Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

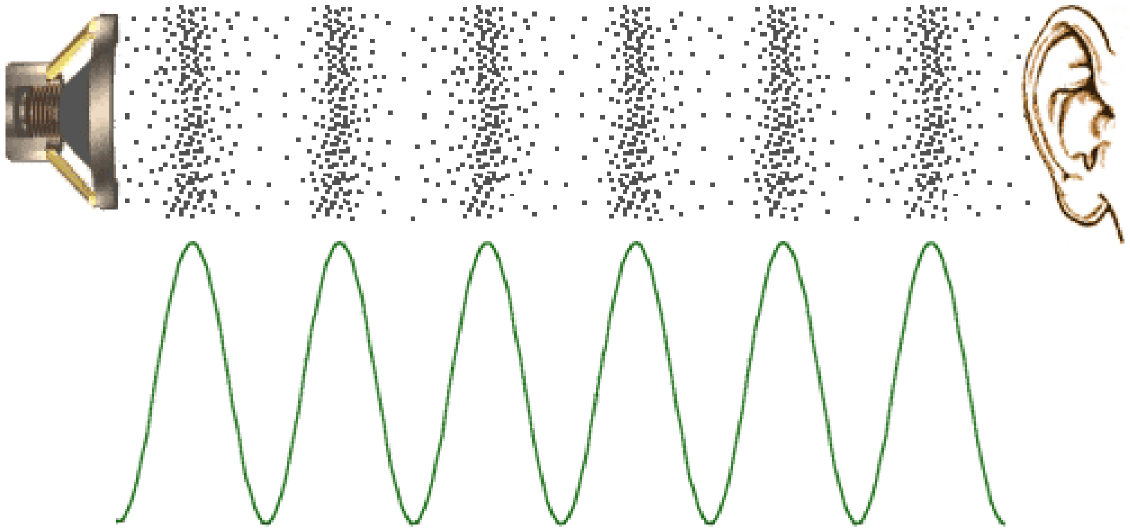
Κυματική Διάδοση

2023-2024

3η διάλεξη

Μιχάλης Ταρουδάκης

Η Ακουστική Εξίσωση

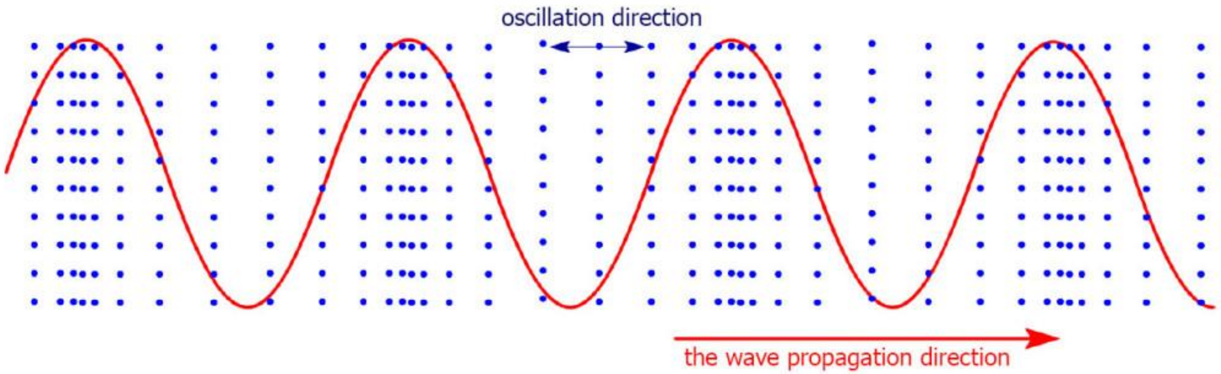


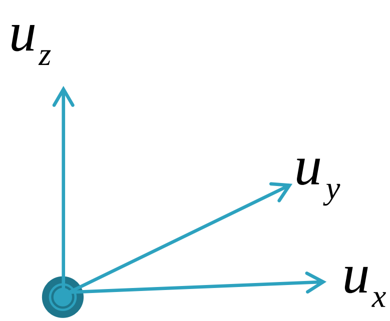
Συμπύκνωση και αραίωση των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου διάδοσης

Διάδοση σε συμπιεστό μέσο !!

