dz + \int_d^\infty \frac{1}{\rho_2} \widehat{u}_n^{(2)2}(z) dz = N_n^2$$

$$u_n^{(*)}(z) = \frac{\widehat{u}_n^{(*)}(z)}{N_n}, \quad * = 1, 2$$

ΠΡΟΣΟΧΗ ! Στο νερό δεν έχουμε λύση για κάθε z αλλά για τα z_i του διαμερισμού.

Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

Η ακουστική πίεση

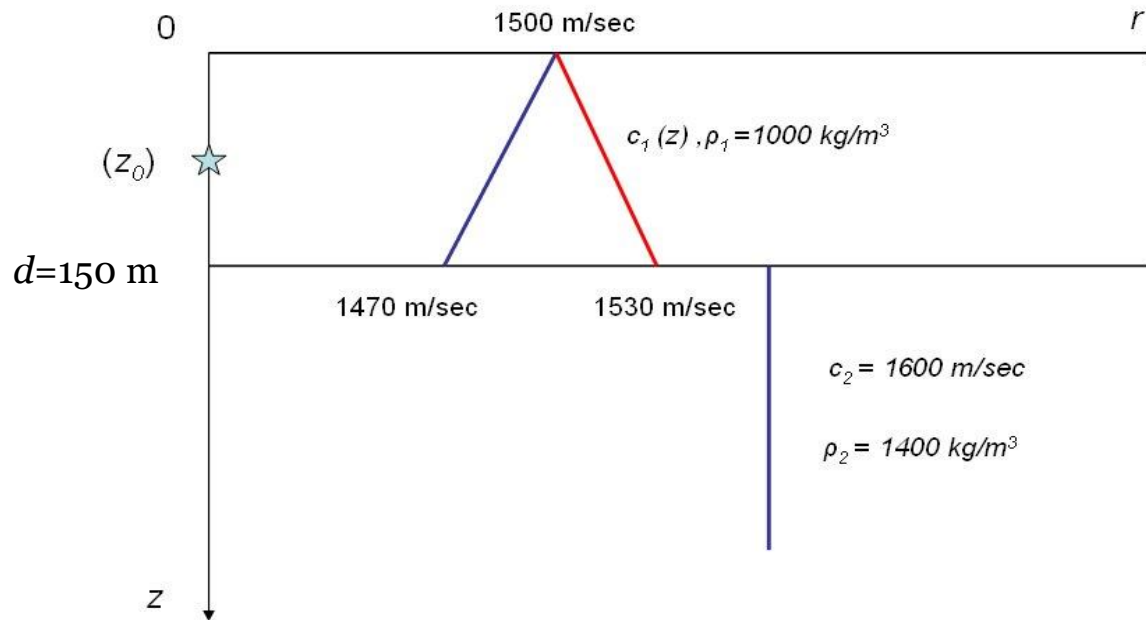
$$p(r, z) = \frac{i}{4\rho_1} \sum_{n=1}^N u_n^{(1)}(z_0) u_n(z) \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\lambda_n} r}} e^{i(\sqrt{\lambda_n} r - \pi/4)}$$

Εάν το z είναι κάποιο από τα βάρη στα οποία έχει γίνει η διακριτοποίηση (z_i) τότε $u_n^{(1)}(z) = u_{n,i}$

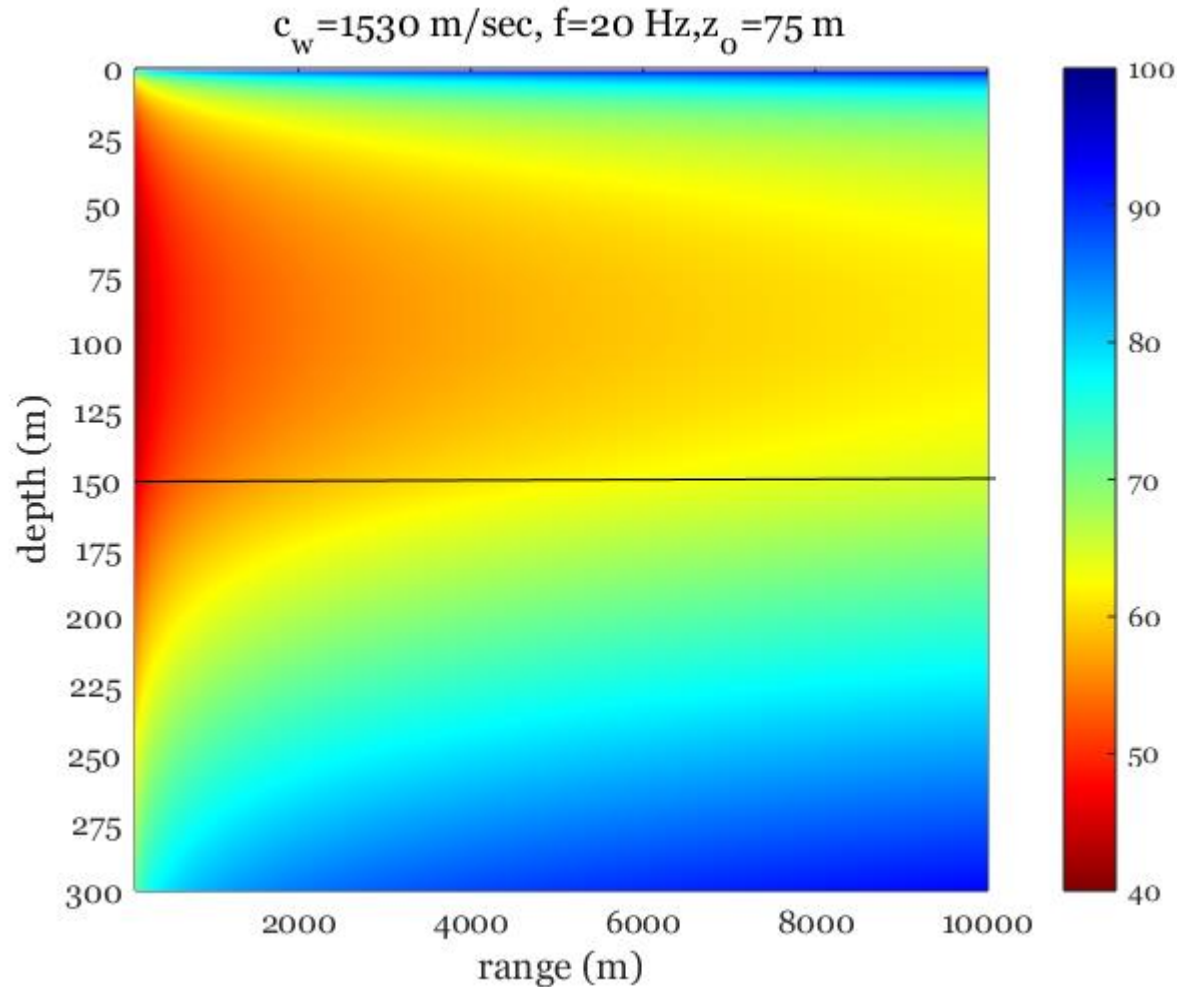
Έάν $z_i < z < z_{i+1}$ γίνεται γραμμική παρεμβολή ανάμεσα σε $u_{n,i}^{(1)}$ και $u_{n,i+1}^{(1)}$ για τον υπολογισμό της $u_n^{(1)}(z)$

