Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

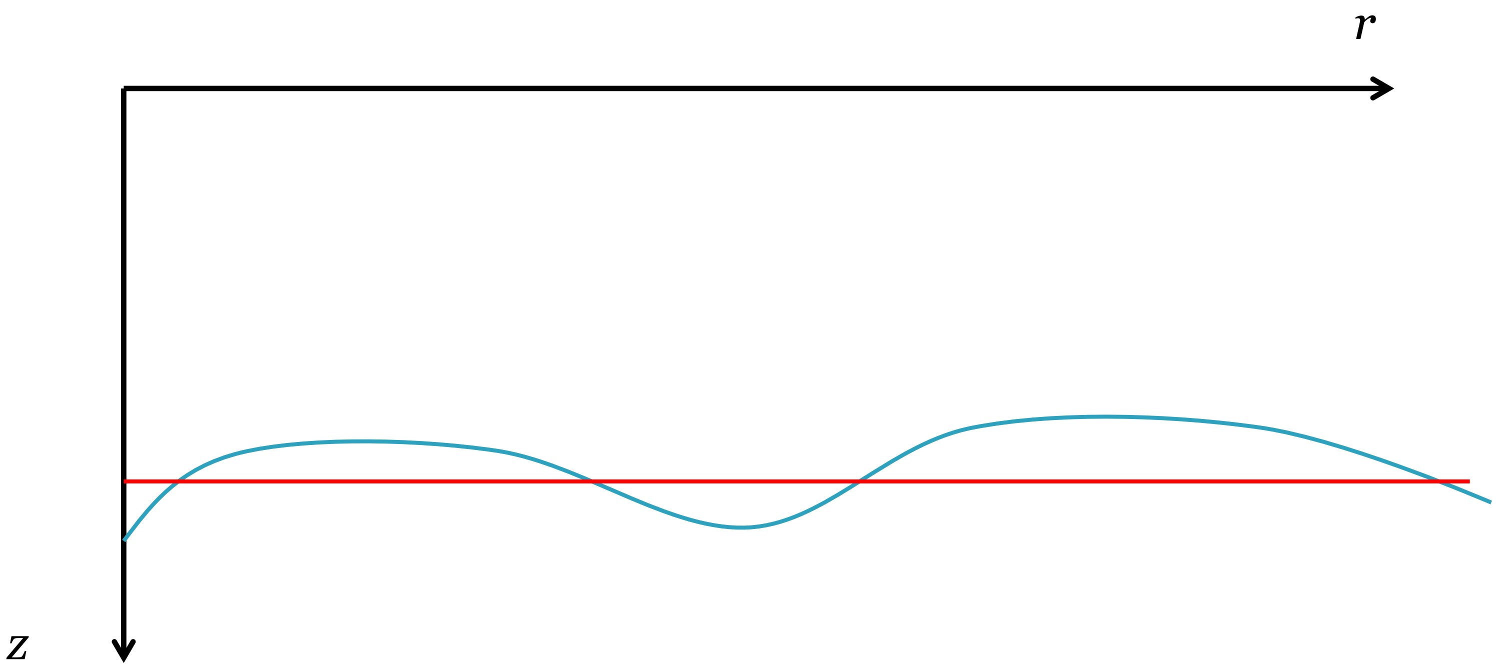
Κυματική Διάδοση

11η διάλεξη

2023-2024

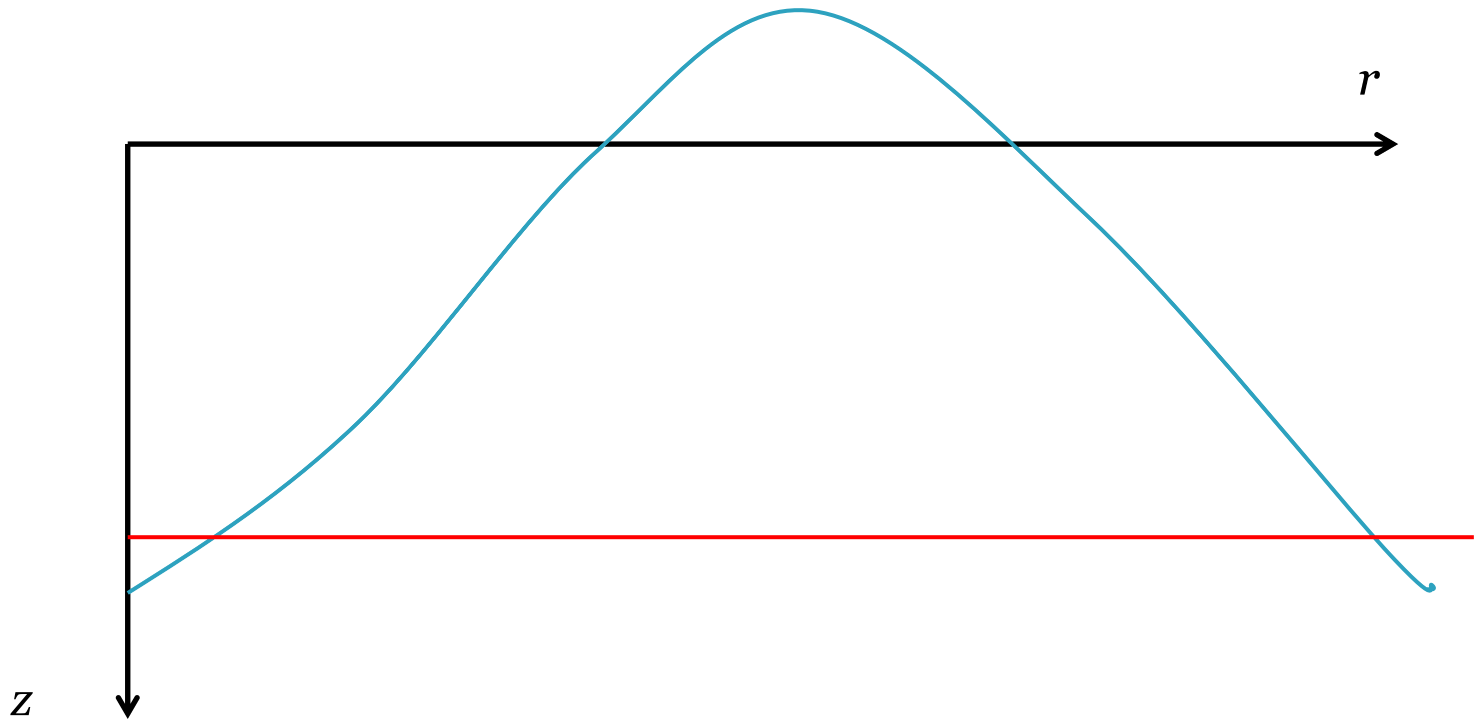
Μιχάλης Ταρουδάκης

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



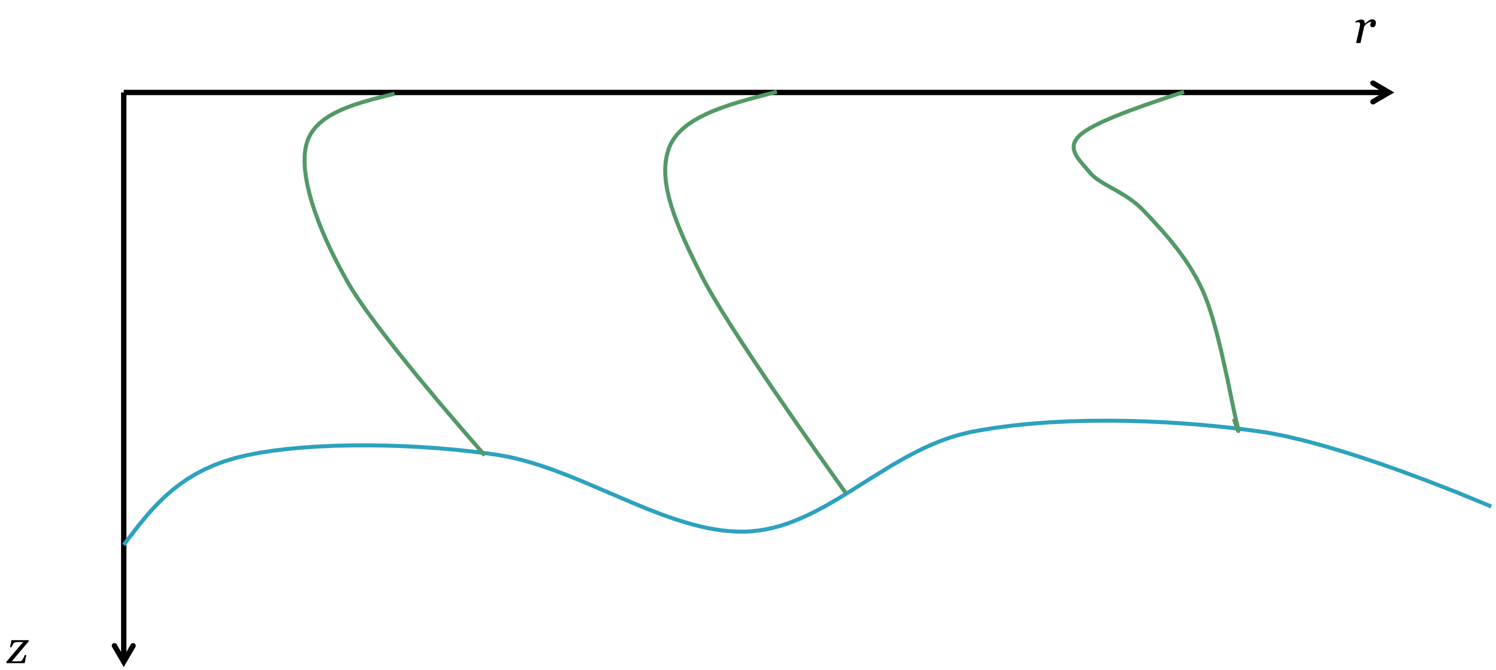
Μη επίπεδη διεπιφάνεια

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



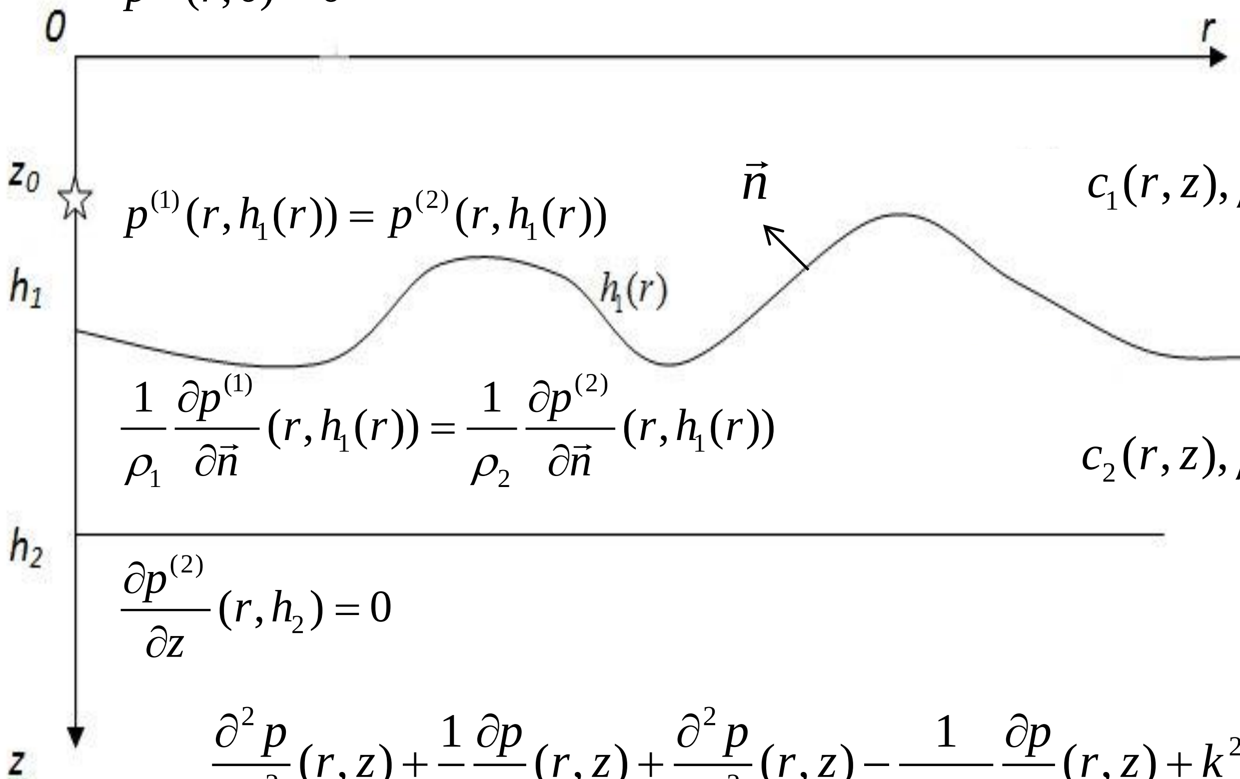
Νησιά !

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



Μεταβαλλόμενο προφίλ ταχύτητας ήχου

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



$$p^{(1)}(r,0)=0$$

$$p^{(1)}(r,h_1(r)) = p^{(2)}(r,h_1(r))$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \vec{n}}(r,h_1(r)) = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial \vec{n}}(r,h_1(r))$$

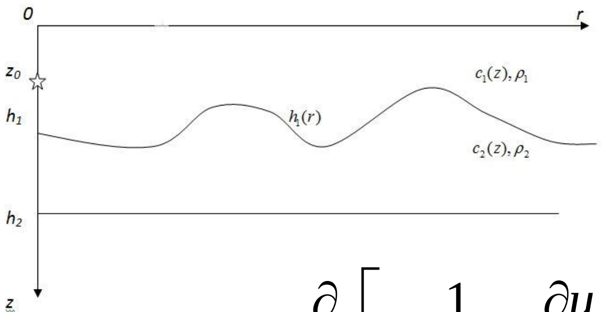
$$\frac{\partial p^{(2)}}{\partial z}(r,h_2)=0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}(r,z)+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial z}(r,z)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(r,z)-\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}(r,z)+k^2(r,z)\,p(r,z)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0).$$