Η Ακουστική Εξίσωση

Ακουστικά κύματα : Διαμήκη κύματα
(Longitudinal waves)





$$\vec{u}(\vec{x}) = (u_x(\vec{x}), u_y(\vec{x}), u_z(\vec{x}))$$

$$\vec{d}(\vec{x}) = (d_x(\vec{x}), d_y(\vec{x}), d_z(\vec{x}))$$

Η Ακουστική Εξίσωση

Πίεση $p(\vec{x},t)$

Πυκνότητα $\rho(\vec{x},t)$

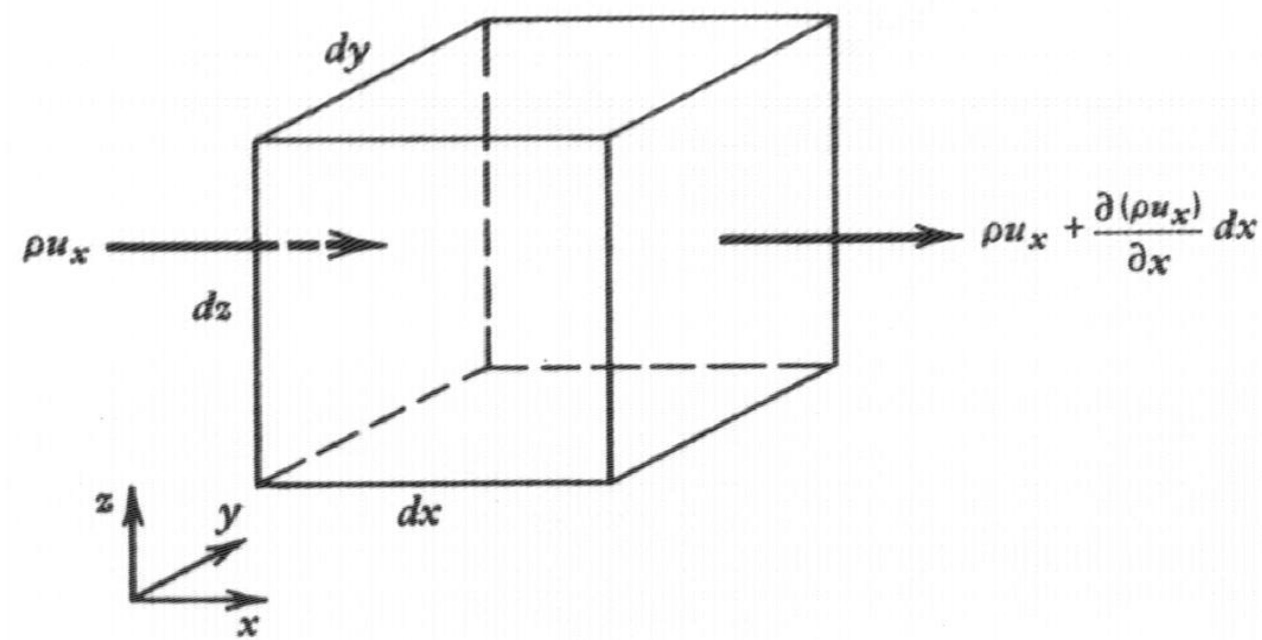
Ταχύτητα στοιχειωδών σωματιδίων $\vec{u}(\vec{x},t)$

$$p(\vec{x},t) = p_0(\vec{x},t) + \boxed{p_1(\vec{x},t)}$$

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{u}_0(\vec{x},t) + \vec{u}_1(\vec{x},t)$$

