Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Κυματική Διάδοση

2023-2024

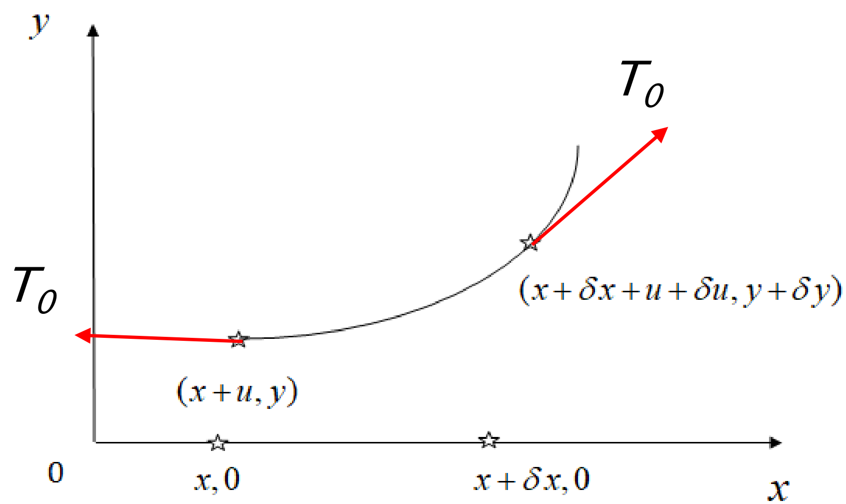
2η διάλεξη

Μιχάλης Ταρουδάκης

Εγκάρσια κίνηση χορδής

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



Ταλαντώσεις μικρού πλάτους

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

Προβλήματα οριακών τιμών

$$\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L$$

Λύση με χωρισμό μεταβλητών

Λύση D'Alembert

Θεώρημα ΙΙ

Η λύση της εξίσωσης $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ είναι $y = f(x-ct) + g(x+ct)$

Λύση D'Alembert

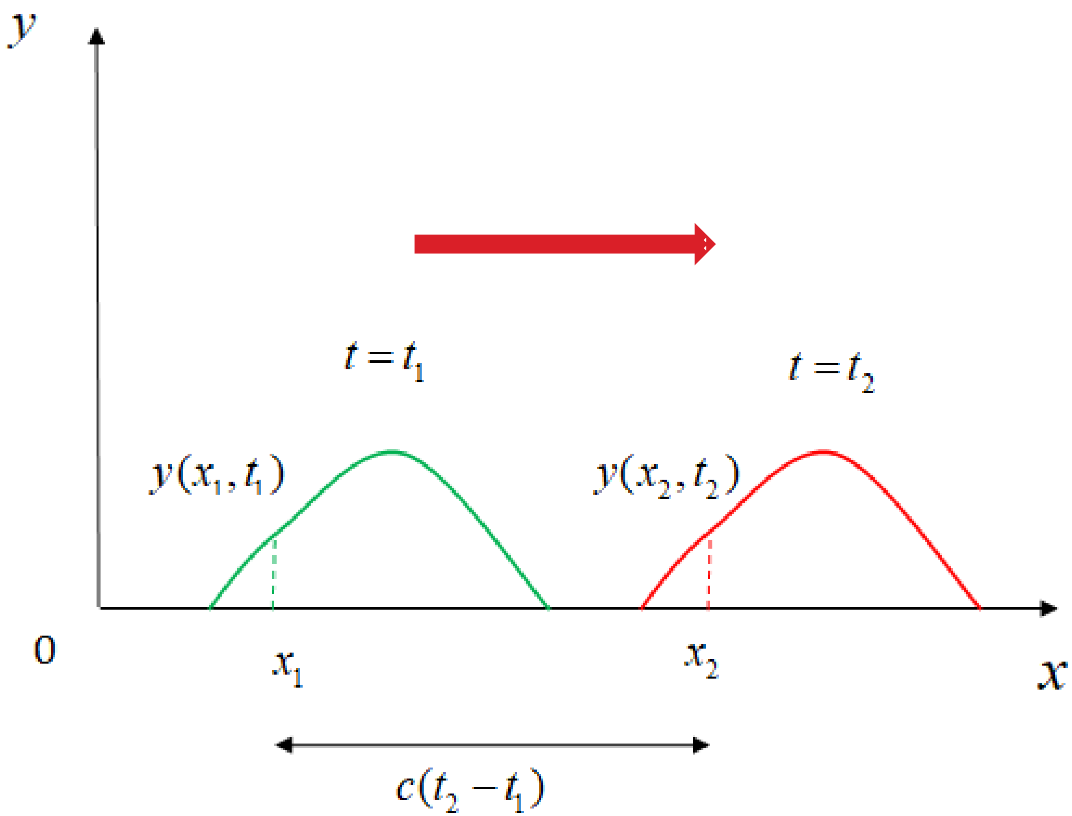
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$y = f(x - ct)$$

$$x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2 \Rightarrow$$
$$y(x_1 - ct) = y(x_2 - ct_2)$$

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$

$$c = \frac{(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1}$$



Αρμονικά κύματα

- Γενικές συναρτήσεις δεν αποτελούν πάντα λύσεις σε γενικά προβλήματα κυμάτων.

- Λύσεις ημιτονοειδούς μορφής αποτελούν λύσεις σε ευρείες κλάσεις κυματικών προβλημάτων και θα μας απασχολήσουν σε αυτό το μάθημα.

Αρμονικά οδεύοντα κύματα

$$y = a\cos(\alpha(x - ct) + \varepsilon)$$

$$y = b\cos(\beta(x + ct) - \gamma)$$

$a, b, \alpha, \beta, \varepsilon, \gamma \in \mathbb{R}$ $\quad\quad$ $a, b, \alpha, \beta > 0$

Πλάτος a, b

Για δεδομένο t η μετατόπιση y είναι περιοδική *στο* x

Μήκος κύματος λ: Ελάχιστη απόσταση που η μετατόπιση y επαναλαμβάνει τις τιμές της

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Αρμονικά οδεύοντα κύματα

$$y = a\cos(\alpha(x - ct) + \varepsilon)$$

$$y = b\cos(\beta(x + ct) - \gamma)$$

$a, b, \alpha, \beta, \varepsilon, \gamma \in \mathbb{R}$ $\qquad a, b, \alpha, \beta > 0$

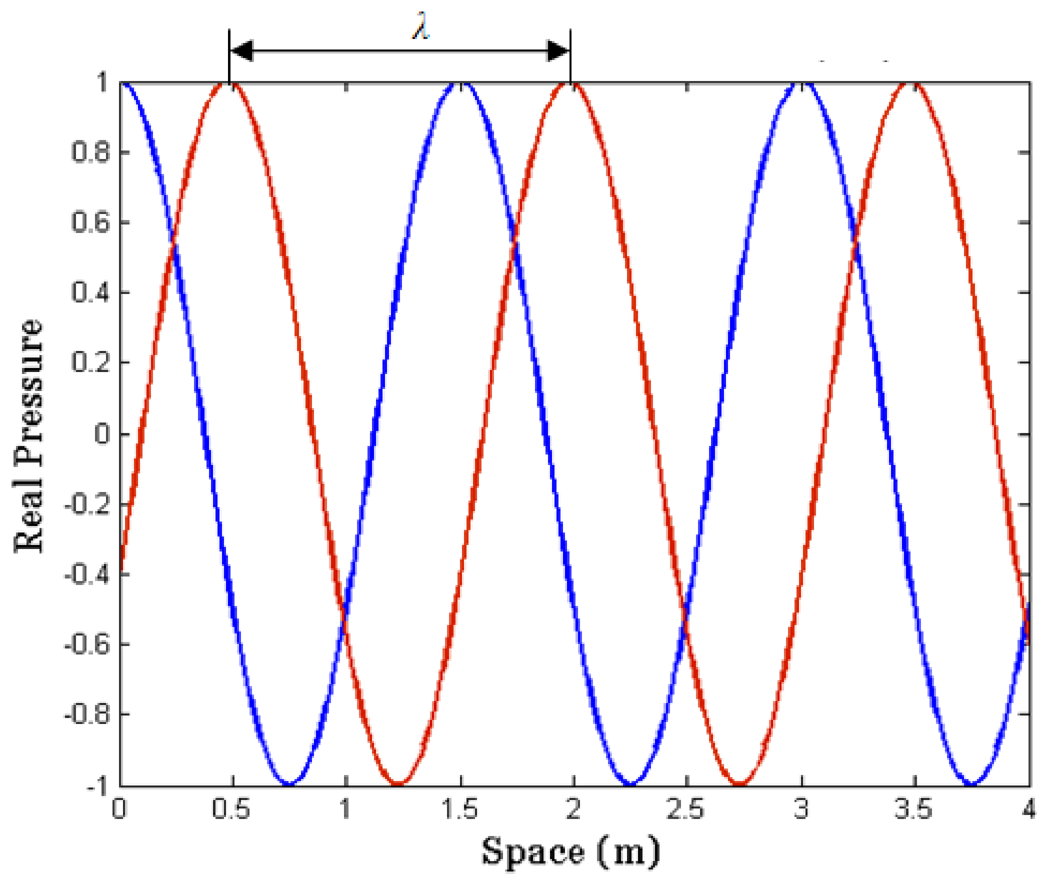
Πλάτος a, b

Για δεδομένο t η μετατόπιση y είναι περιοδική *στο* x

Μήκος κύματος $\boldsymbol{\lambda}$: Ελάχιστη απόσταση που η μετατόπιση y επαναλαμβάνει τις τιμές της