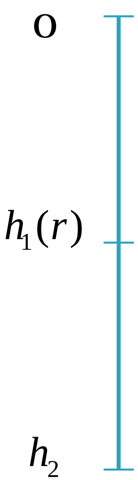
Το πρόβλημα με ακλόνητο πυθμένα στο h_2

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



Σε κάθε r

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho(r,z)}\frac{\partial u_n}{\partial z}(r,z)\right]+\left[\frac{k^2(r,z)}{\rho(r,z)}-\frac{\lambda_n(r)}{\rho(r,z)}\right]u_n(r,z)=0$$

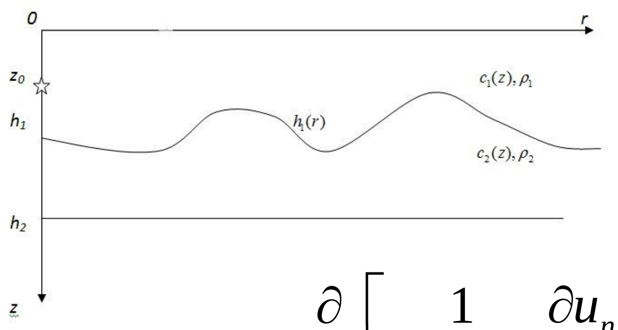


$$u_n(r,z)=\begin{cases} u_n^{(1)}(r,z) & \text{για} \quad 0\le z\le h_1(r) \\ u_n^{(2)}(r,z) & \text{για} \quad h_1(r)\le z\le h_2 \end{cases}$$

$$k(r,z)=\frac{\omega}{c(r,z)}=\begin{cases} k^{(1)}(r,z)=\dfrac{\omega}{c_1(r,z)} & \text{για} \quad 0\le z< h_1(r) \\ k^{(2)}(r,z)=\dfrac{\omega}{c_2(r,z)} & \text{για} \quad h_1(r)< z\le h_2 \end{cases}$$

$$\rho(r,z)=\begin{cases} \rho_1 & \text{για} \quad 0\le z< h_1(r) \\ \rho_2 & \text{για} \quad h_1(r)< z\le h_2 \end{cases}$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