$$TL(r, z) = -20 \log \frac{|p(r, z)|}{|p_0|} \quad (\text{dB})$$

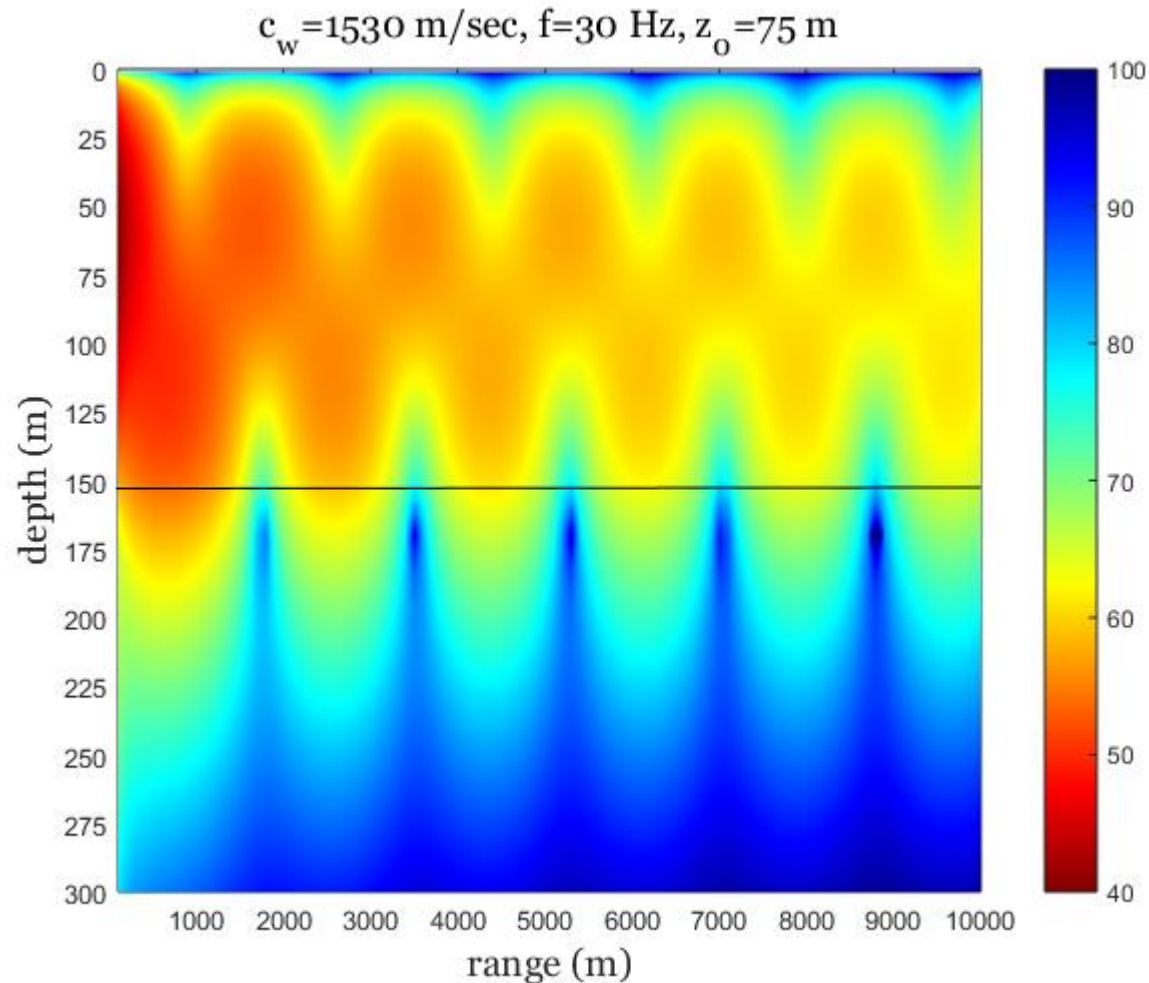
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