$$\rho(\vec{x},t) = \rho_0(\vec{x},t) + \rho_1(\vec{x},t)$$

Η Ακουστική Εξίσωση

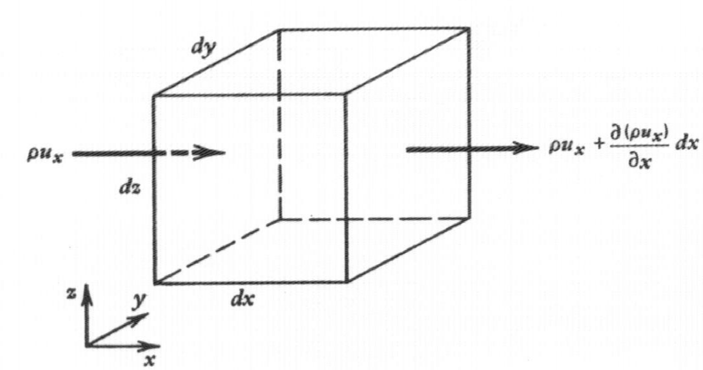


Η Ακουστική Εξίσωση

Εξίσωση Συνέχειας $$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) = 0$$

Εξίσωση Euler $$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}$$

Καταστατική $$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho_1$$



Η Ακουστική Εξίσωση

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) = 0$$

$$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \nabla \cdot (\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}) = 0$$

$$-\nabla^2 p_1 = \nabla \cdot (\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t})$$

$$\boxed{-\nabla^2 p_1 = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}}$$

Η Ακουστική Εξίσωση

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \rho_1 \quad \Longrightarrow \quad \rho_1 = p_1 \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0} \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \equiv c^2$$

$$\boxed{\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}}$$

Κυματική Εξίσωση

Η Ακουστική Εξίσωση

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

Δεν υπάρχει η ακουστική διέγερση στο πεδίο υπολογισμού

Θα υποθέσουμε ότι $c = ct$

$$p_1(\vec{x},t) = \overline{p}(\vec{x})T(t)$$

$$\overline{p} \rightarrow p$$

$$T\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\, p\,\frac{d^2T}{dt^2}$$

Η Ακουστική Εξίσωση

$$T\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\, p \frac{d^2T}{dt^2}$$

$$\frac{c^2}{p}\nabla^2 p = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

$$\frac{c^2}{p}\nabla^2 p = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2$$

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2}\, p = 0 \qquad \frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$$

Η Ακουστική Εξίσωση

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

Εξίσωση Helmholtz

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$$

$$T(t) = Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Θα θεωρήσουμε ακουστική διέγερση της μορφής

$$T(t) = e^{-i\omega t}$$

Η Ακουστική Εξίσωση

$$T(t) = e^{-i\omega t}$$

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$p(x, y, z) = p_x(x) p_y(y) p_z(z)$$

Η Ακουστική Εξίσωση

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot \frac{1}{p_x} + \frac{d^2 p_y}{dy^2} \cdot \frac{1}{p_y} + \frac{d^2 p_z}{dz^2} \cdot \frac{1}{p_z} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot \frac{1}{p_x} = -k_x^2$$

$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} \cdot \frac{1}{p_y} = -k_y^2$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} \cdot \frac{1}{p_z} = -k_z^2$$

Η Ακουστική Εξίσωση

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

Αριθμός κύματος

Η Ακουστική Εξίσωση

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} + k_x^2 p_x = 0 \qquad p_x(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}$$

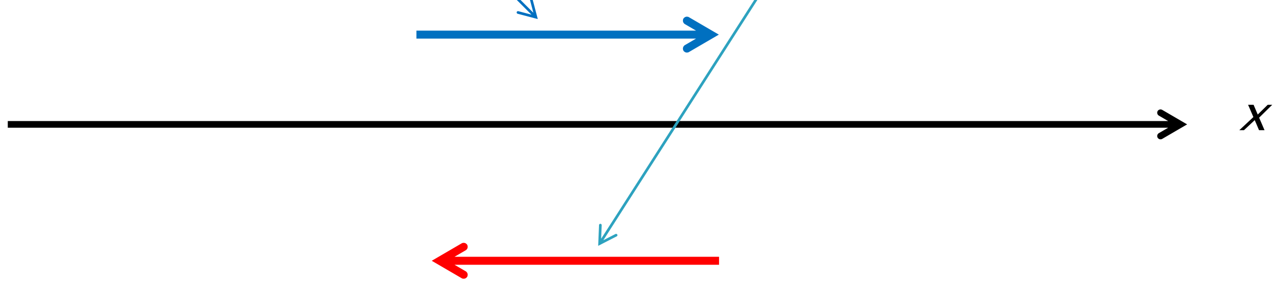
$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} + k_y^2 p_y = 0 \qquad p_y(y) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y}$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} + k_z^2 p_z = 0 \qquad p_z(z) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z}$$