Σε κάθε r

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho(r,z)}\frac{\partial u_n}{\partial z}(r,z)\right]+\left[\frac{k^2(r,z)}{\rho(r,z)}-\frac{\lambda_n(r)}{\rho(r,z)}\right]u_n(r,z)=0$$

o

$h_1(r)$

h_2

$$u_n^{(1)}(r,0)=0$$

$$u_n^{(1)}(r,h_1(r))=u_n^{(2)}(r,h_1(r))$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial z}(r,h_1(r))=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial z}(r,h_1(r))$$

$$\frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial z}(r,h_2)=0$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

$$p(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(r) u_n(r,z)$$

Προσοχή : Η πίεση δεν υπόκειται ακριβώς στις ίδιες συνθήκες στη διεπιφάνεια

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \vec{n}}(r,h_1(r)) = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial \vec{n}}(r,h_1(r))$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial z}(r,h_1(r)) = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial z}(r,h_1(r))$$

$$\int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r,z)} u_n(r,z) u_m(r,z) dz = \delta_{nm}$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2\varphi_n}{dr^2}u_n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d\varphi_n}{dr}\frac{\partial u_n}{\partial r} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_n}{\partial r}u_n + \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\frac{\partial u_n}{\partial r} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n\varphi_n = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{\rho(r,z)}u_m(r,z)$ Ολοκληρώνουμε από 0 έως h_2

$$\frac{d^2\varphi_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi_m}{dr} + \lambda_m(r)\varphi_m = -\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{mn}(r)\varphi_n + B_{mn}(r)\left[\frac{\varphi_n}{r} + 2\frac{d\varphi_n}{dr}\right]\right\}$$

$$A_{mn}(r) = \int_0^{h_2}\frac{1}{\rho(r,z)}u_m(r,z)\frac{\partial^2 u_n(r,z)}{\partial r^2}dz$$

$$B_{mn}(r) = \int_0^{h_2}\frac{1}{\rho(r,z)}u_m(r,z)\frac{\partial u_n(r,z)}{\partial r}dz$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

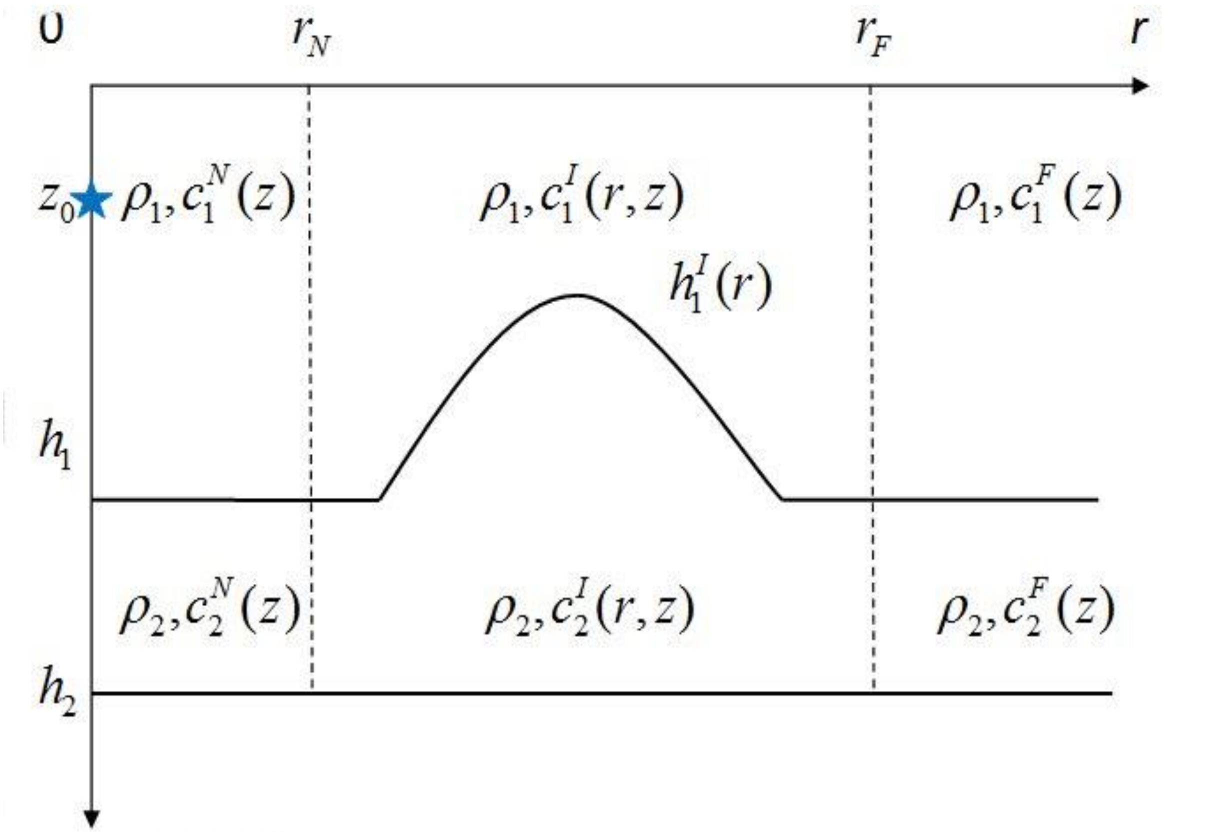
$$A_{mn}(r) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r,z)} u_m(r,z) \frac{\partial^2 u_n(r,z)}{\partial r^2} dz$$

$$B_{mn}(r) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r,z)} u_m(r,z) \frac{\partial u_n(r,z)}{\partial r} dz$$

Συντελεστές σύζευξης

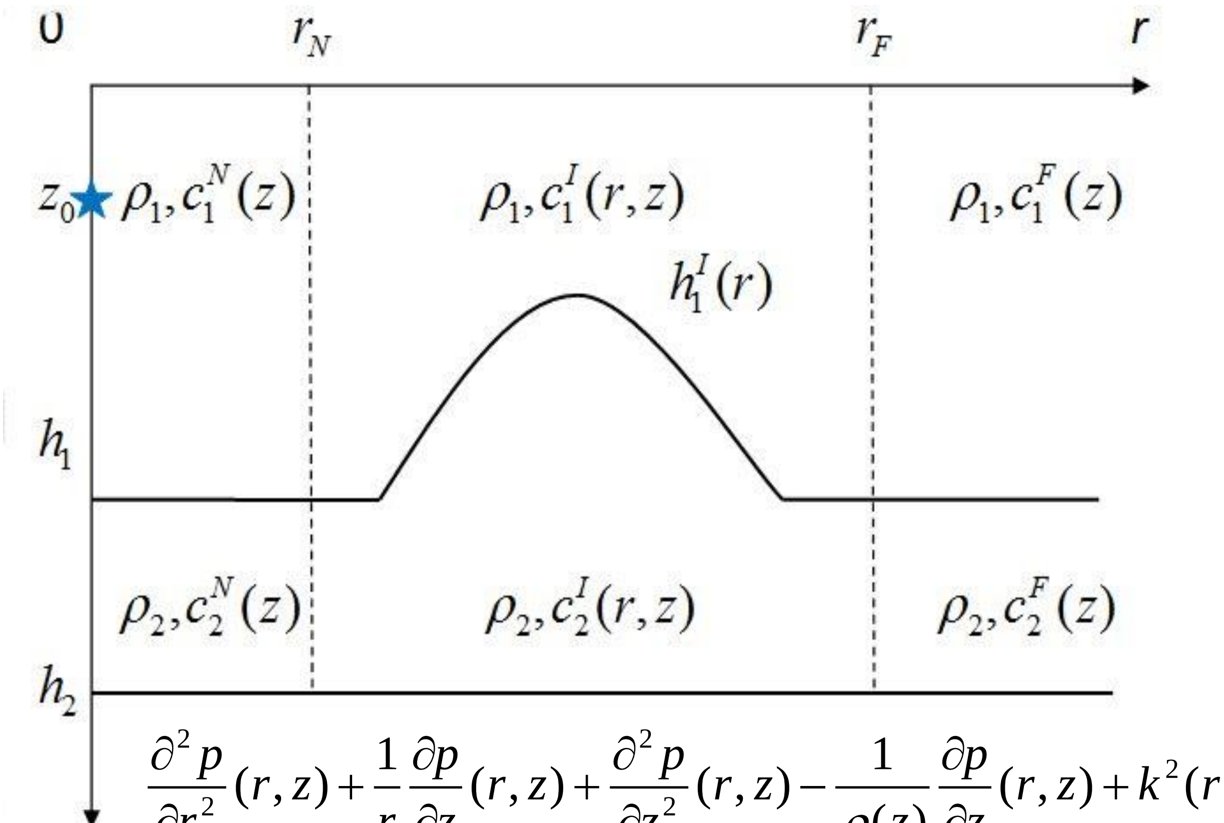
Εκφράζουν ανταλλαγή ενέργειας ανάμεσα στις ιδιομορφές