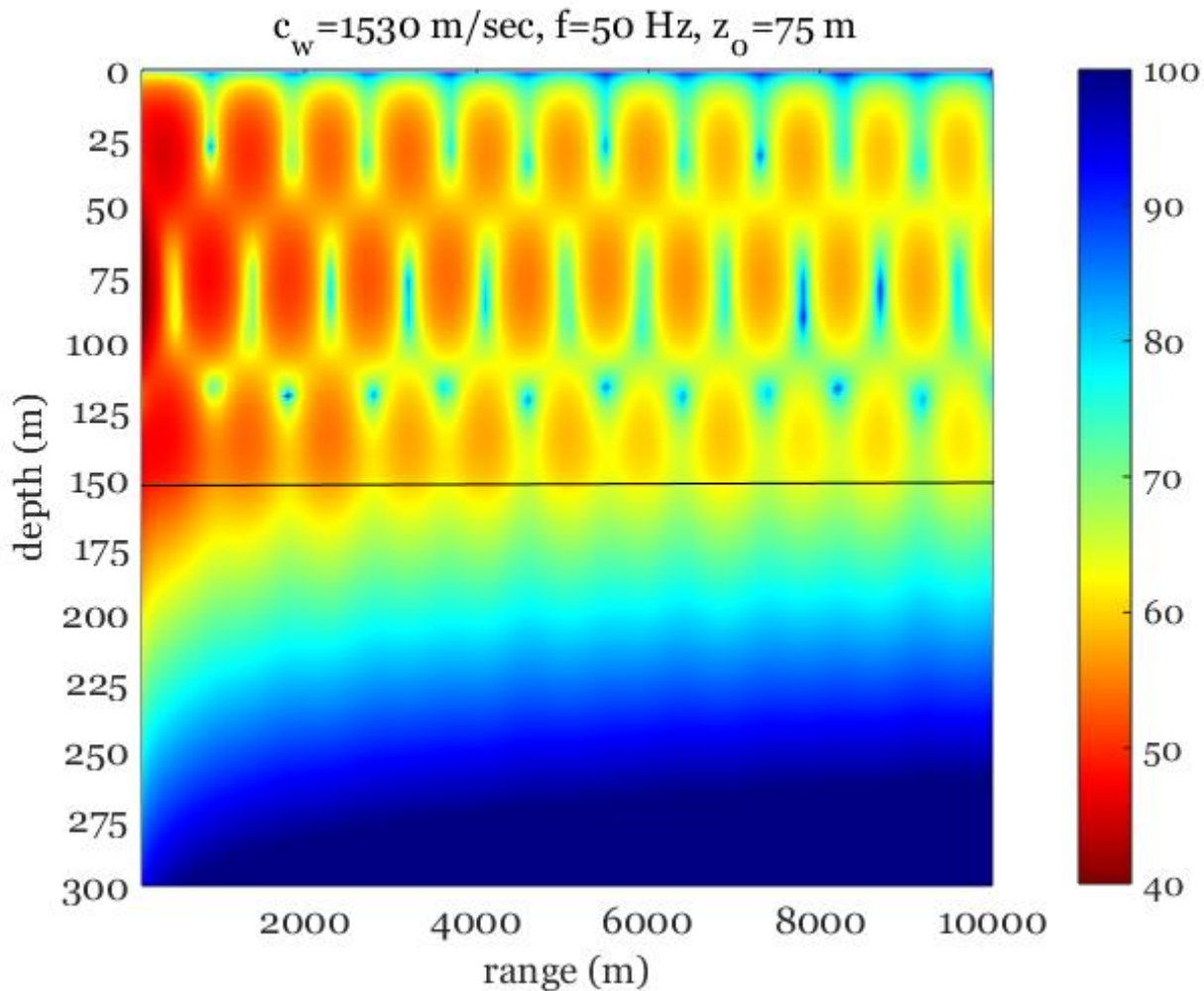
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



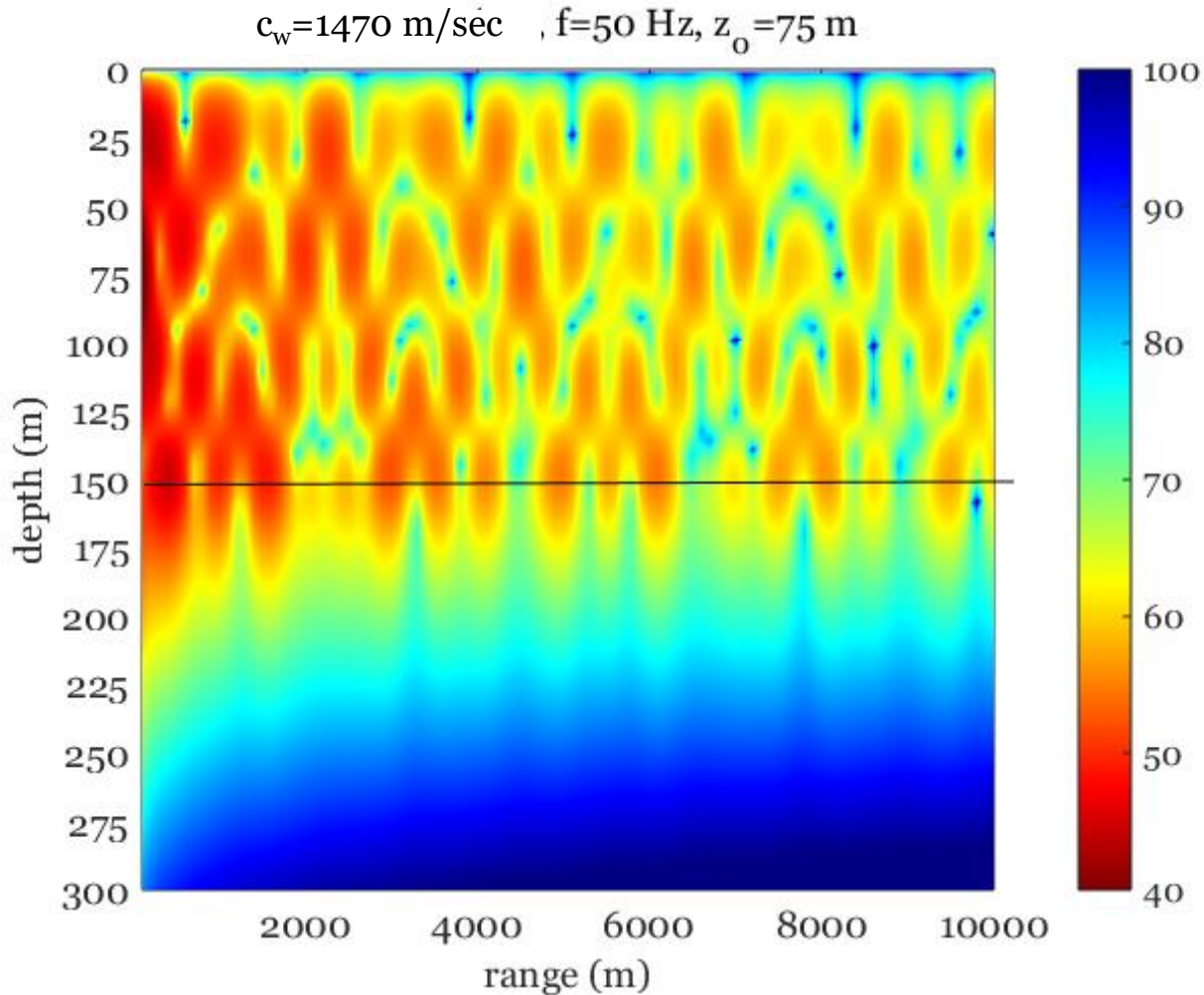
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