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Αρμονικά οδεύοντα κύματα



Αρμονικά οδεύοντα κύματα

$$y = a\cos(\alpha(x - ct) + \varepsilon)$$

$$y = b\cos(\beta(x + ct) - \gamma)$$

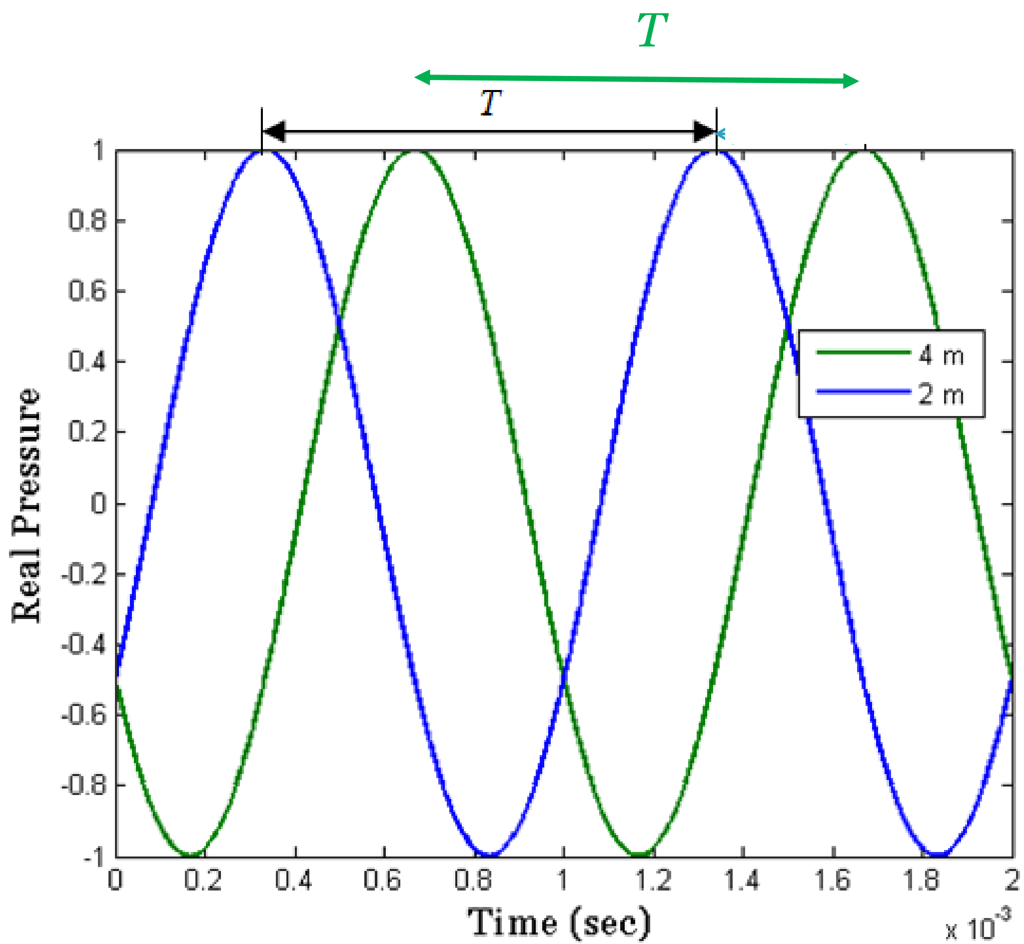
Περίοδος κύματος $\boldsymbol{T}$: Χρόνος που απαιτείται για να περάσει ένα πλήρες μήκος κύματος από ένα συγκεκριμένο σημείο

$$T = \frac{\lambda}{c}$$

Συχνότητα κύματος $\boldsymbol{f}$: Αριθμός μηκών κύματος που περνούν από ένα συγκεκριμένο σημείο στη μονάδα του χρόνου.

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{T}$$

Αρμονικά οδεύοντα κύματα



Αρμονικά οδεύοντα κύματα

$$y = a\cos(\alpha(x - ct) + \varepsilon)$$

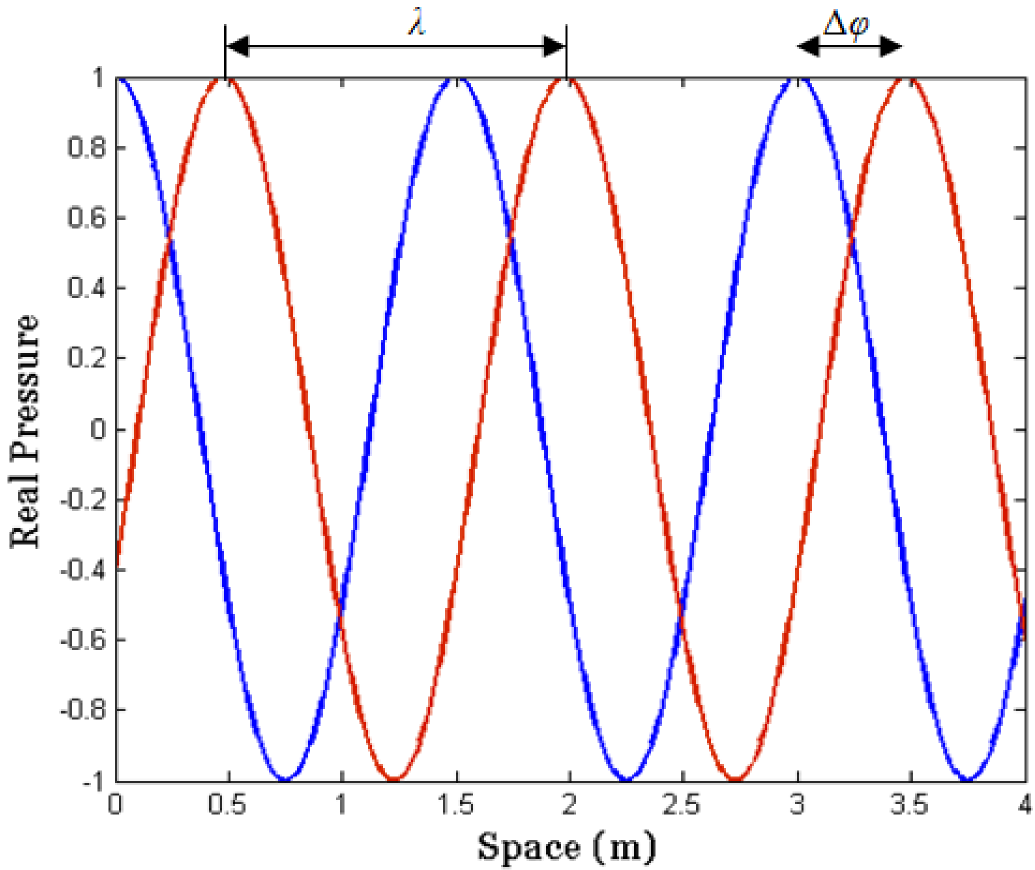
$$y = b\cos(\beta(x + ct) - \gamma)$$

Κυκλική συχνότητα ω: $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

Αριθμός κύματος k: $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi f}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

ε, γ ***: Σταθερές φάσεις .*** Όταν οι διαφορές φάσεις δύο όμοιων κατά τα άλλα κυμάτων είναι 0 ή ζυγά πολλαπλάσια του π, τα κύματα είναι «***σε φάση***». Σε διαφορετική περίπτωση είναι «***εκτός φάσης***».

Αρμονικά οδεύοντα κύματα



Αρμονικά οδεύοντα κύματα

$$y = a\cos(\alpha(x - ct) + \varepsilon)$$
$$y = b\cos(\beta(x + ct) - \gamma)$$

$$\alpha = \beta = k$$

$$y = a\cos(kx - \omega t + \varepsilon)$$
$$y = b\cos(kx + \omega t - \gamma)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$y = aR\left[e^{i(kx-\omega t+\varepsilon)}\right]$$
$$= R\left[ae^{i\varepsilon}e^{i(kx-\omega t)}\right]$$
$$= R\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]$$

Εάν y είναι μια πραγματική φυσική παράμετρος

$$y = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

Κύματα οδεύοντα στα θετικά

$$y = Be^{i(kx+\omega t)}$$

Κύματα οδεύοντα στα αρνητικά

Αρμονικά οδεύοντα κύματα

$$y = a\cos(\alpha(-x-ct)+\varepsilon)$$
$$y = b\cos(\beta(-x+ct)-\gamma)$$

$$\alpha = \beta = k$$

$$y = a\cos(-kx-\omega t+\varepsilon)$$
$$y = b\cos\underbrace{(-kx+\omega t-\gamma)}_{\text{Φάση}}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Εάν y είναι μια πραγματική φυσική παράμετρος

$$y = aR\left[e^{i(-kx-\omega t+\varepsilon)}\right]$$
$$= R\left[ae^{i\varepsilon}e^{i(-kx-\omega t)}\right]$$
$$= R\left[Ae^{i(-kx-\omega t)}\right]$$

$$y = Ae^{i(-kx-\omega t)}$$

Κύματα οδεύοντα στα αρνητικά

$$y = Be^{i(-kx+\omega t)}$$

Κύματα οδεύοντα στα θετικά

Αρμονικά οδεύοντα κύματα

Φασική ταχύτητα c_p: Ταχύτητα διάδοσης ενός σημείου σταθερής φάσης

Για αρμονικά κύματα ταυτίζεται με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος