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



Ειδική περίπτωση : Τοπική ανομοιογένεια

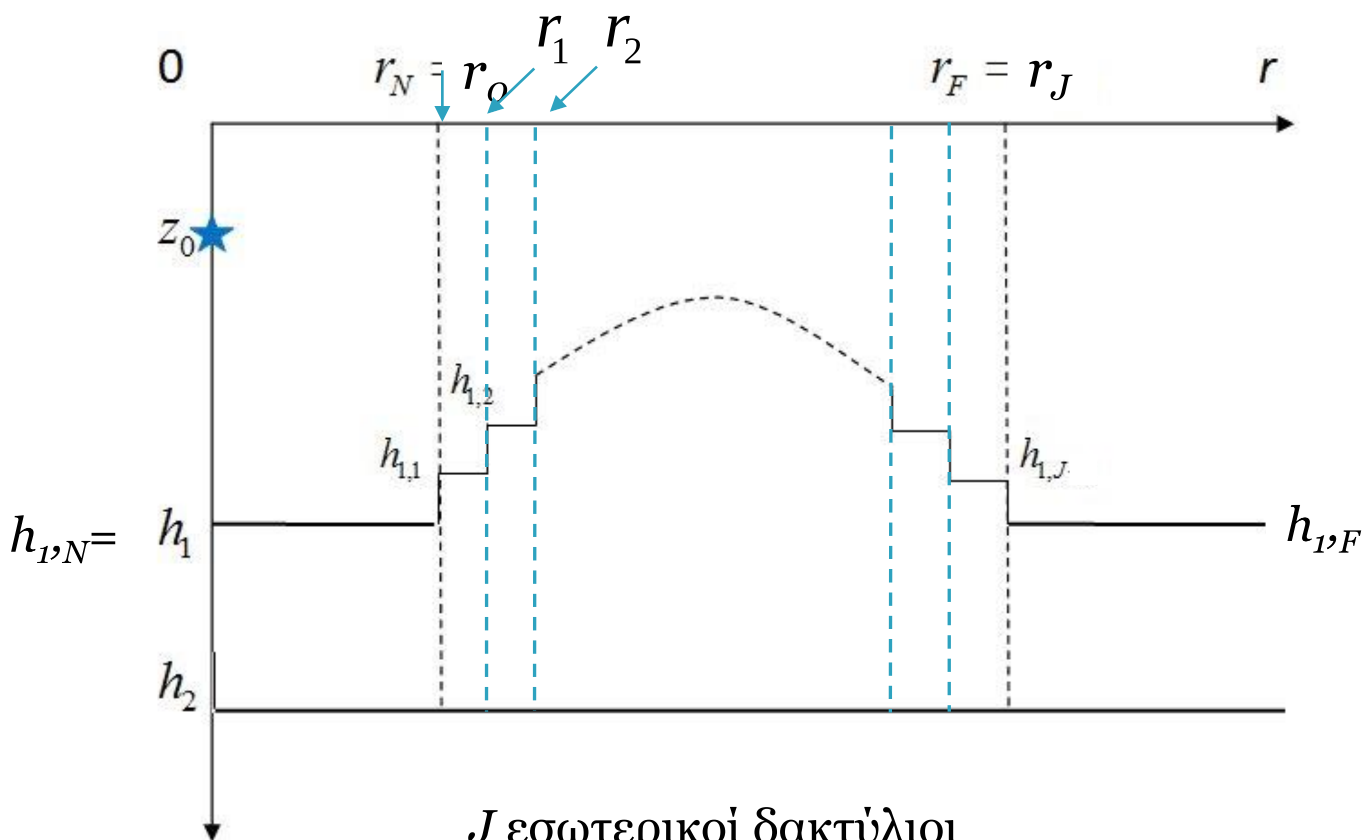
Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}(r,z)+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial z}(r,z)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(r,z)-\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}(r,z)+k^2(r,z)\,p(r,z)=$$

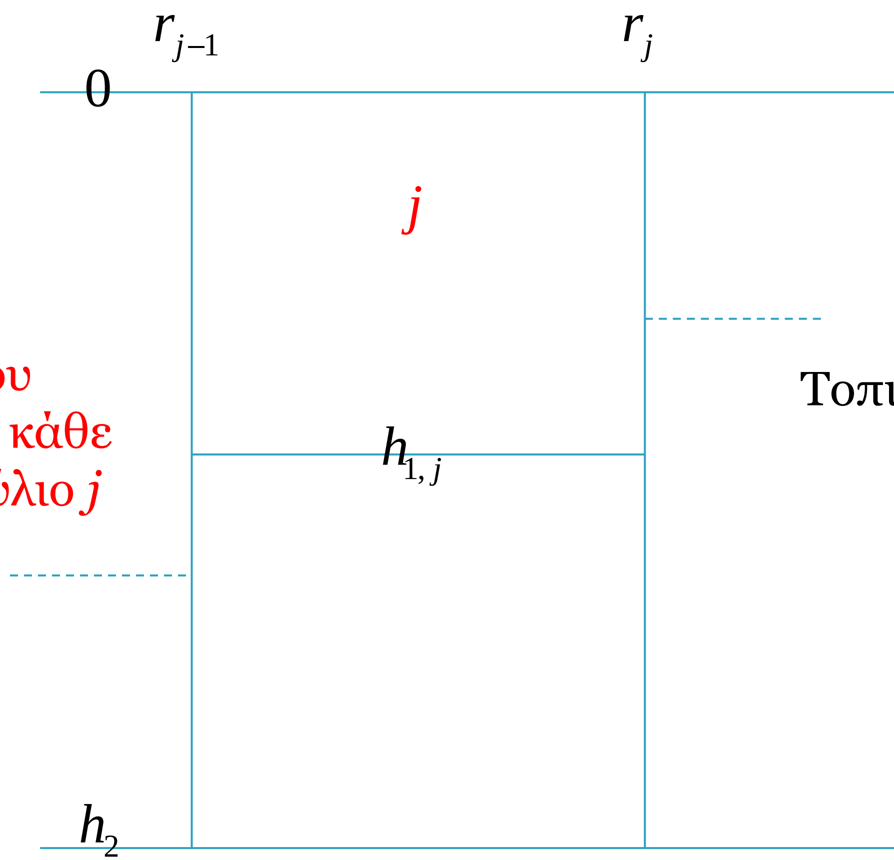
$$=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0).$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



J εσωτερικοί δακτύλιοι

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



Αντιμετώπιση του προβλήματος σε κάθε εσωτερικό δακτύλιο j

Τοπικό πρόβλημα βάθους

$c_j(z)$

$\rho_j(z)$

$p_j(r,z)$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\rho_j(z)}\frac{du_{n,j}}{\partial z}(z)\right]+\left[\frac{k_j{}^2(z)}{\rho_j(z)}-\frac{\lambda_{n,j}}{\rho_j(z)}\right]u_{n,j}(z)=0$$

$$u_{n,j}^{(1)}(0)=0$$

Τοπικό πρόβλημα βάθους

$$u_{n,j}^{(1)}(h_{1,j})=u_{n,j}^{(2)}(h_{1,j})$$

$$\frac{1}{\rho_{1,j}}\frac{du_{n,j}^{(1)}}{dz}(h_{1,j})=\frac{1}{\rho_{2,j}}\frac{du_{n,j}^{(2)}}{dz}(h_{1,j})$$