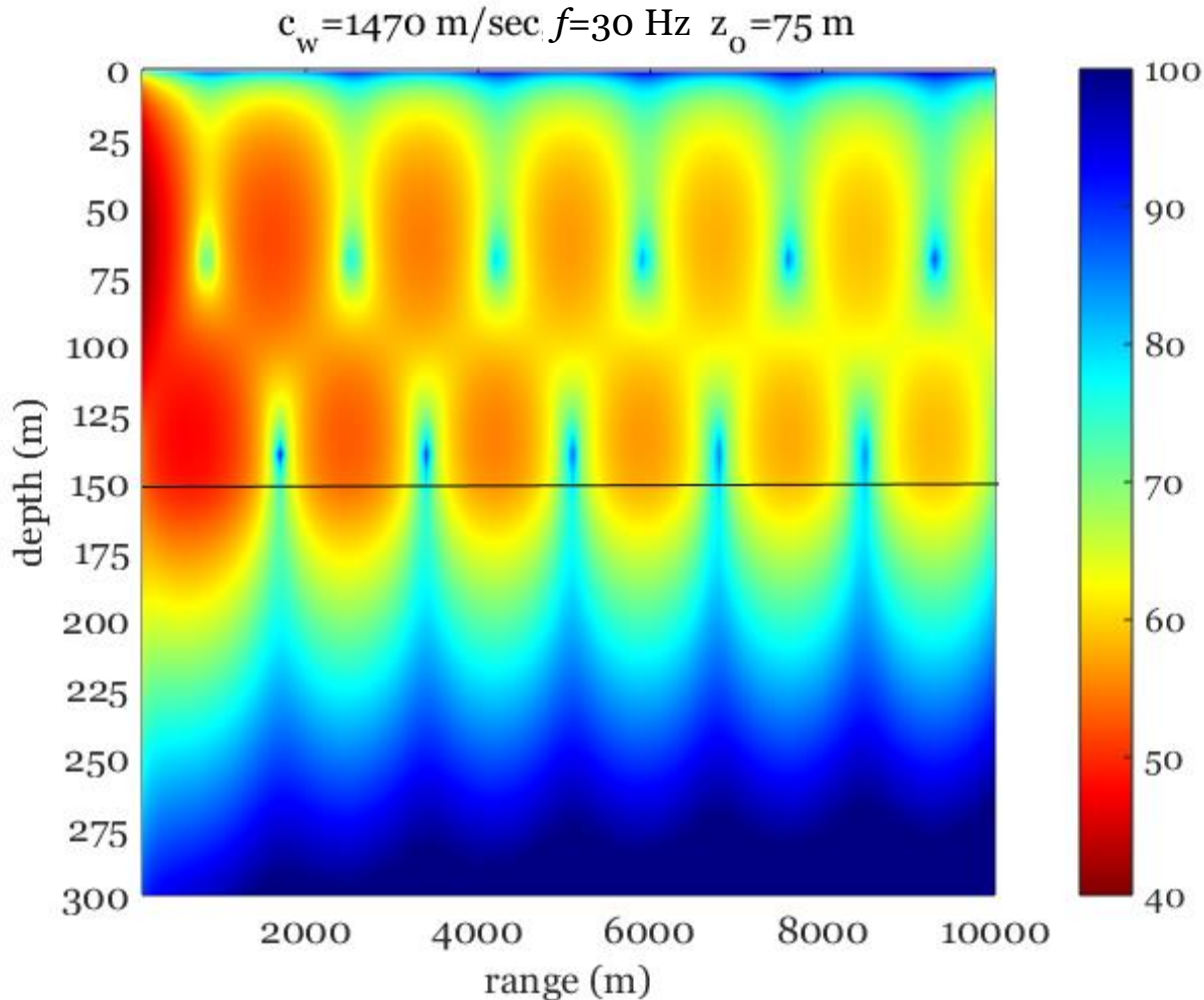
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



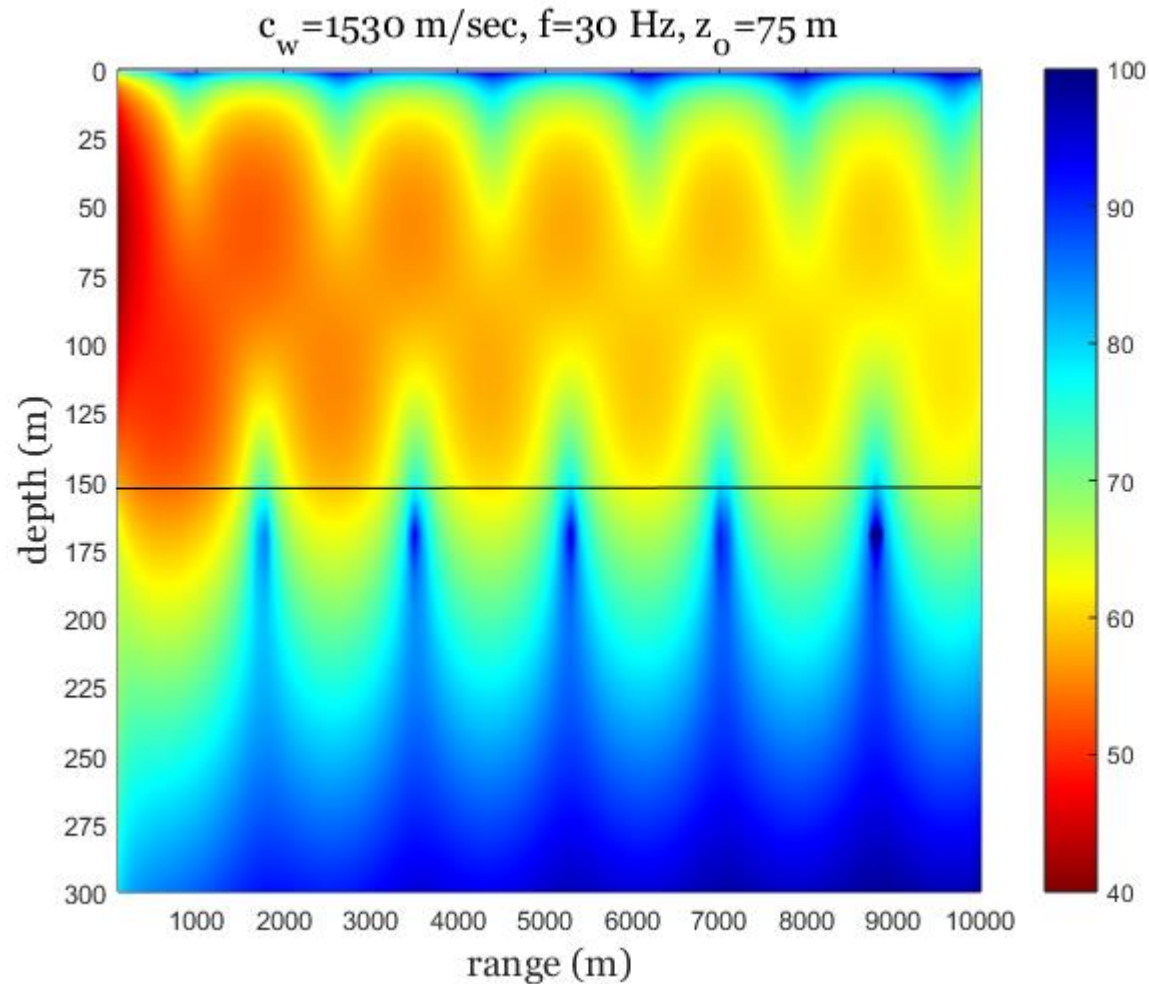
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