Απόδειξη

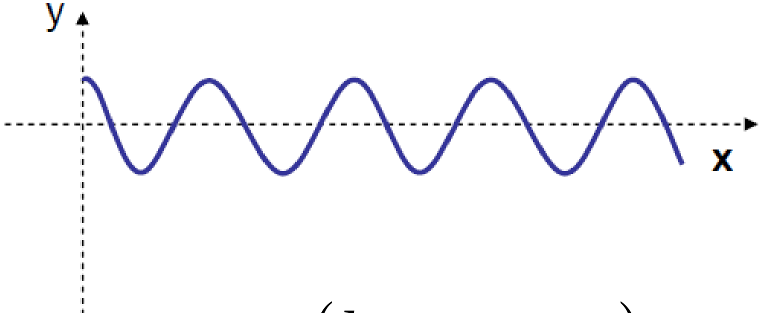
Έστω x σημείο σταθερής φάσης

$$\Phi = \left(kx - \omega t - \gamma\right) = \sigma\tau. \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow k\frac{\partial x}{\partial t} - \omega = 0$$

$$c_p = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\omega}{k} = c$$

Αρμονικά οδεύοντα κύματα

Ταχύτητα ενός στοιχειώδους σωματιδίου υποκείμενου σε κυματικό φαινόμενο u_y : π.χ. Ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου στην ταλαντούμενη χορδή



$$y = acos\left(kx - \omega t + \varepsilon\right)$$

$$u_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

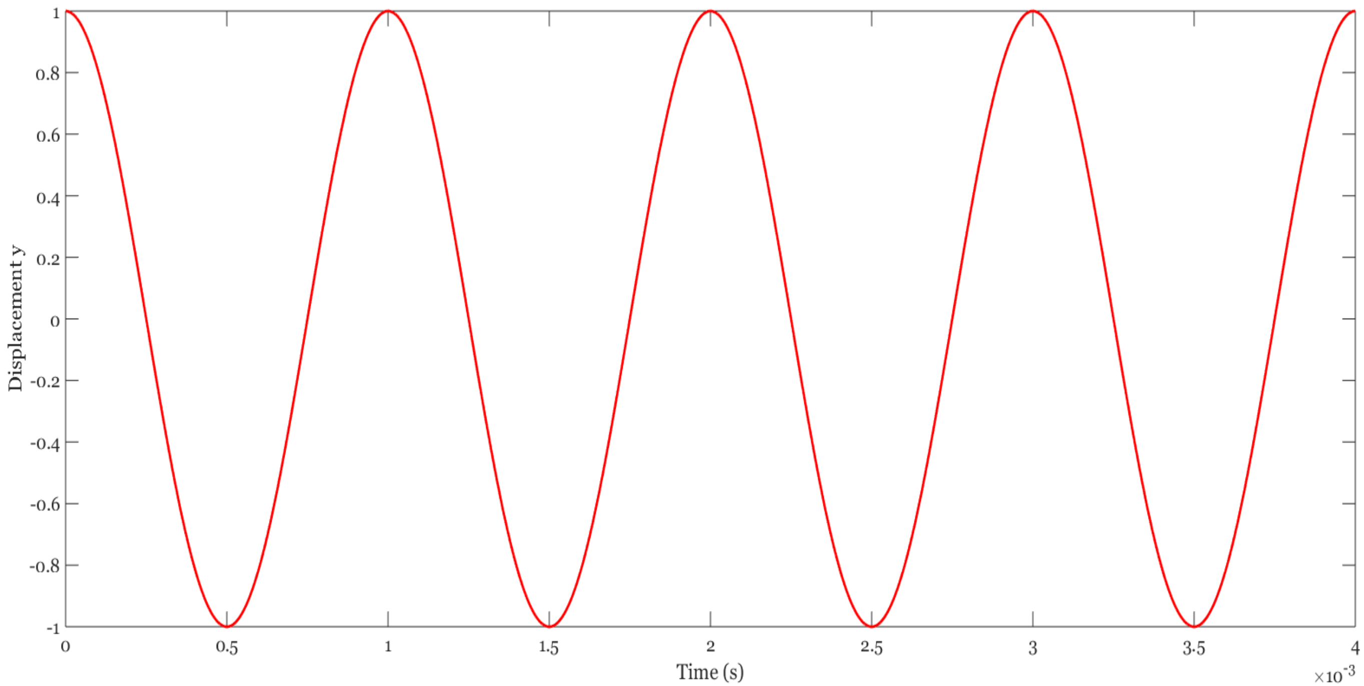
$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\omega\, sin\left(kx - \omega t + \varepsilon\right)$$