$$\frac{du_{n,j}^{(2)}}{dz}(h_2)=0$$

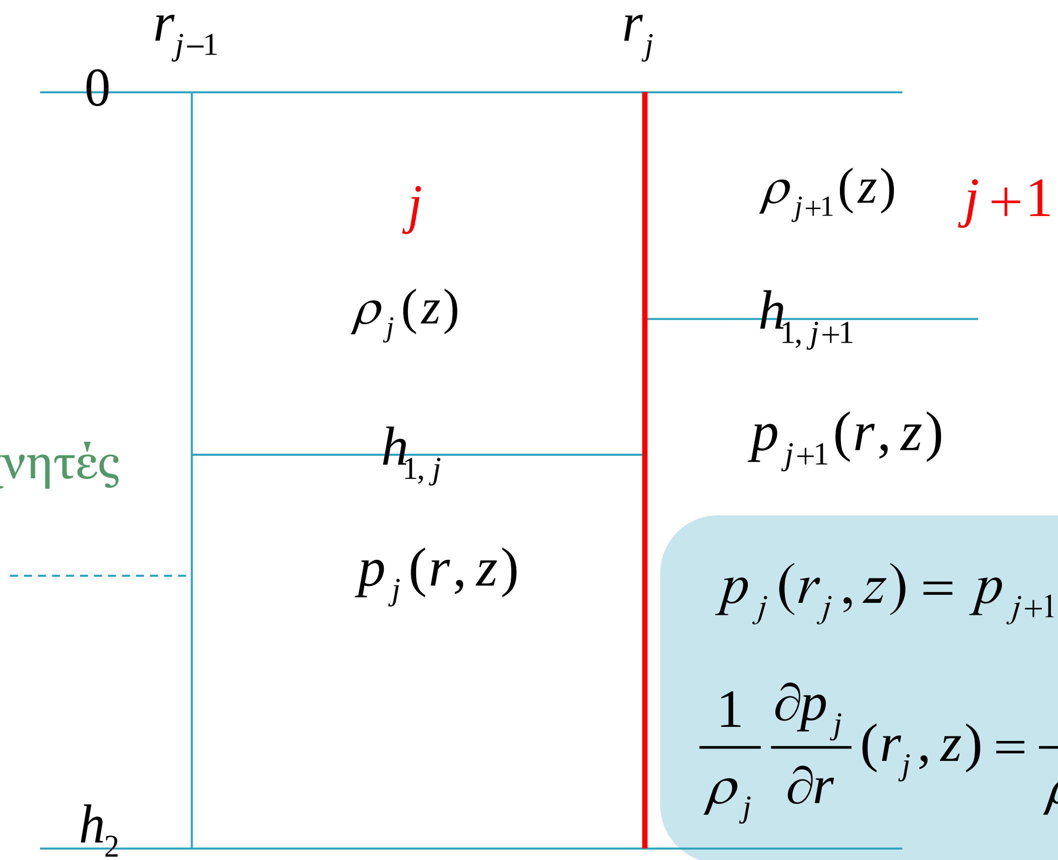
Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\rho_j(z)}\frac{du_{n,j}}{\partial z}(z)\right]+\left[\frac{k_j{}^2(z)}{\rho_j(z)}-\frac{\lambda_{n,j}}{\rho_j(z)}\right]u_{n,j}(z)=0$$

Τοπικό πρόβλημα βάθους

$$p_j(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,j}(r)u_{n,j}(z)$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



Συνθήκες στις κατακόρυφες τεχνητές διεπιφάνειες

$$p_j(r_j, z) = p_{j+1}(r_j, z)$$

$$\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial p_j}{\partial r}(r_j, z) = \frac{1}{\rho_{j+1}}\frac{\partial p_{j+1}}{\partial r}(r_j, z)$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

$$\frac{\partial^2 p_j}{\partial r^2}(r,z)+\frac{1}{r}\frac{\partial p_j}{\partial z}(r,z)+\frac{\partial^2 p_j}{\partial z^2}(r,z)-\frac{1}{\rho_j(z)}\frac{\partial p_j}{\partial z}(r,z)+k_j{}^2(z)p_j(r,z)=0$$

Δεν υπάρχει πηγή !

$$p_j(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,j}(r)u_{n,j}(z)$$

Αντιμετώπιση του προβλήματος σε κάθε εσωτερικό δακτύλιο *j*

$$\frac{d^2\phi_{n,j}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\phi_{n,j}}{dr}+\lambda_{n,j}\phi_{n,j}=0$$

$$\phi_{n,j}(r)=A_{n,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r)+B_{n,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r)$$

$$p_j(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{n,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r)+B_{n,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r\right\}u_{n,j}(z),\quad j=1,2,\ldots J$$

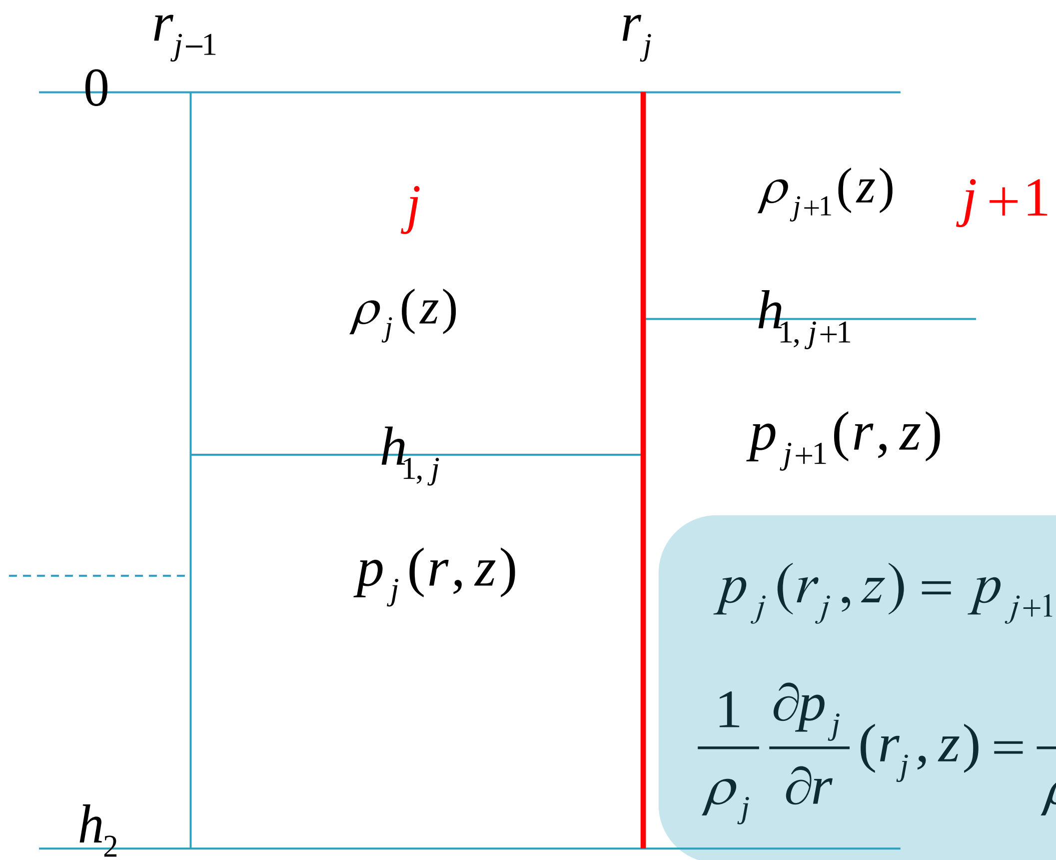
Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

$$p_j(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{n,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r)+B_{n,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r\right\}u_{n,j}(z), \quad j=1,2,\ldots J$$

Θα περιορίσουμε τη σειρά μας σε Μ όρους (Κανονικές ιδιομορφές)

$$p_j(r,z)=\sum_{n=1}^{\mathrm{M}}\left\{A_{n,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r)+B_{n,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r\right\}u_{n,j}(z), \quad j=1,2,\ldots J$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους



$$p_j(r_j,z) = p_{j+1}(r_j,z)$$

$$\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial p_j}{\partial r}(r_j,z) = \frac{1}{\rho_{j+1}}\frac{\partial p_{j+1}}{\partial r}(r_j,z)$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Συνθήκες στις κατακόρυφες διεπιφάνειες

$$\sum_{n=1}^{M}\left\{A_{n,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r_j)+B_{n,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r_j\right\}u_{n,j}(z)= \qquad \times\frac{1}{\rho_j}u_{m,j}(z)$$

$$=\sum_{n=1}^{M}\left\{A_{n,j+1}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}}r_j)+B_{n,j+1}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}}r_j\right\}u_{n,j+1}(z)$$

$$\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial}{\partial r}\sum_{n=1}^{M}\left\{A_{n,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r_j)+B_{n,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r_j\right\}u_{n,j}(z)= \qquad \times u_{m,j}(z)$$

$$=\frac{1}{\rho_{j+1}}\frac{\partial}{\partial r}\sum_{n=1}^{M}\left\{A_{n,j+1}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}}r_j)+B_{n,j+1}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}}r_j\right\}u_{n,j+1}(z)$$