Η Ακουστική Εξίσωση

$$p_1(x,t) = p_x(x)\boxed{e^{-i\omega t}} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x})e^{-i\omega t}$$

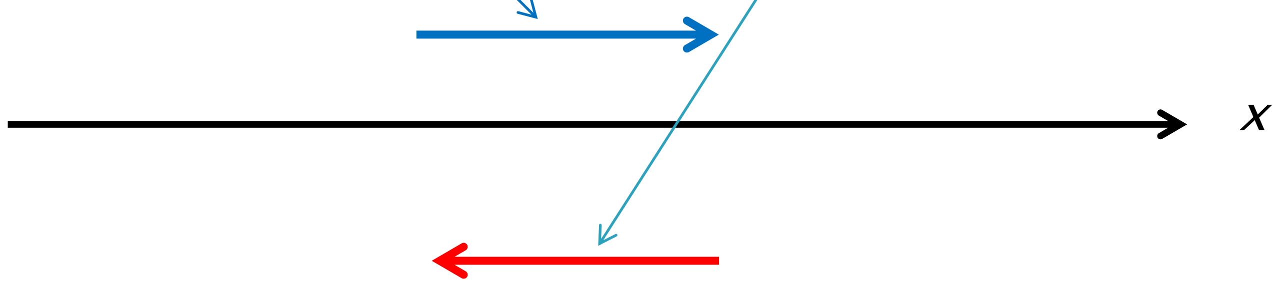
$$= A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} + A_2 e^{i(-k_x x - \omega t)}$$



Η Ακουστική Εξίσωση

$$p_1(x,t) = p_x(x)\boxed{e^{i\omega t}} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x})e^{i\omega t}$$

$$= A_1 e^{i(\omega t - k_x x)} + A_2 e^{i(\omega t + k_x x)}$$



Η Ακουστική Εξίσωση

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

$$p_1(\vec{x},t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$p(x,y,z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z)$$

$$p_1(\vec{x},t) = p_x(x)p_y(y)p_z(z)e^{-i\omega t}$$

Η Ακουστική Εξίσωση

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} + k_x^2 p_x = 0 \qquad p_x(x) = \boxed{A_1 e^{ik_x x}} + A_2 e^{-ik_x x}$$

$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} + k_y^2 p_y = 0 \qquad p_y(x) = \boxed{B_1 e^{ik_y y}} + B_2 e^{-ik_y y}$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} + k_z^2 p_z = 0 \qquad p_z(x) = \boxed{C_1 e^{ik_z z}} + C_2 e^{-ik_z z}$$