$$u_y^{max} = a\omega \qquad y = 0$$

Αρμονικά οδεύοντα κύματα

$$y = a\cos(kx - \omega t)$$

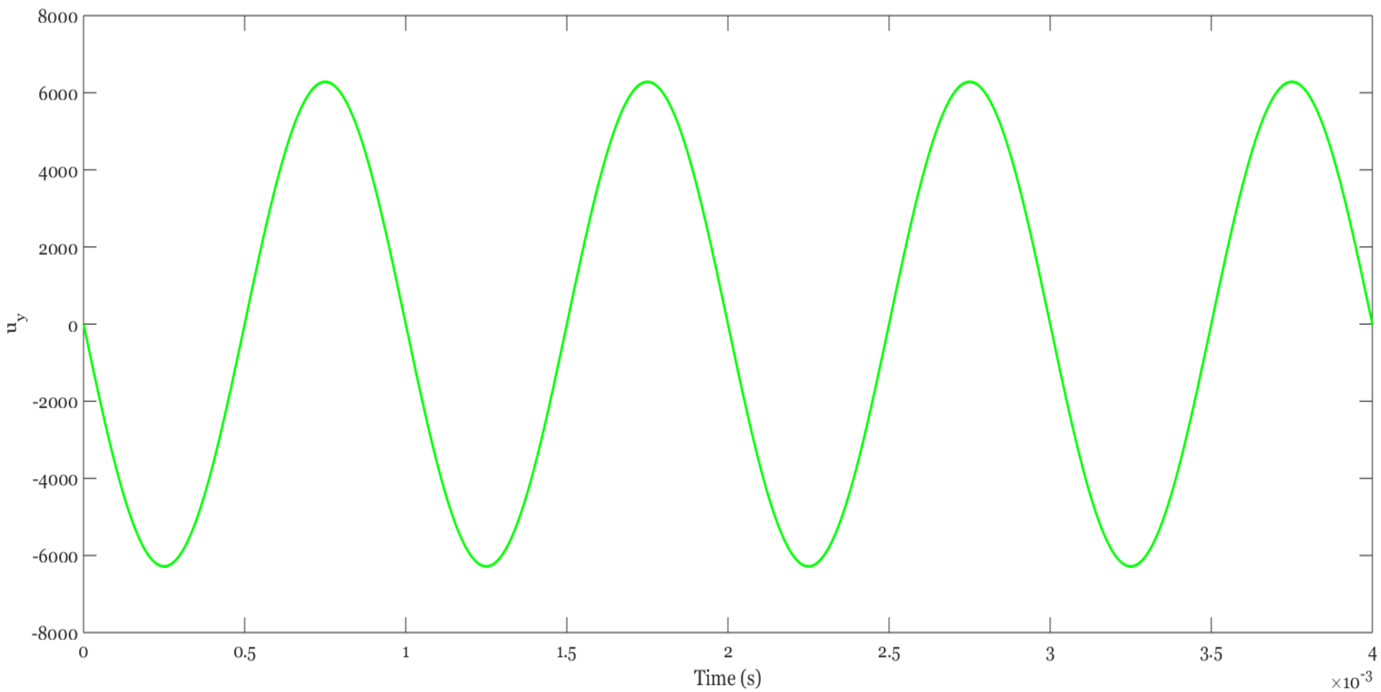
c=350 m/s
f=1000 Hz
x=0
α=1



Αρμονικά οδεύοντα κύματα

$$u_y = a\omega \sin(kx - \omega t)$$

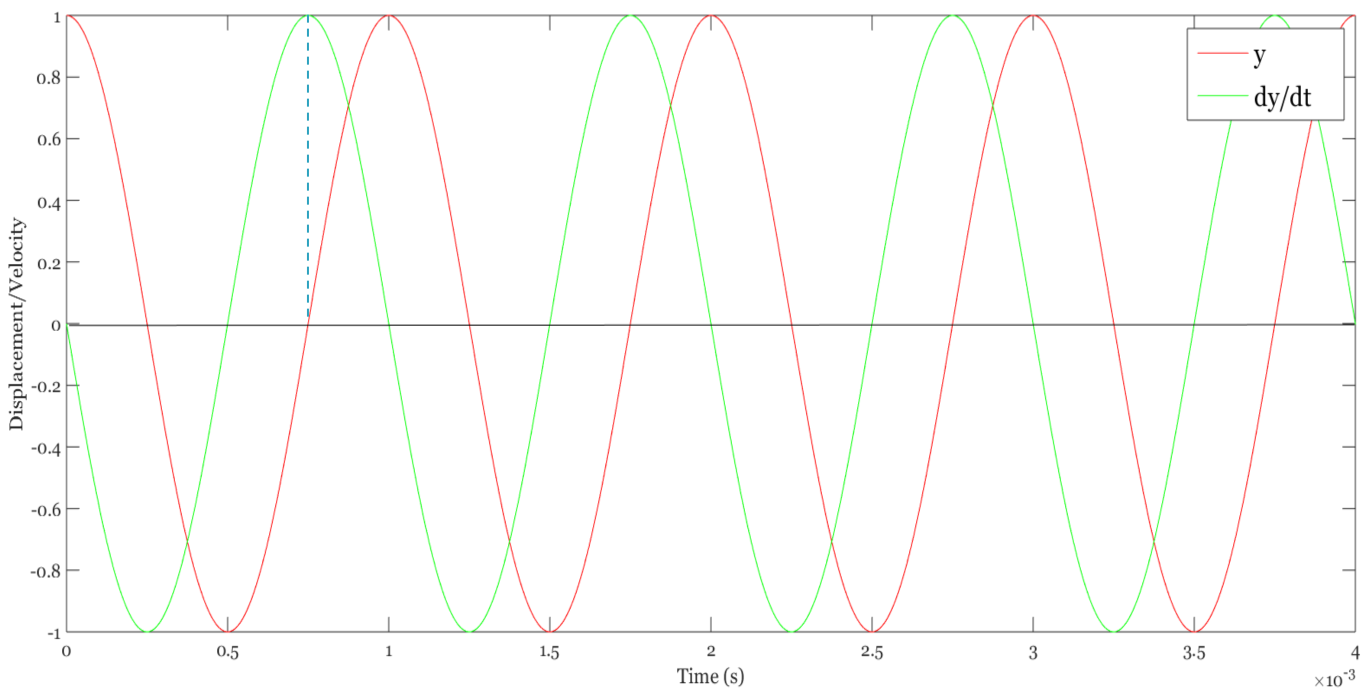
c=350 m/s
f=1000 Hz
x=0
α=1



Αρμονικά οδεύοντα κύματα

$$y = a\cos(kx - \omega t) \qquad u_y = a\omega\sin(kx - \omega t)$$

c=350 m/s
f=1000 Hz
x=0
α=1



Κανονικοποιημένη ταχύτητα

Αρμονικά οδεύοντα κύματα

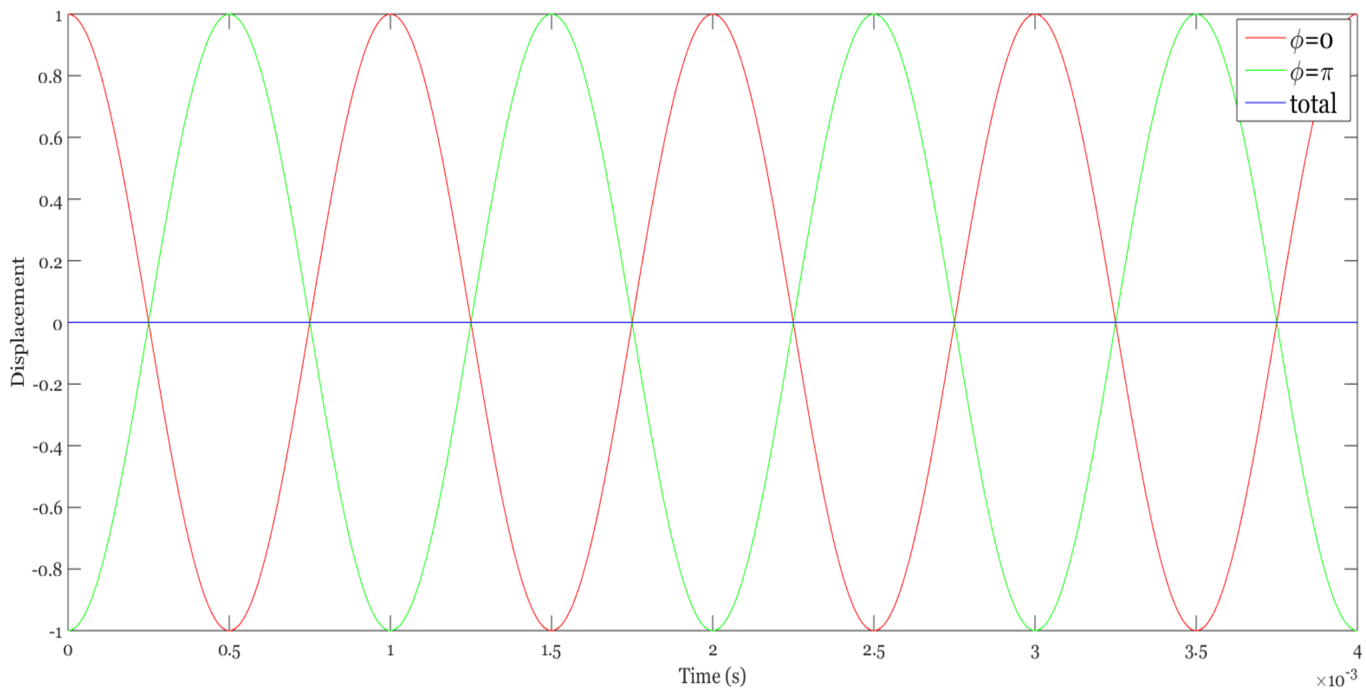
Αρχή επαλληλίας

Όταν σε ένα μέσον διαδίδονται δύο ή περισσότερα κύματα, η ολική διαταραχή είναι το άθροισμα των επί μέρους διαταραχών. Η αρχή επαλληλίας ισχύει για γραμμικά συστήματα που ουσιαστικά στην περίπτωση κυμάτων αφορούν μικρές διαταραχές.