Και ολοκληρώνουμε από 0-h_2

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Συνθήκες στις κατακόρυφες διεπιφάνειες

$$A_{m,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{m,j}}r_j)+B_{m,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{m,j}}r_j)=$$

$$=\int_0^{h_2}\frac{1}{\rho_j}\sum_{n=1}^{M}\left\{A_{n,j+1}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}}r_j)+B_{n,j+1}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}}r_j)\right\}u_{n,j+1}(z)u_{m,j}(z)dz\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(A_{m,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{m,j}}r_j)+B_{m,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{m,j}}r_j)\right)=$$

$$=\int_0^{h_2}\frac{1}{\rho_{j+1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{n=1}^{M}\left\{A_{n,j+1}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}}r_j)+B_{n,j+1}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}}r_j)\right\}\right)u_{n,j+1}(z)u_{m,j}(z)dz\ ,$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Συνθήκες στις κατακόρυφες διεπιφάνειες

$$\frac{dH_0^{(\nu)}(\kappa r)}{dr} = -\kappa H_1^{(\nu)}(\kappa r)$$

$$H_1^{(1)}(\kappa r) = -iH_0^{(1)}(\kappa r)$$

Χρησιμοποιούμε ιδιότητες των συναρτήσεων hankel

$$H_1^{(2)}(\kappa r) = iH_0^{(2)}(\kappa r)$$

$$C_{1mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_j} u_{m,j}(z) u_{n,j+1}(z) dz$$

Συντελεστές σύζευξης

$$C_{2mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_{j+1}} u_{m,j}(z) u_{n,j+1}(z) dz$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Συνθήκες στις κατακόρυφες διεπιφάνειες

$$C_{1mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_j} u_{m,j}(z) u_{n,j+1}(z) dz$$

$$C_{2mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_{j+1}} u_{m,j}(z) u_{n,j+1}(z) dz$$

$$A_{mn}(r) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r,z)} u_m(r,z) \frac{\partial^2 u_n(r,z)}{\partial r^2} dz$$

$$B_{mn}(r) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r,z)} u_m(r,z) \frac{\partial u_n(r,z)}{\partial r} dz$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Συνθήκες στις κατακόρυφες διεπιφάνειες

Σε κάθε εσωτερικό δακτύλιο έχομε 2M αγνώστους και 2Mx(J-1) γραμμικές εξισώσεις στις εσωτερικές τεχνητές διεπιφάνειες.

Θα πρέπει να εκφράσουμε τις λύσεις στον πρώτο δακτύλιο (που περικλείει την πηγή) και στον εξωτερικό δακτύλιο και να εφαρμόσουμε τις συνθήκες στις διεπιφάνειες ανάμεσα στον πρώτο δακτύλιο και στον πρώτο εσωτερικό δακτύλιο καθώς και στον τελευταίο εσωτερικό δακτύλιο και τον εξωτερικό δακτύλιο.

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Εξωτερικός δακτύλιος :

Δεν υπάρχει επανακτινοβολία ενέργειας από το άπειρο (Sommerfeld)

$$\phi_{n,j}(r) = A_{n,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}\, r) + B_{n,j} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}\, r)$$

$$\varphi_{n,F}(r) = A_{n,F} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,F}}\, r)$$

$$p_F(r,z) = \sum_{n=1}^{M} A_{n,F} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,F}}\, r) u_{n,F}(z)$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

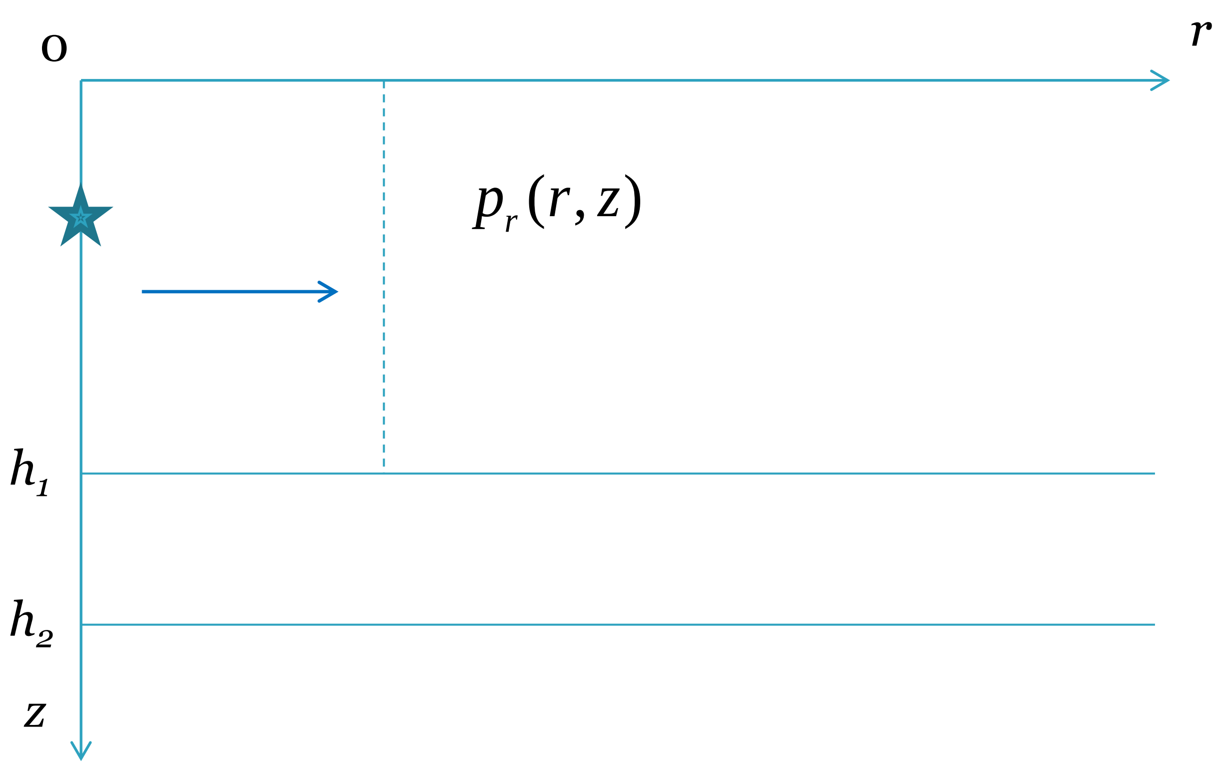
Εσωτερικός δακτύλιος :

Απομένει η μελέτη της συνθήκης πηγής: στο χωρίο που ορίζεται από $0 < r < r_1 = r_N$ και στο οποίο περιλαμβάνεται η ακουστική πηγή. Στο χωρίο αυτό μπορούμε να χωρίσουμε τη λύση μας σε δύο όρους. Ο πρώτος όρος αφορά τη λύση για το πρόβλημά μας όταν δεν υπάρχει η ανομοιογένεια (πεδίο ακτινοβολίας p_r και ο δεύτερος αφορά τη λύση για το πρόβλημα που προκύπτει λόγω της ανομοιομορφίας (πεδίο περίθλασης p_d).