Η Ακουστική Εξίσωση

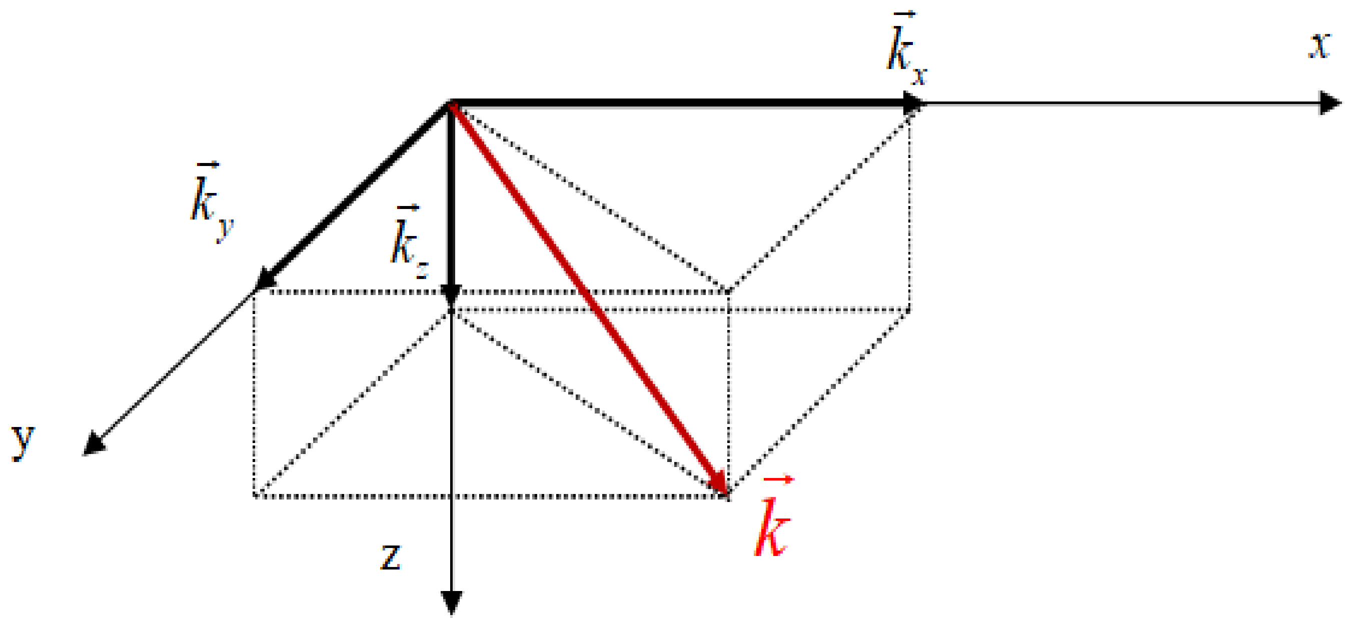
$$p_1(x,y,z,t) = A_1 B_1 C_1 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