Αρχή επαλληλίας

$$y = a\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

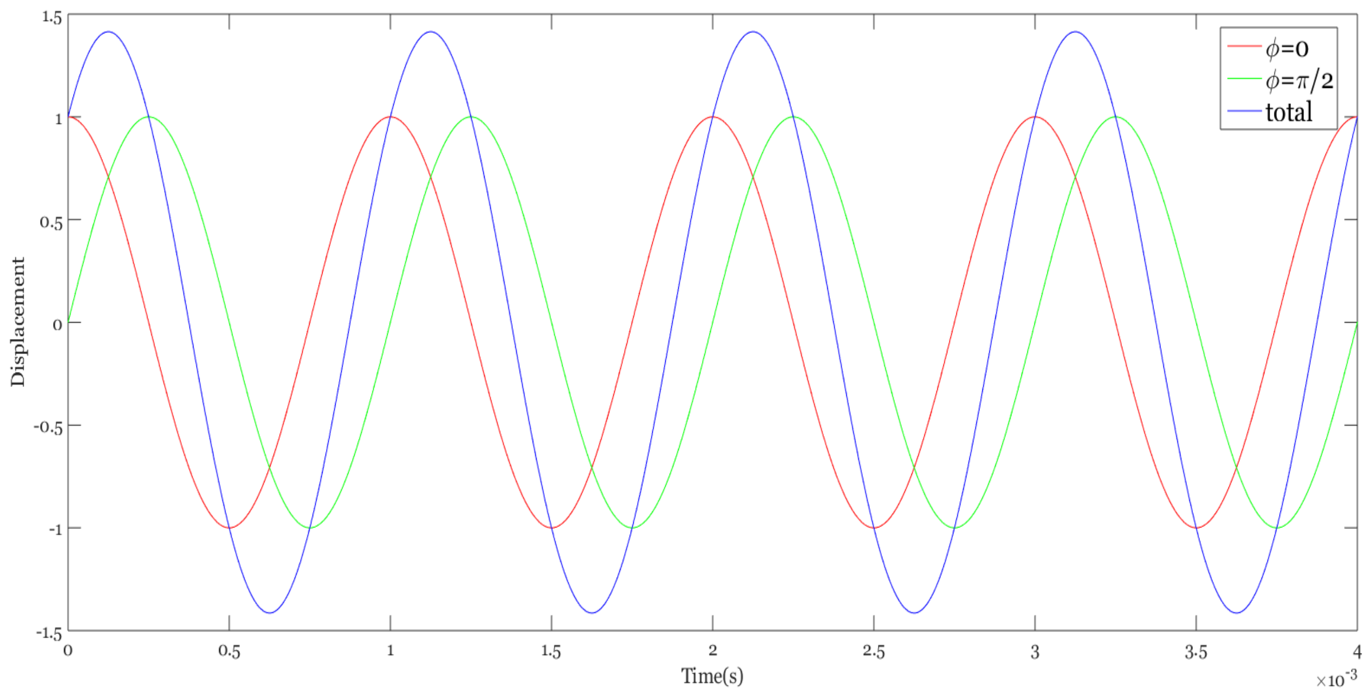
c=350 m/s
f=1000 Hz
x=0
α=1



Αρχή επαλληλίας

$$y = a\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

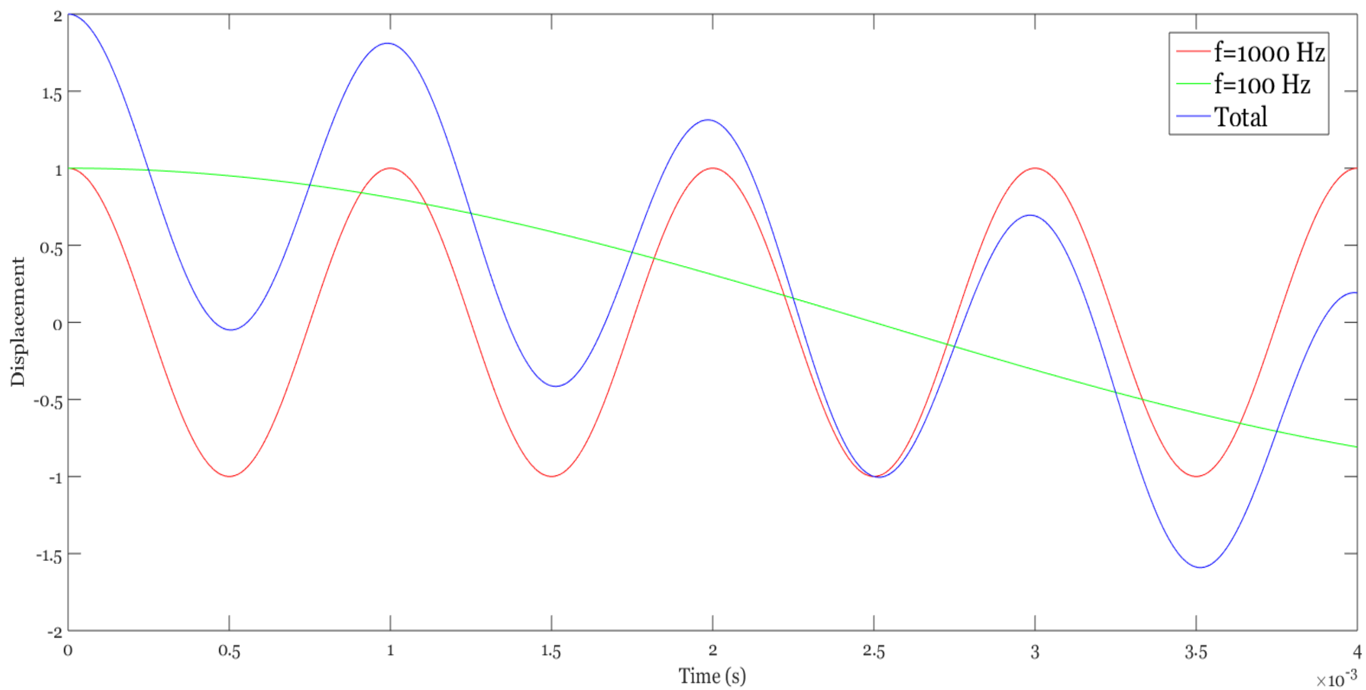
c=350 m/s
f=1000 Hz
x=0
α=1



Αρχή επαλληλίας

$$y_1 = a\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$y_2 = a\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

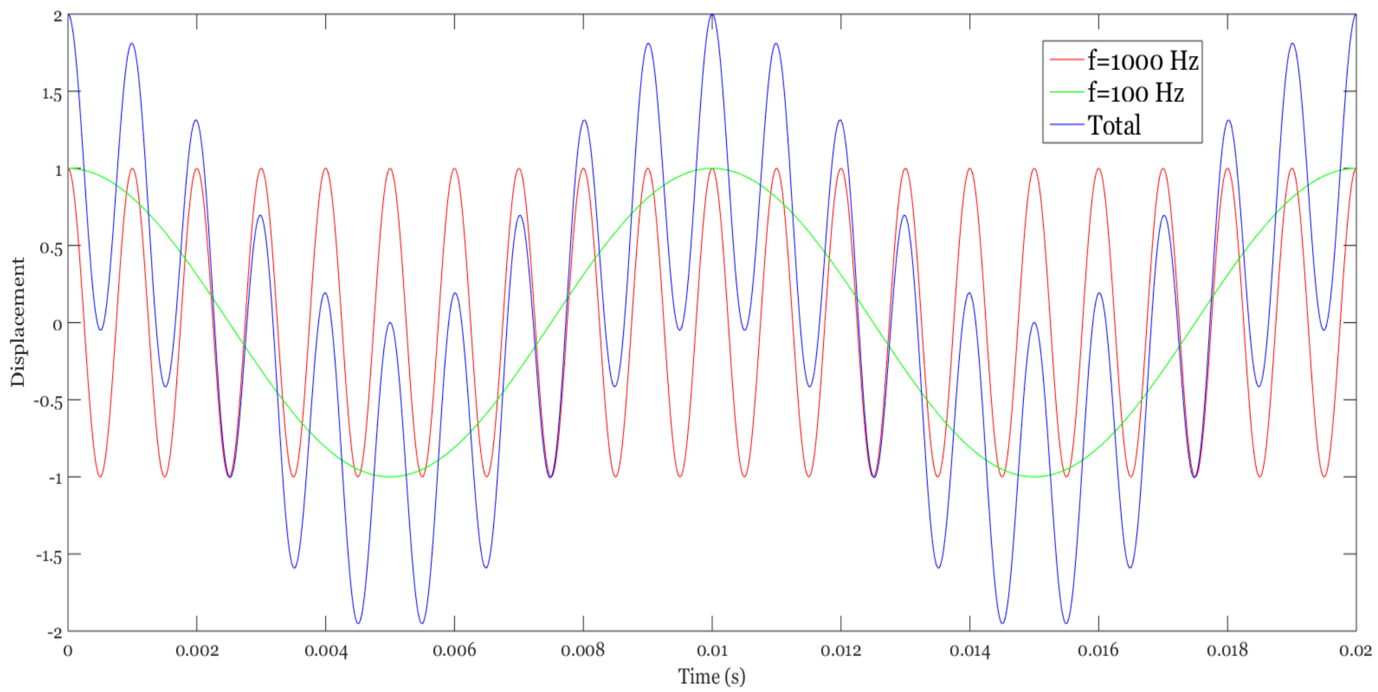
c=350 m/s
f_1=1000 Hz
f_2=100 Hz
x=0



Αρχή επαλληλίας

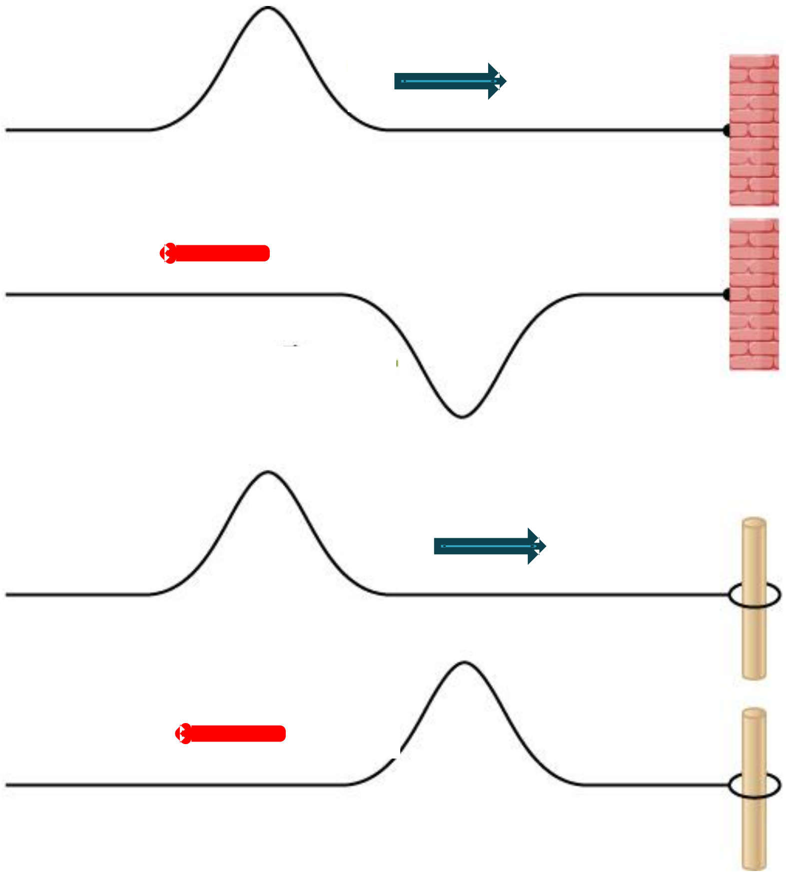
$$y_1 = a\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$y_2 = a\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

c=350 m/s
f_1=1000 Hz
f_2=100 Hz
x=0



Ανάκλαση από σύνορο

Όταν η χορδή συναντήσει ένα σύνορο, αναστρέφεται η διάδοση του κύματος.