$$p(r,z) = p_r(r,z) + p_d(r,z)$$

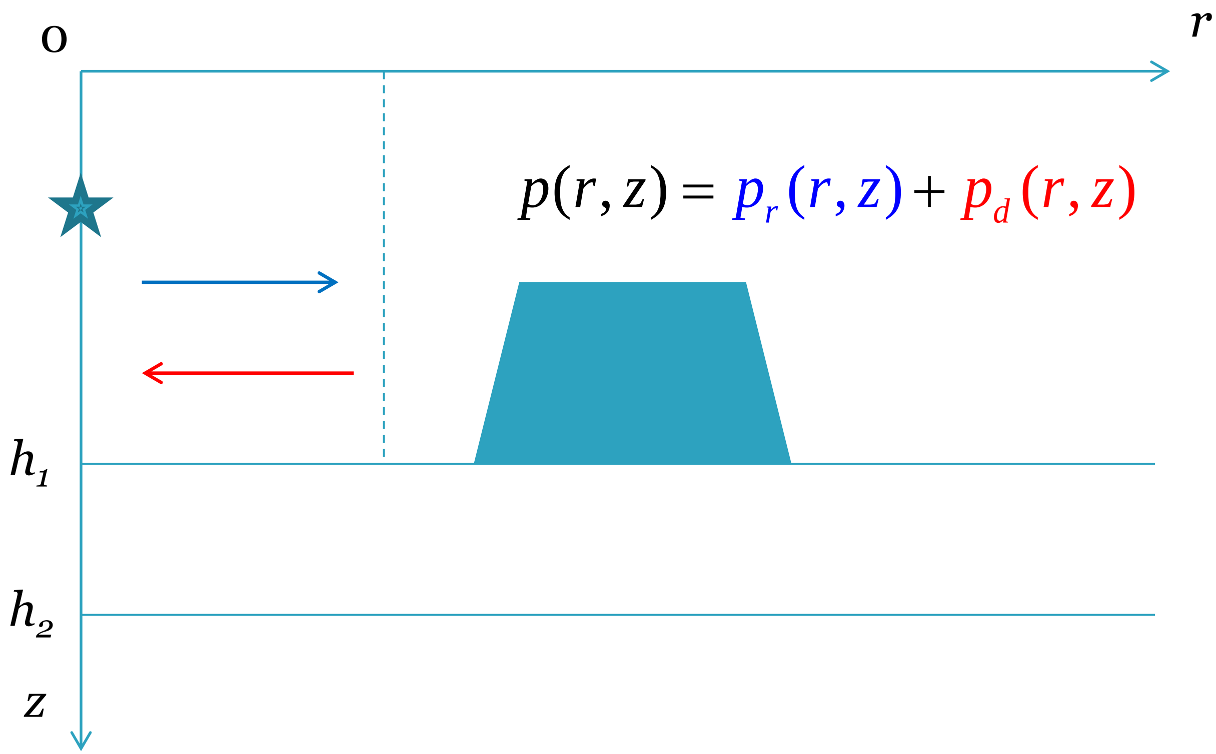
Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Εσωτερικός δακτύλιος :



Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Εσωτερικός δακτύλιος :



Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Εσωτερικός δακτύλιος :

$$p(r,z) = p_r(r,z) + p_d(r,z)$$

$$p_r(r,z) = \frac{i}{4\rho_1}\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,N}(z_0)u_{n,N}(z)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}}\,r)$$

Θέλομε αναλυτική λύση για r=0

$$p_d(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,N}u_{n,N}(z)J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}}\,r)$$

$$p_N(r,z) = \frac{i}{4\rho_1}\sum_{n=1}^{M} u_{n,N}(z_0)u_{n,N}(z)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}}\,r) + \sum_{n=1}^{M} C_{n,N}J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}}\,r)u_{n,N}(z)$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

$$p_N(r,z)=\frac{i}{4\rho_1}\sum_{n=1}^{M}u_{n,N}(z_0)u_{n,N}(z)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}}r)+\sum_{n=1}^{M}C_{n,N}J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}}r)u_{n,N}(z)$$

$$p_j(r,z)=\sum_{n=1}^{M}\left\{A_{n,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r)+B_{n,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r\right\}u_{n,j}(z),\quad j=1,2,\ldots J$$

$$p_F(r,z)=\sum_{n=1}^{M}A_{n,F}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,F}}r)u_{n,F}(z)$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Εφαρμόζουμε τις συνθήκες στην κατακόρυφη διεπιφάνεια ανάμεσα στον πρώτο δακτύλιο και τον πρώτο εσωτερικό (r_N)

$$p_N(r_N, z) = p_1(r_N, z)$$

$$\frac{1}{\rho_N}\frac{\partial p_N}{\partial r}(r_N, z) = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial r}(r_N, z)$$

Εφαρμόζουμε τις συνθήκες στην κατακόρυφη διεπιφάνεια ανάμεσα στον τελευταίο εσωτερικό και τον εξωτερικό δακτύλιο

$$p_J(r_F, z) = p_F(r_F, z)$$

$$\frac{1}{\rho_J}\frac{\partial p_J}{\partial r}(r_F, z) = \frac{1}{\rho_F}\frac{\partial p_F}{\partial r}(r_F, z)$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

Έχουμε επί πλέον $2M$ αγνώστους και $4M$ εξισώσεις

Σε κάθε εσωτερικό δακτύλιο έχομε $2M$ αγνώστους και $2M$x(J-1) γραμμικές εξισώσεις στις εσωτερικές τεχνητές διεπιφάνειες. Σύνολο αγνώστων στους εσωτερικούς δακτύλιους $2M$xJ.

Συνολικά έχομε $2M$x(J+1) αγνώστους και $2M$x(J-1)+$4M$ γραμμικές εξισώσεις στις εσωτερικές τεχνητές διεπιφάνειες. Σύνολο εξισώσεων $2M$x(J+1). Επομένως έχομε ένα γραμμικό σύστημα με τετραγωνικό πίνακα που μπορεί να δειχθεί ότι είναι αντιστρέψιμος και το σύστημα επιλυόμενο δίδει τους άγνωστους συντελεστές.

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

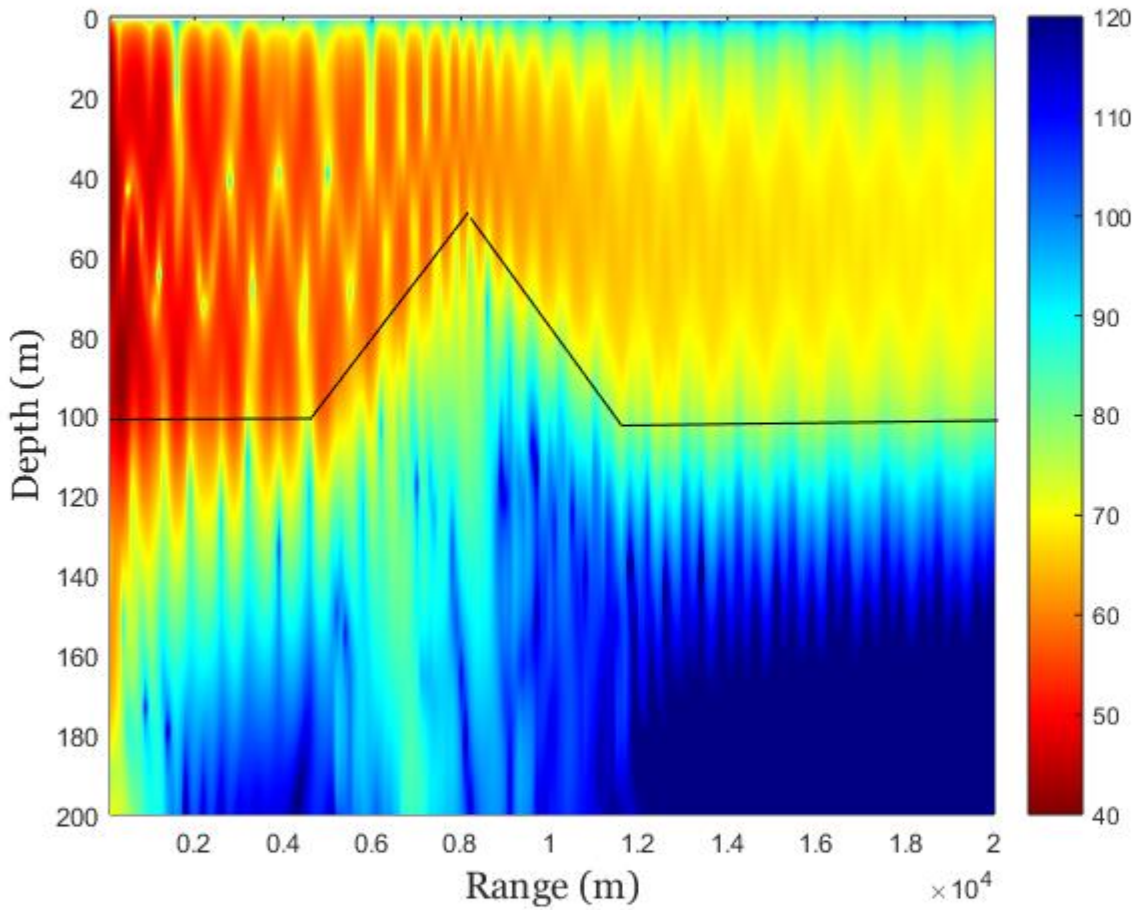
$$p_N(r,z) = \frac{i}{4\rho_1}\sum_{n=1}^{M} u_{n,N}(z_0)u_{n,N}(z)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}}r) + \sum_{n=1}^{M} C_{n,N}J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}}r)u_{n,N}(z)$$

$$p_j(r,z) = \sum_{n=1}^{M}\left\{A_{n,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r) + B_{n,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r\right\}u_{n,j}(z), \quad j = 1,2,\ldots J$$

$$p_F(r,z) = \sum_{n=1}^{M} A_{n,F}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,F}}r)u_{n,F}(z)$$