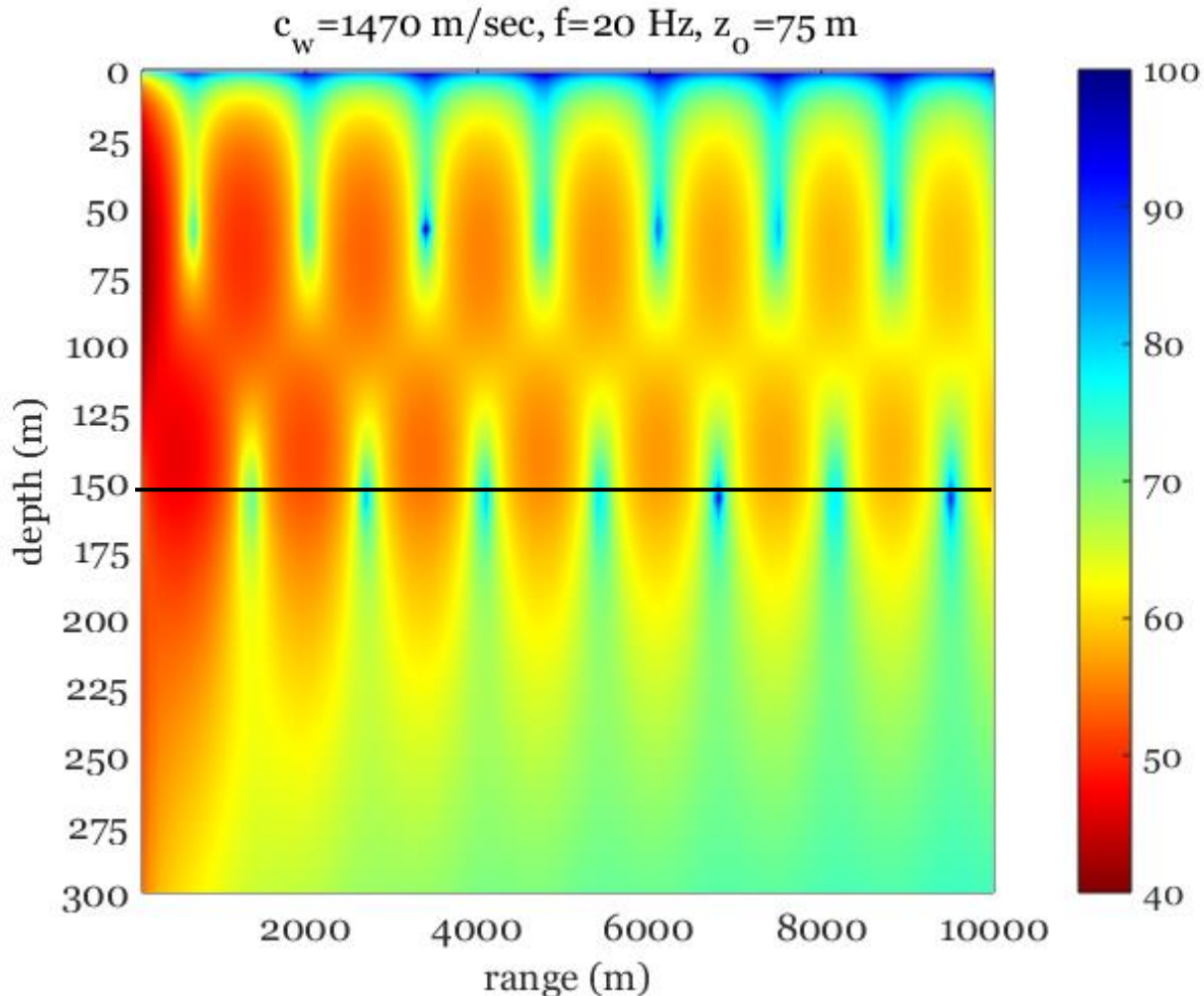
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