Αναστροφή φάσης

Σταθερό σύνορο

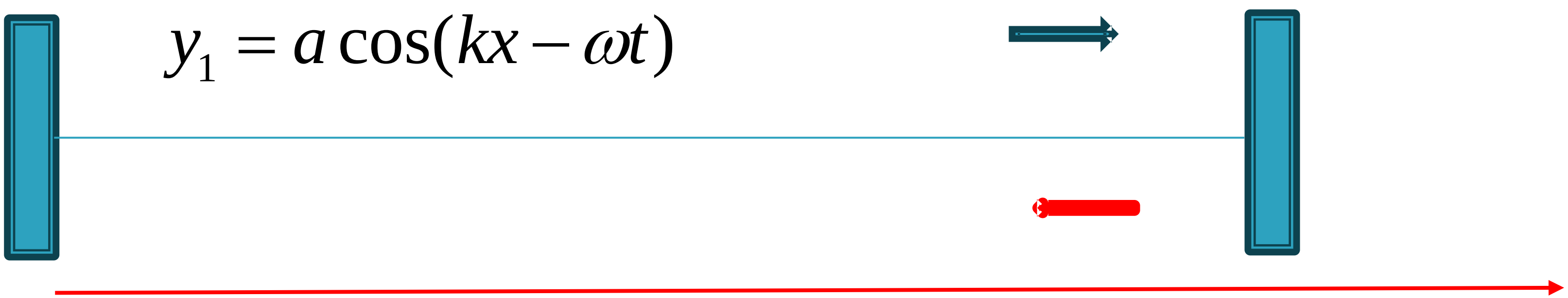
Διατήρηση φάσης

Ελεύθερο σύνορο

Στάσιμα κύματα

Θεωρούμε αρμονική διαταραχή σε χορδή που είναι πακτωμένη και στα δύο της άκρα

$$y_1 = a\cos(kx - \omega t)$$



$$y_2 = -a\cos(-kx - \omega t) = a\cos(-kx - \omega t + \pi)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$x = 0, \quad y = 0,$$

Στάσιμα κύματα

Θεωρούμε αρμονική διαταραχή σε χορδή άπειρου μήκους.
Δύο κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας διαδίδονται σε αντίθετες διευθύνσεις με διαφορά φάσης π.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = a\cos(kx - \omega t) - a\cos(-kx - \omega t)$$

$$y(t) = \boxed{2a\sin kx}\,\boxed{\sin \omega t}$$

Πλάτος

Εξίσωση στάσιμου κύματος

Φάση

Στάσιμα κύματα

Θεωρούμε αρμονική διαταραχή σε χορδή άπειρου μήκους.
Δύο κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας διαδίδονται σε αντίθετες διευθύνσεις με διαφορά φάσης π

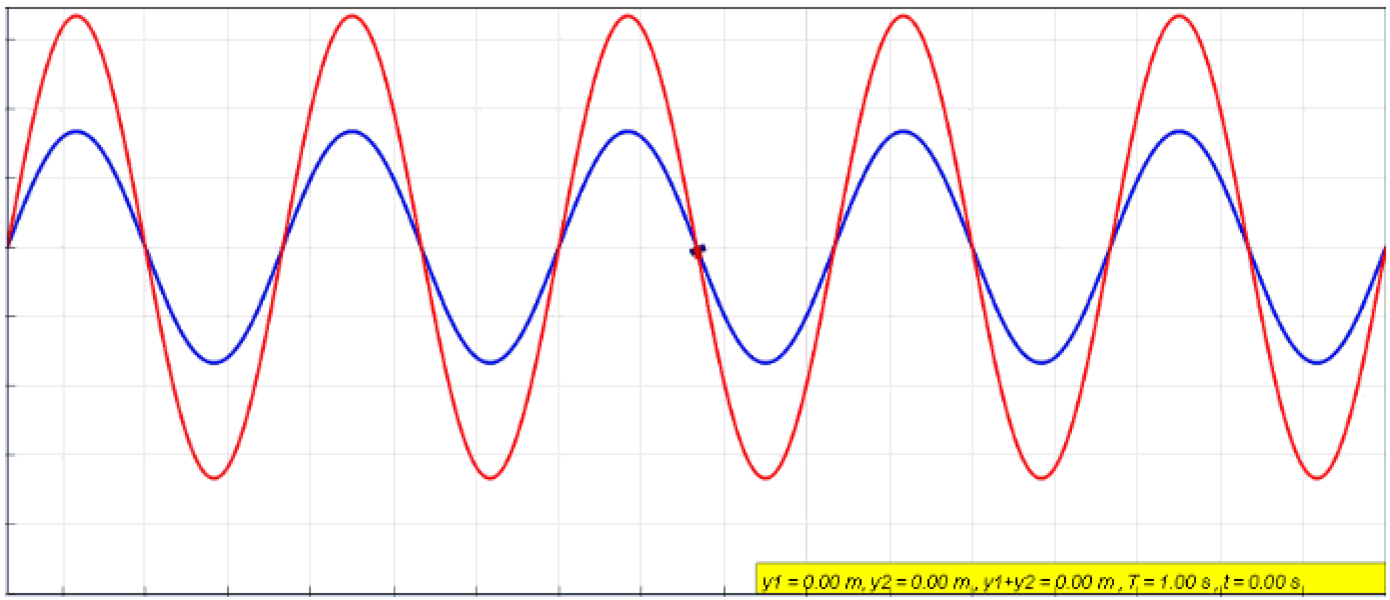
$$y\left(t\right) = 2a\,\sin kx\,\sin \omega t$$

Μέγιστο πλάτος $$kx = \left(2m+1\right)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \left(2m+1\right)\frac{\pi}{2k} = \left(2m+1\right)\frac{\lambda}{4}$$

Κόμβος (Δεσμός) $$kx = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2}$$

Στάσιμα κύματα

Θεωρούμε αρμονική διαταραχή σε χορδή άπειρου μήκους.
Δύο κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας διαδίδονται σε αντίθετες διευθύνσεις με διαφορά φάσης π



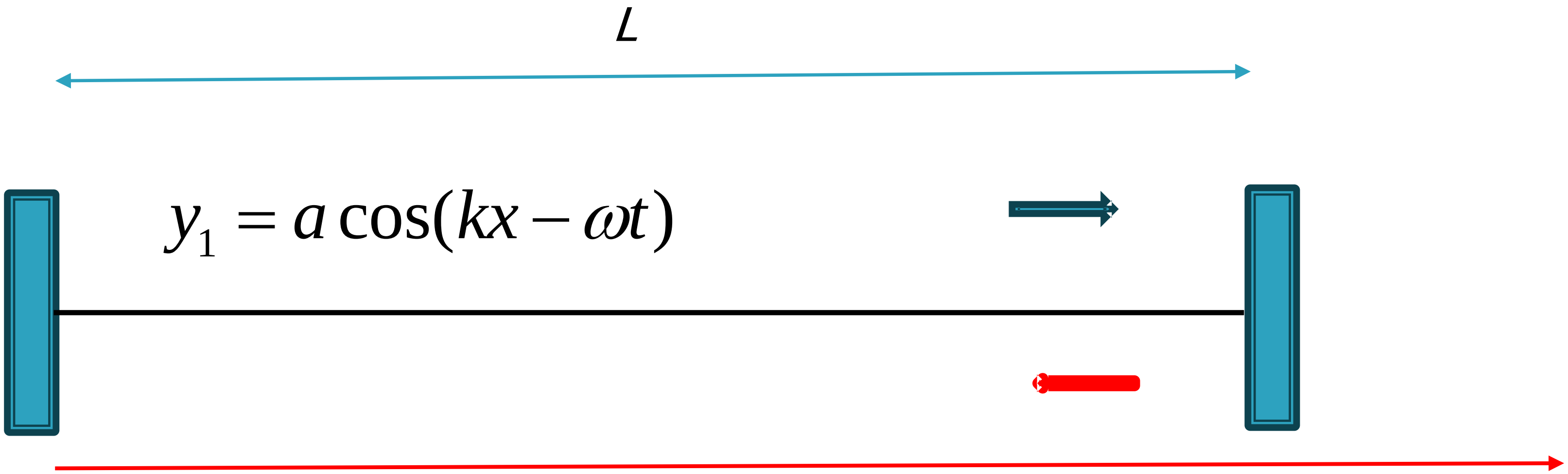
Στάσιμα κύματα

Θεωρούμε αρμονική διαταραχή σε χορδή άπειρου μήκους.
Δύο κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας διαδίδονται σε αντίθετες διευθύνσεις

Το στάσιμο κύμα δεν διαδίδεται στο *x*. Η χορδή ταλαντώνεται στο χρόνο, με πλάτος που δίδεται από τη σχέση $y(t) = 2a \sin kx \sin \omega t$

Στάσιμα κύματα

Θεωρούμε αρμονική διαταραχή σε χορδή μήκους L που είναι πακτωμένη και στα δύο της άκρα



$$y_1 = a\cos(kx - \omega t)$$

$$y_2 = -a\cos(-kx - \omega t) = a\cos(-kx - \omega t + \pi)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$x = 0, \quad y = 0, \qquad\qquad x = L, \quad y = 0,$$

Στάσιμα κύματα

Θεωρούμε αρμονική διαταραχή σε χορδή μήκους L που είναι πακτωμένη και στα δύο της άκρα

Οριακές συνθήκες

$$y(0,t)=0$$

$$y(L,t)=0$$

$$y(L,t)=2a\sin kL\sin\omega t=0\Rightarrow kL=n\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{\lambda}L=n\pi\Rightarrow\lambda=\frac{2L}{n}$$

$$f=\frac{c}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{nc}{2L}$$

Ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης χορδής

Στάσιμα κύματα

Θεωρούμε αρμονική διαταραχή σε χορδή μήκους L που είναι πακτωμένη και στα δύο της άκρα.