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

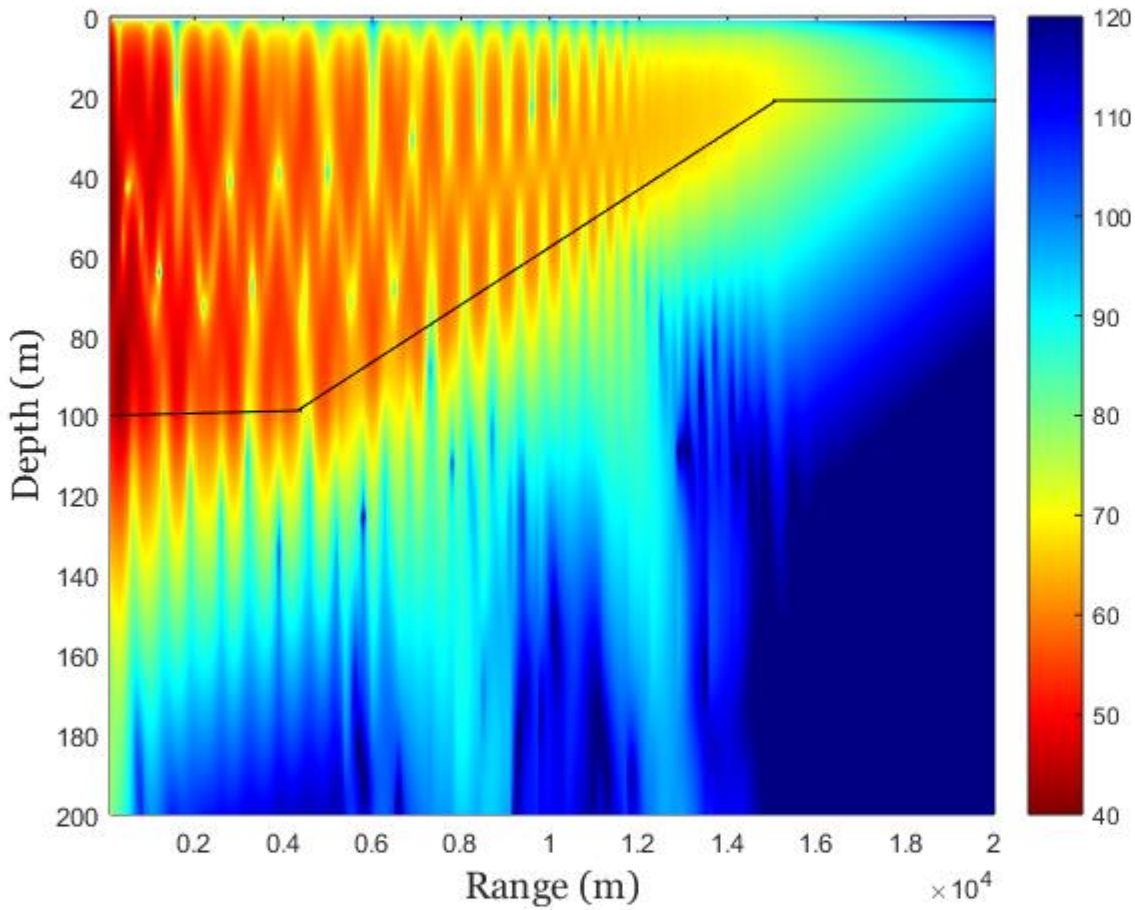
z_0 =30m
f=50 Hz
J=20



c_1 =1500 m/sec
c_2 =1700 m/sec
ρ_1 =1000 kg/m^3
ρ_2 =1300 kg/m^3

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

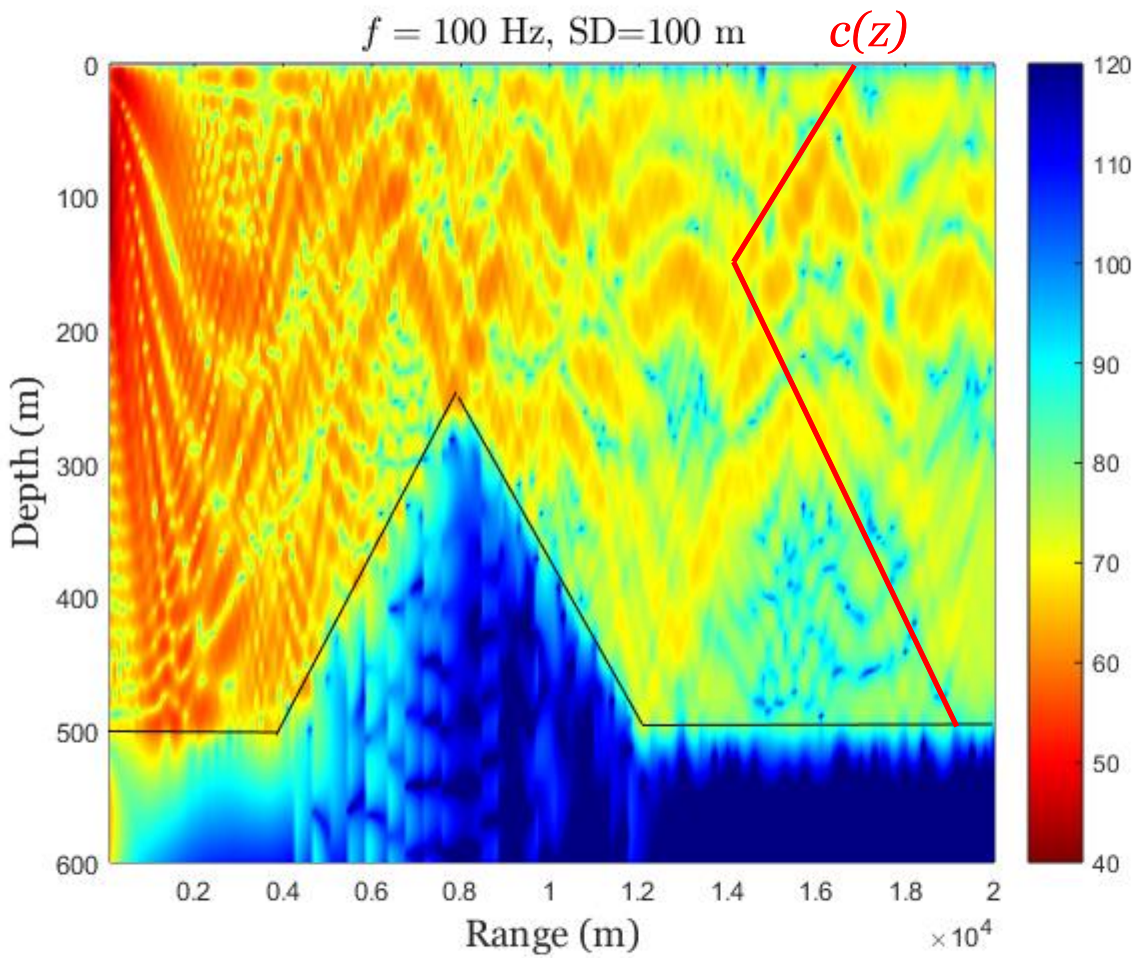
z_0 =30m
f=50 Hz
J=20



c_1 =1500 m/sec
c_2 =1700 m/sec
ρ_1 =1000 kg/m^3
ρ_2 =1300 kg/m^3

Π4 Κυματοδηγός με μεταβαλλόμενες συναρτήσει της απόστασης παραμέτρους

z_0 =100m
f=100 Hz
J=20



$c_1(0)$=1500 m/sec
$c_1(150)$=1490 m/sec
$c_1(500)$=1530 m/sec
c_2 =1650 m/sec
ρ_1 =1000 kg/m^3
ρ_2 =1250 kg/m^3