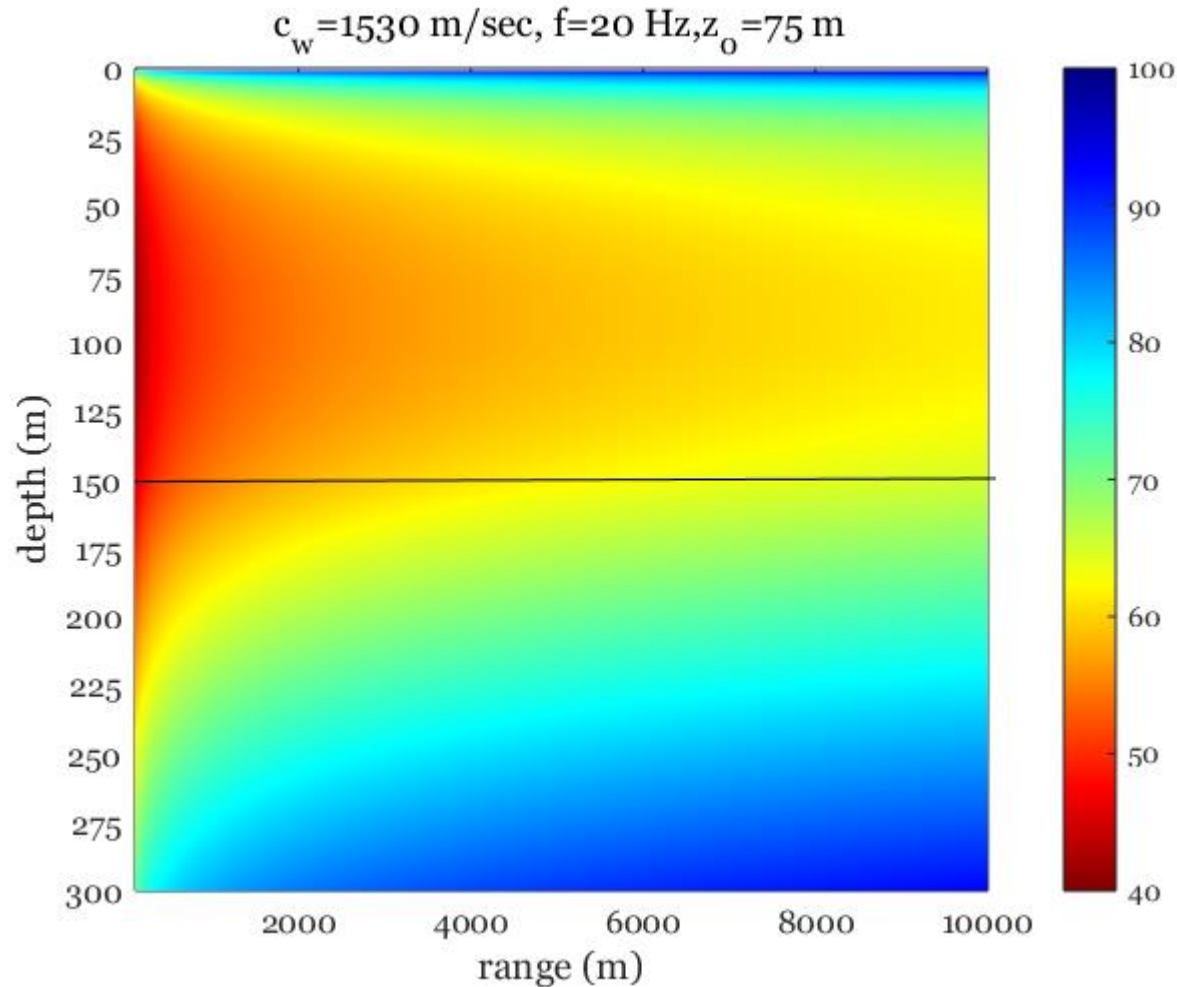
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



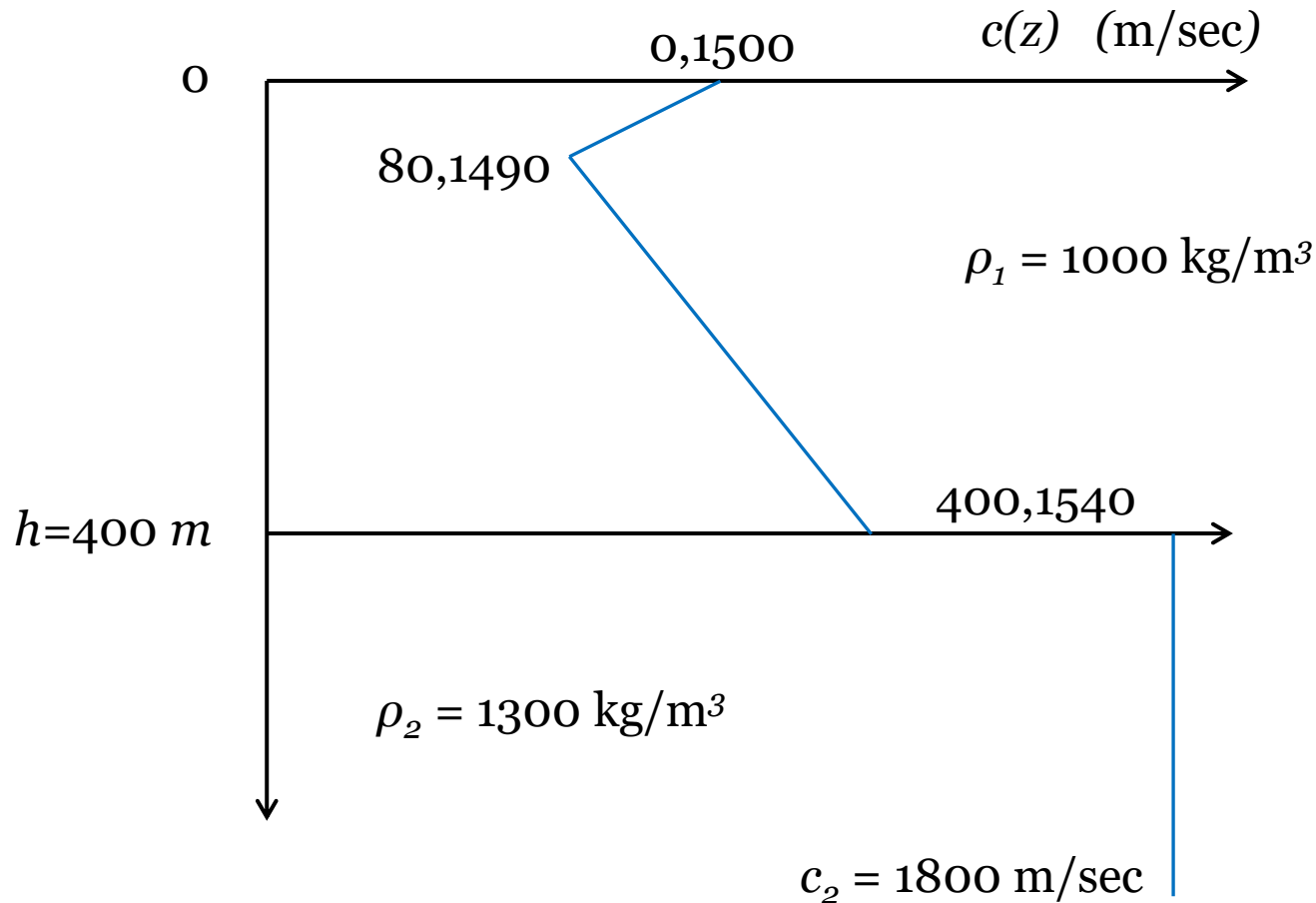
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