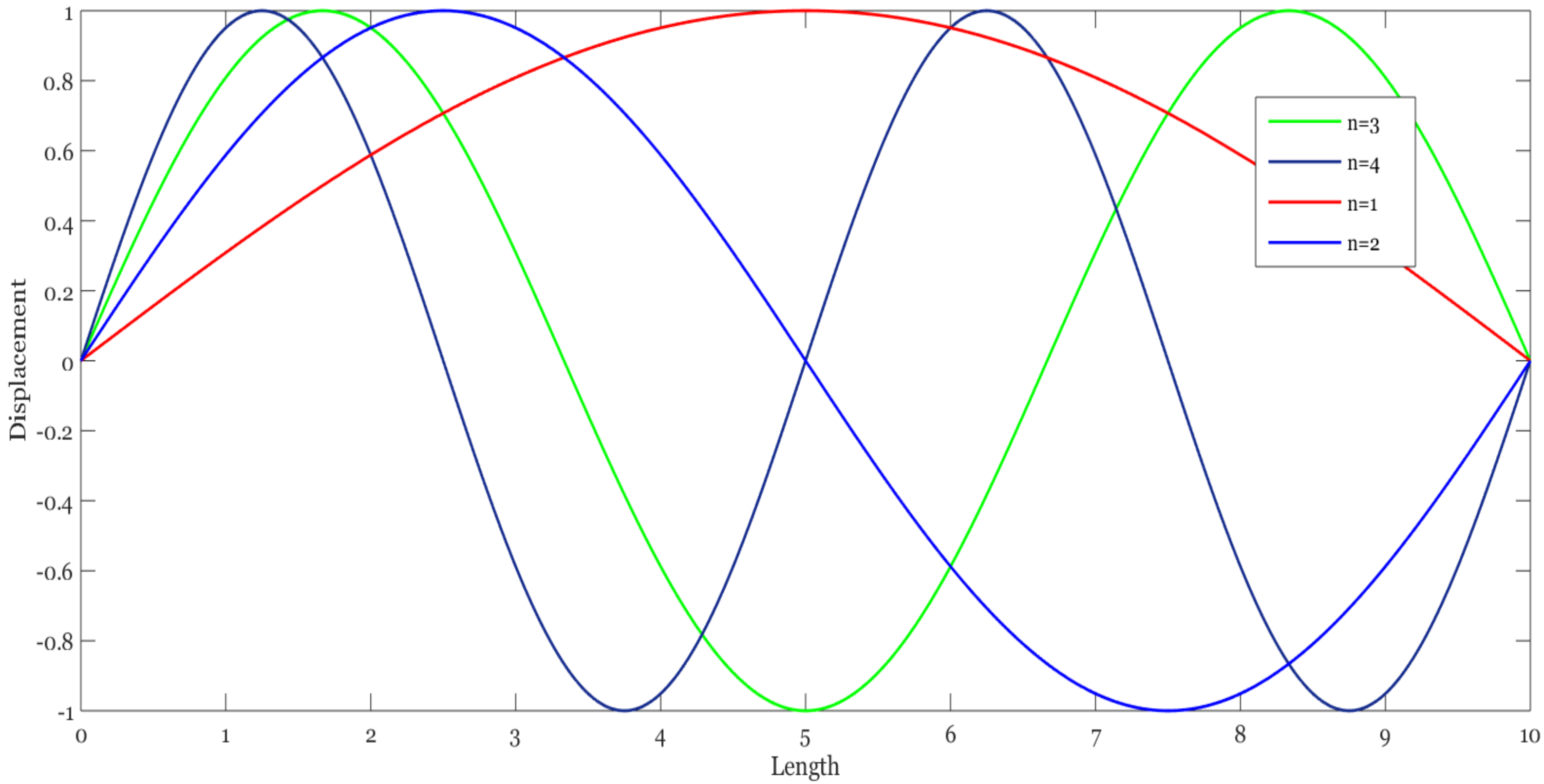
$$f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{nc}{2L}$$ ιδιοσυχνότητες

Θεμελιώδης συχνότητα $f_1 = \frac{c}{2L}$

Μήκος κύματος για θεμελιώδη συχνότητα $\lambda_1 = 2L$

Η χορδή μπορεί να πάλλεται τόσο στη θεμελιώδη συχνότητα όσο και σε όλες τις αρμονικές της.