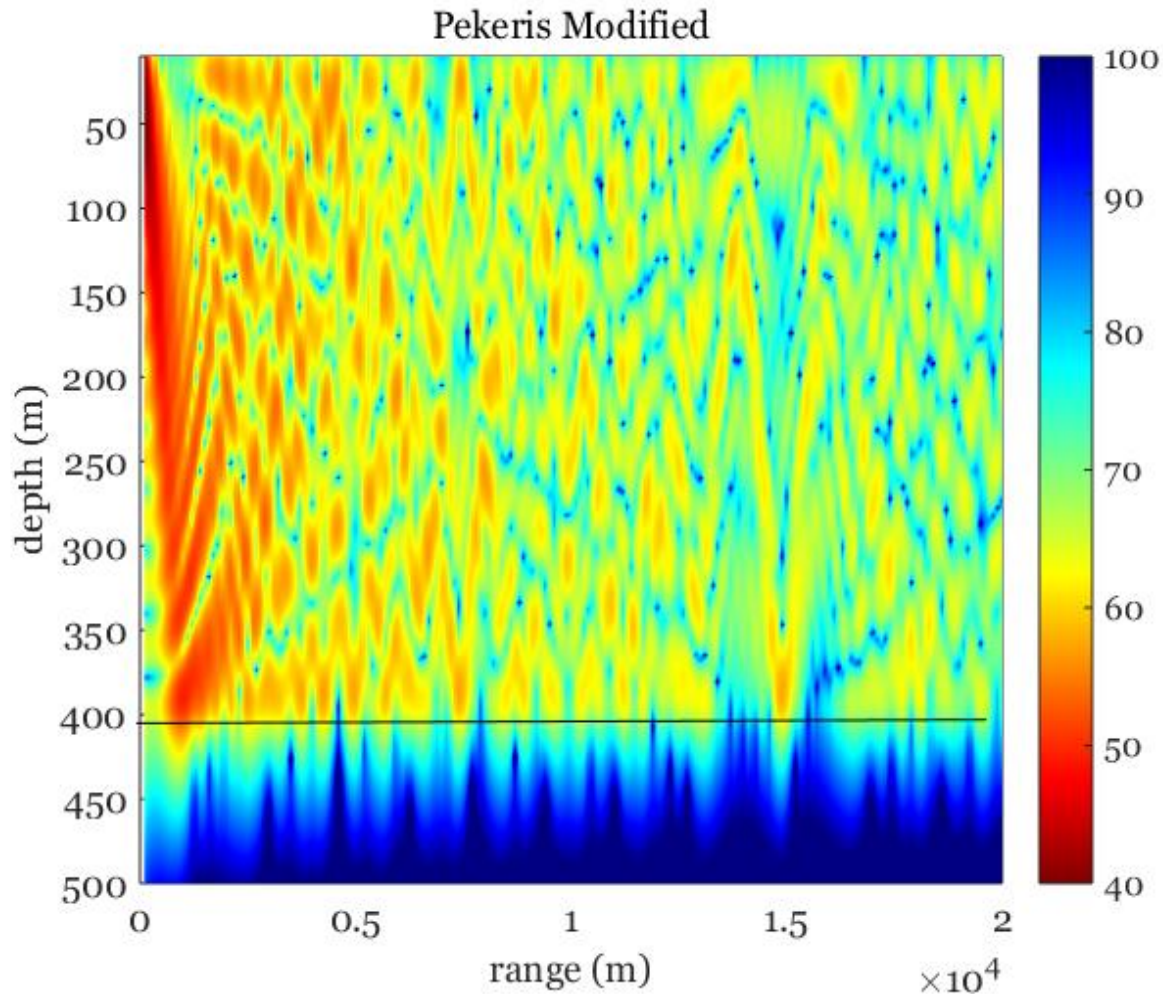
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου



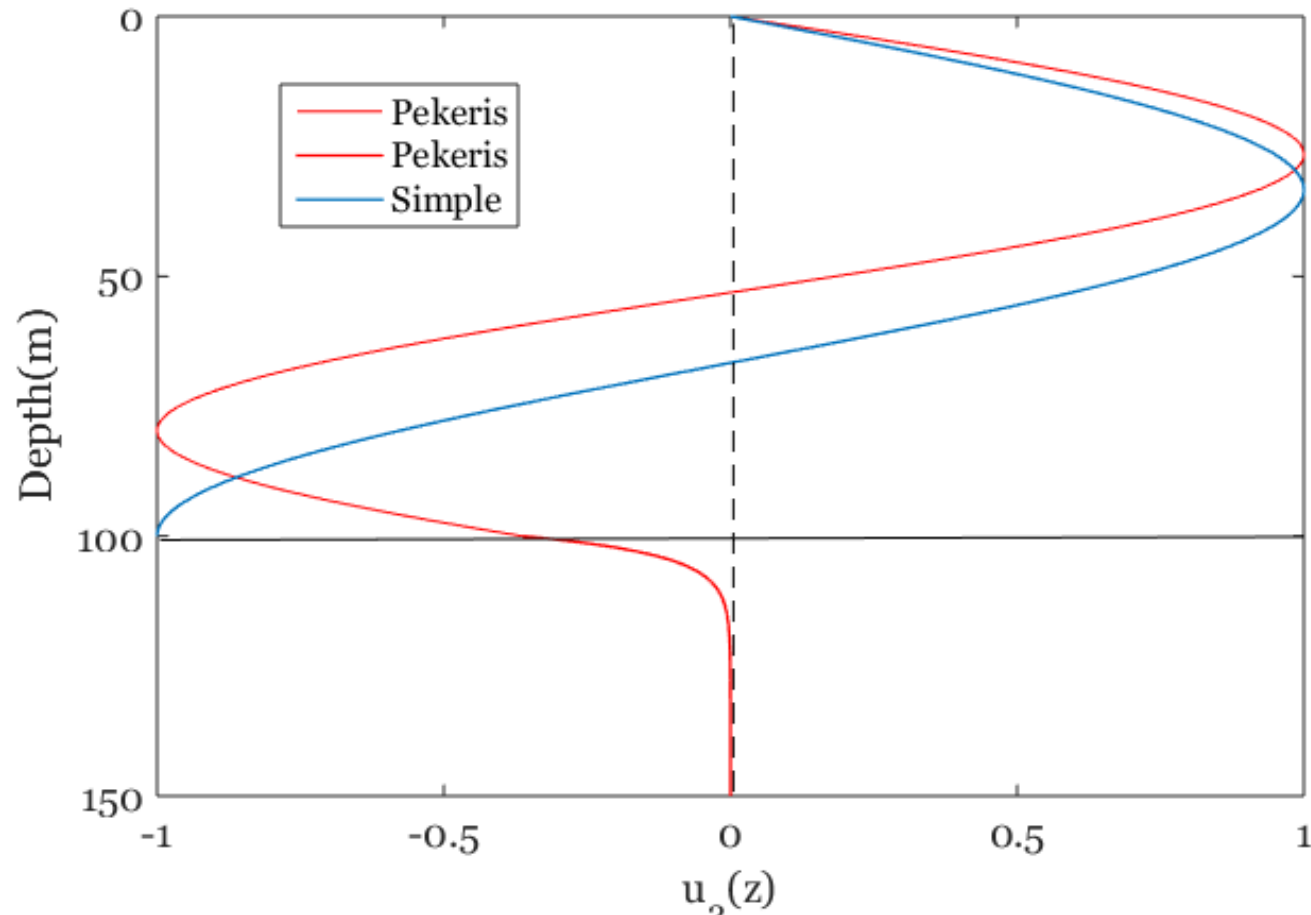
Π3 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του βάθους ταχύτητα διάδοσης ήχου