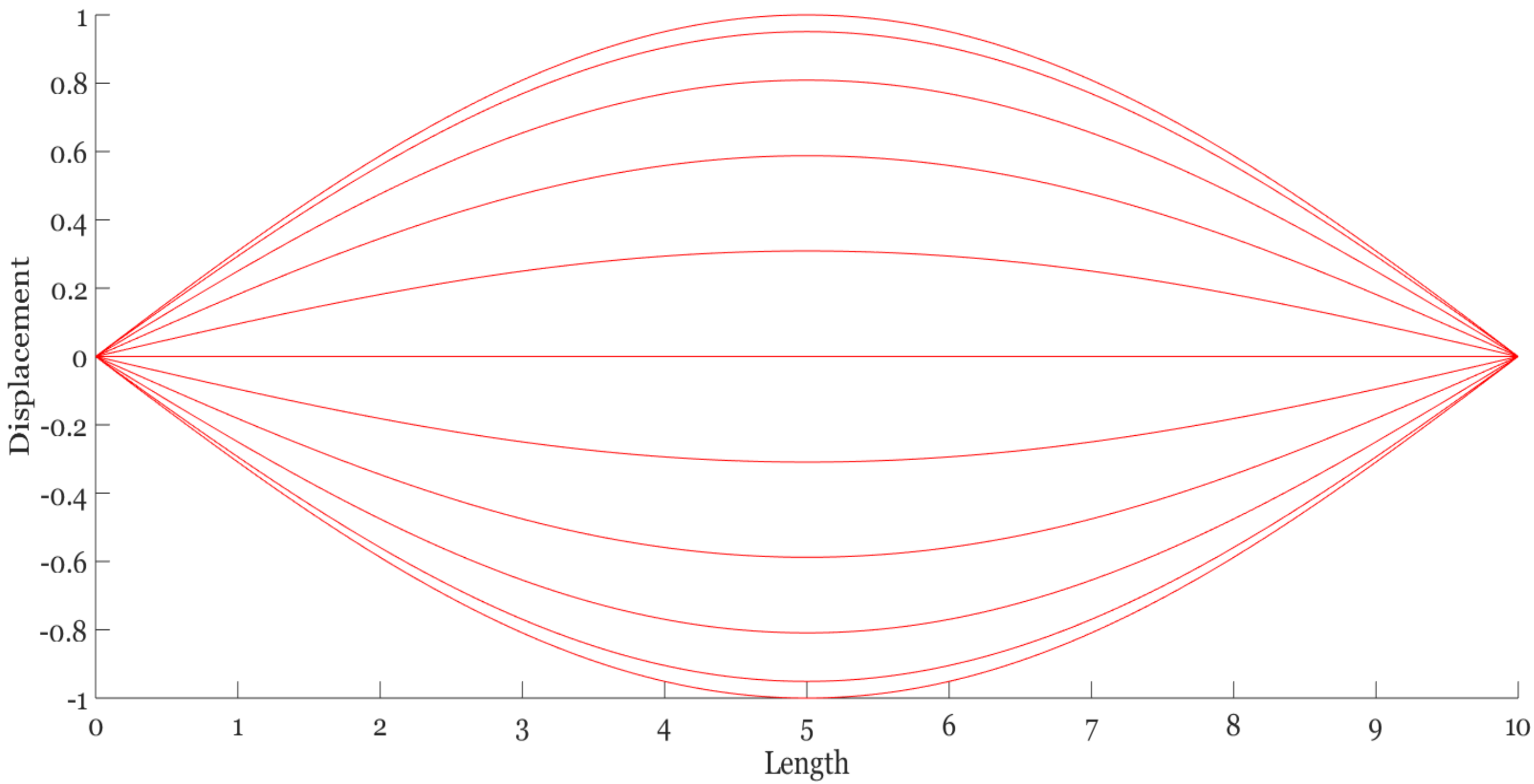
Στάσιμα κύματα



Πλάτος ταλάντωσης πακτωμένης χορδής για τις 4 πρώτες αρμονικές

Στάσιμα κύματα

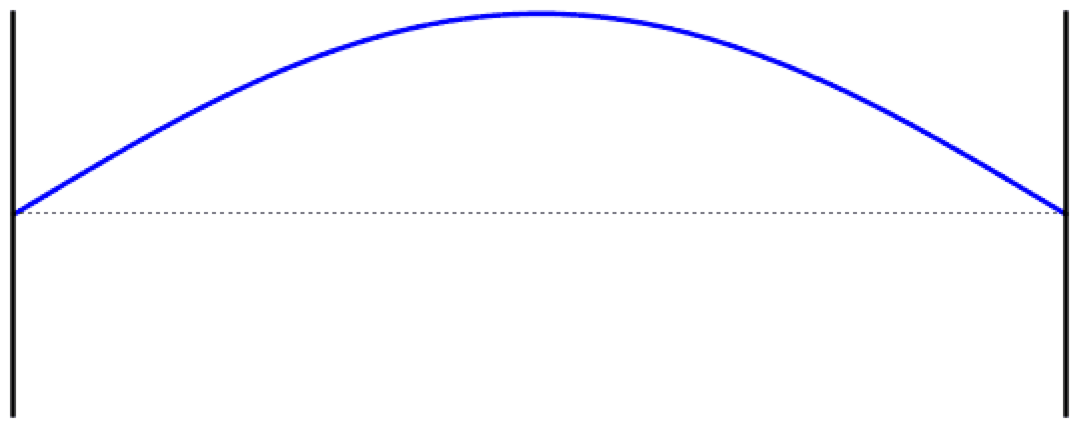
n=1



Ταλάντωση χορδής στην πρώτη αρμονική

Στάσιμα κύματα

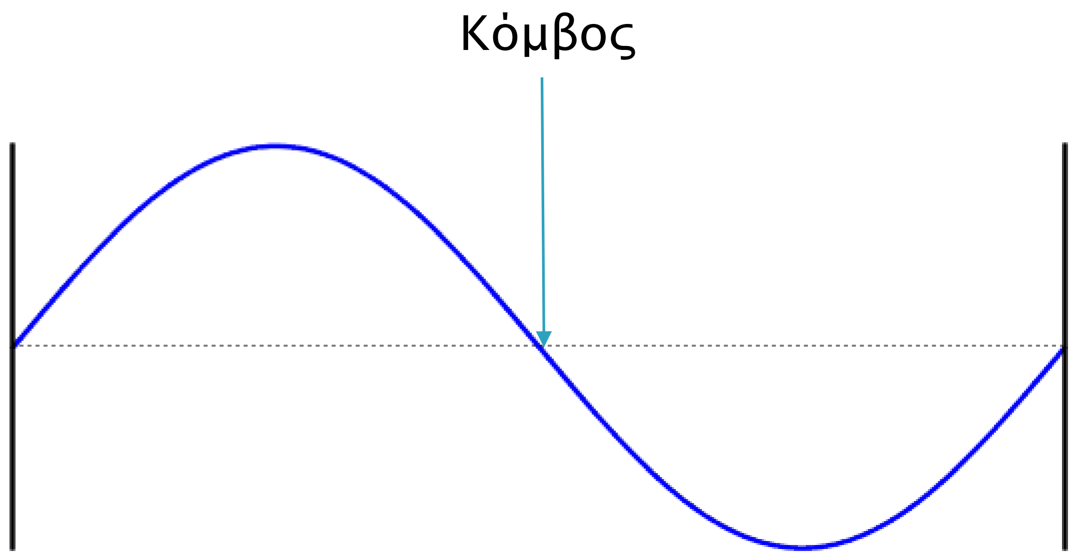
n=1



https://ophysics.com/waves6.html

Στάσιμα κύματα

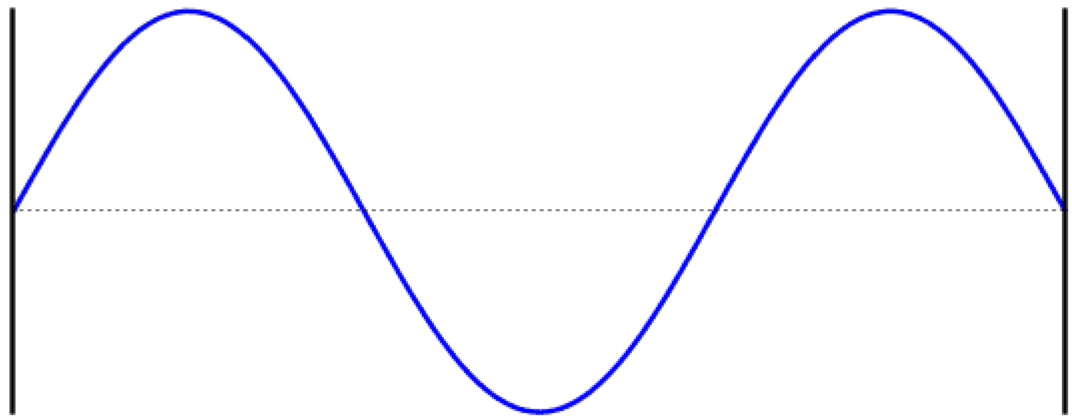
n=2



https://ophysics.com/waves6.html

Στάσιμα κύματα

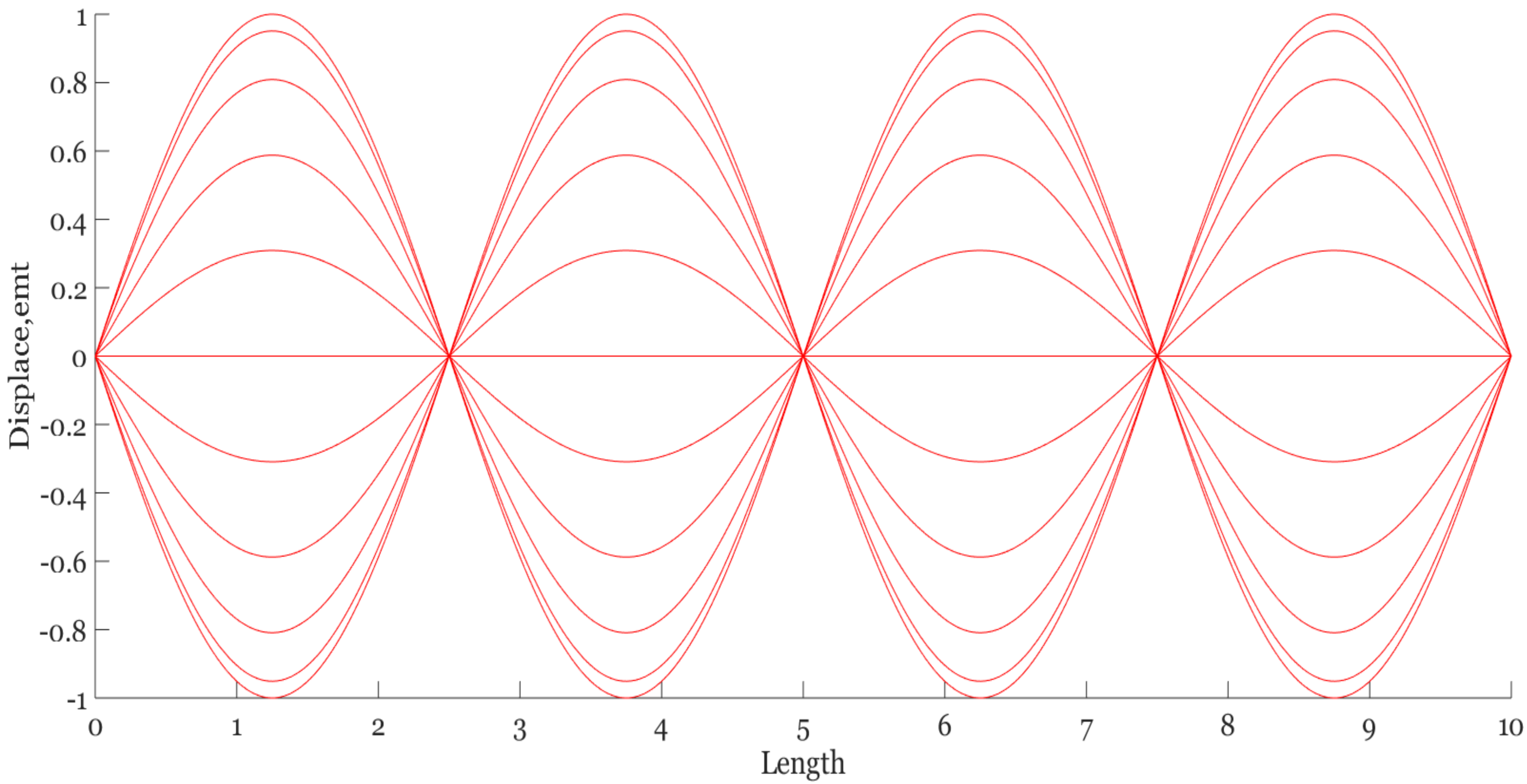
n=3



https://ophysics.com/waves6.html

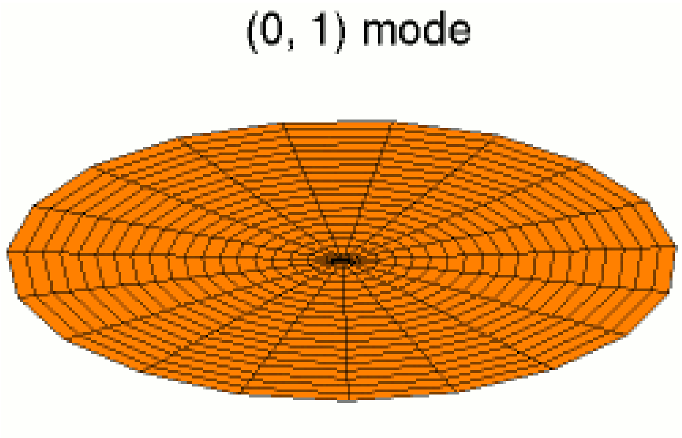
Στάσιμα κύματα

n=4

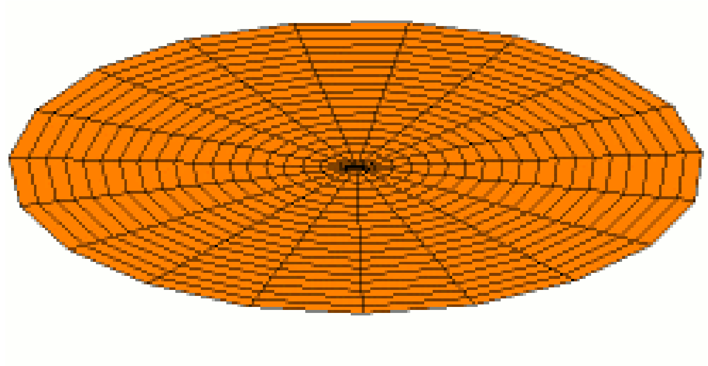


Ταλάντωση χορδής στην τέταρτη αρμονική

Στάσιμα κύματα



By Oleg Alexandrov - self-made with MATLAB, Public Domain,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3375088



Στάσιμα κύματα σε κιθάρα

- https://javalab.org/en/standing_waves_on_a_string_en/