$z_0 = 30$ m
 $f = 100$ Hz

$N = 11$

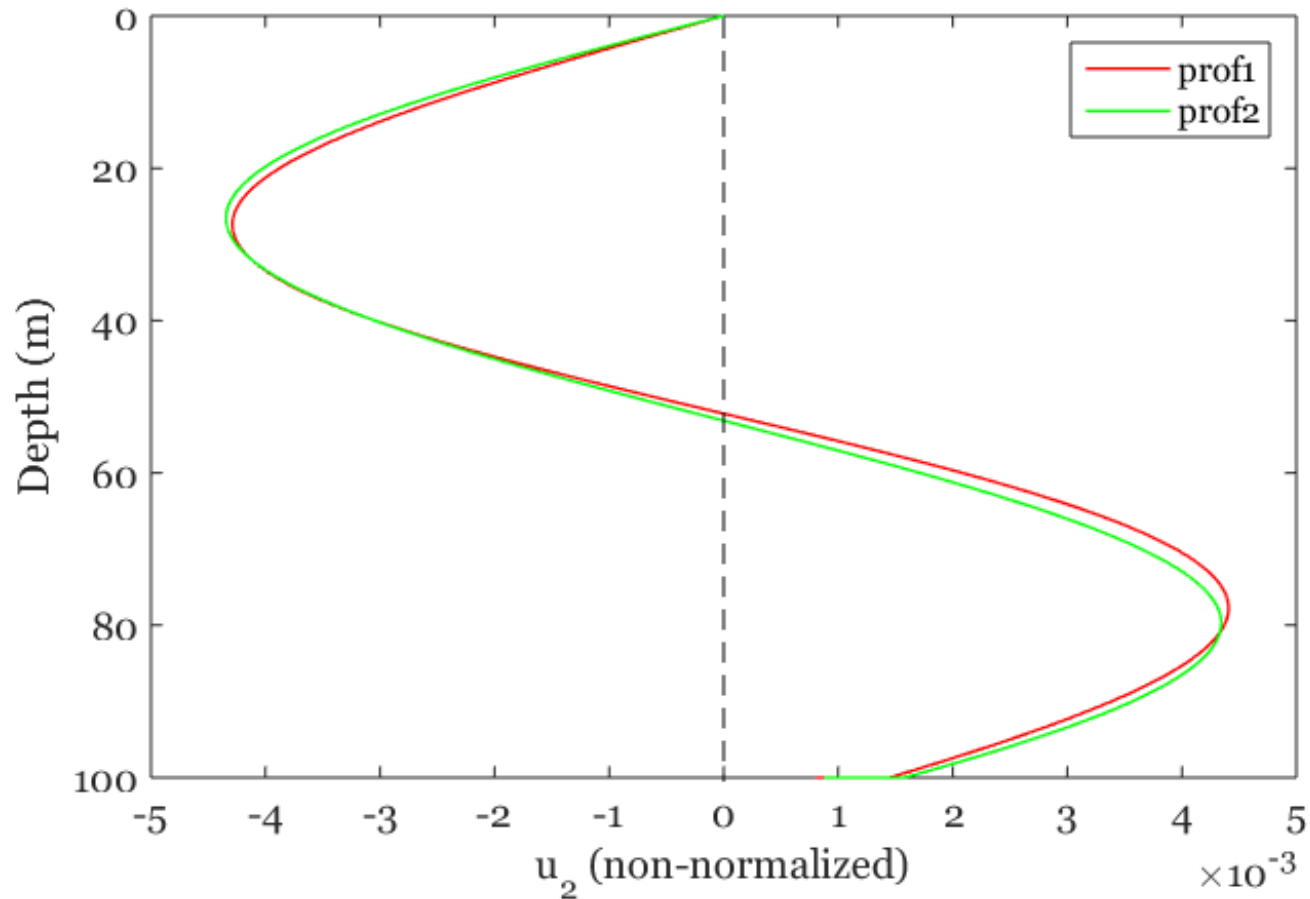


Π3 Σύγκριση Pekeris - Απλού κυματοδηγού



$$C_1=1500 \text{ m/sec} \quad C_2=2000 \text{ m/sec} \quad f=100 \text{ Hz}$$
$$\rho_1=1000 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_2=1000 \text{ kg/m}^3 \quad n=2 \quad h=100 \text{ m}$$

Π3 Σύγκριση Pekeris – με κυματοδηγό μεταβαλλόμενης ταχύτητας



Prof1 : c (0-1500, 50-1490, 100-1500)

Prof2 c 1500