Όδευση προς την κατεύθυνση των θετικών των αντίστοιχων αξόνων

$$p_1(x,y,z,t) = D e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

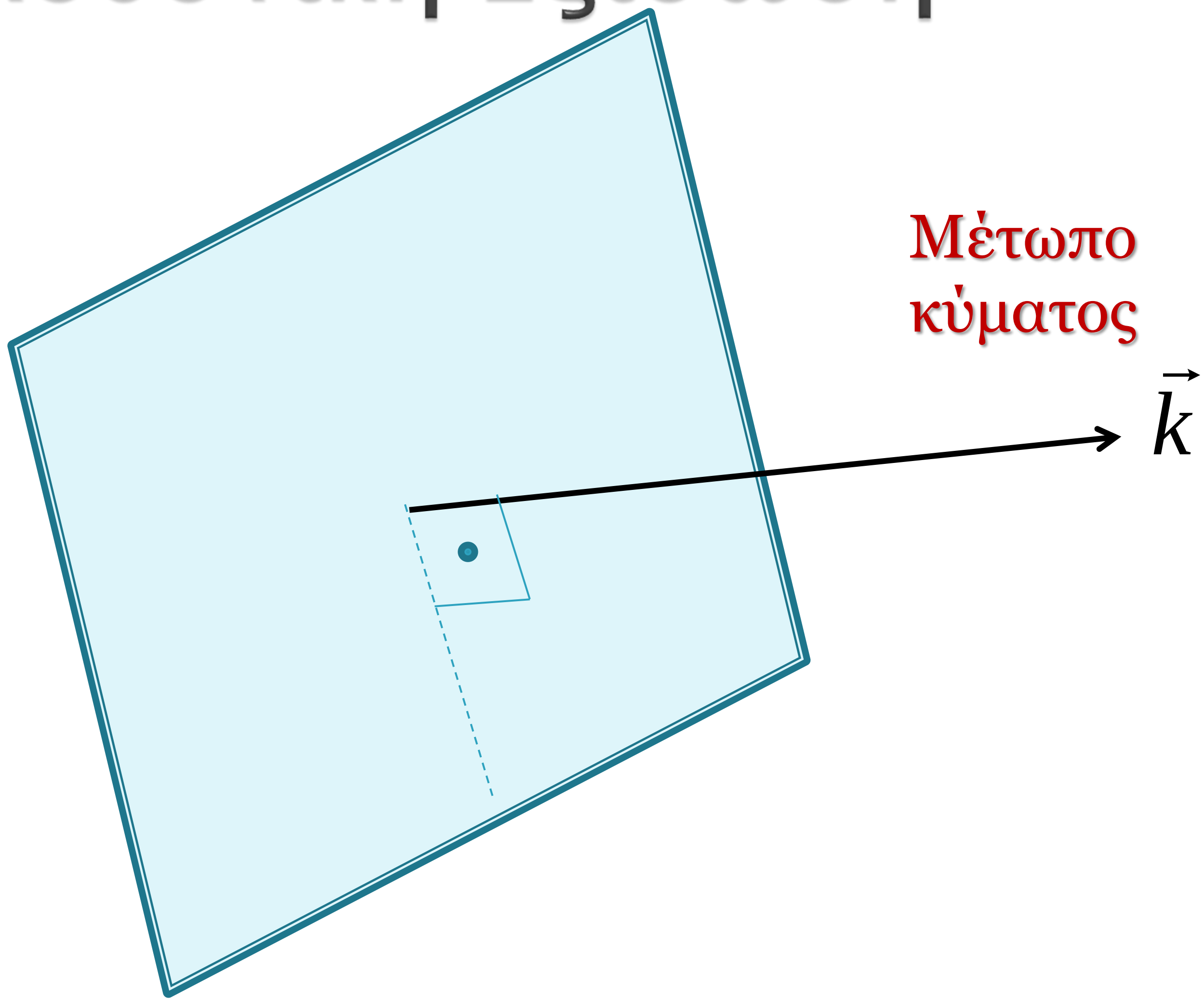
Μέτωπο κύματος :
Γεωμετρικός τόπος σημείων σταθερής φάσης

Η Ακουστική Εξίσωση



Αριθμός κύματος

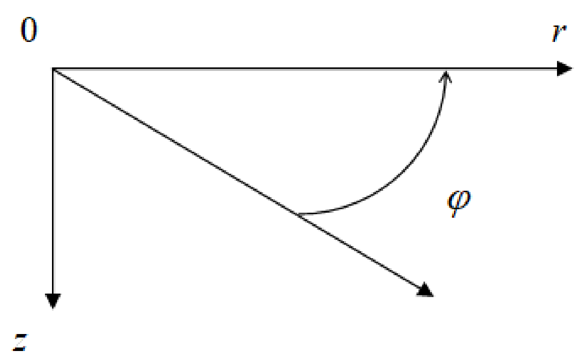
Η Ακουστική Εξίσωση



Κυλινδρικό Σύστημα

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$

Κυλινδρικό Σύστημα

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0$$

$$p(r,z,\varphi) = F(r,\varphi)u(z)$$

Κυλινδρικό Σύστημα

$$p(r,z,\varphi)=F(r,\varphi)u(z)$$

$$\frac{1}{rF}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial F}{\partial r})+\frac{1}{r^2F}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dz^2}+k^2=0$$

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dz^2}+k_z^2=0$$

$$\frac{1}{rF}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial F}{\partial r})+\frac{1}{r^2F}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}+q^2=0$$

$$k^2=k_z^2+q^2$$

Κυλινδρικό Σύστημα

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dz^2} + k_z^2 = 0$$

$$u(z) = D_1 e^{ik_z z} + D_2 e^{-ik_z z}$$

$$F(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -q^2$$

Κυλινδρικό Σύστημα

$$\frac{1}{rF}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial F}{\partial r})+\frac{1}{r^2F}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}+q^2=0$$

$$F(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{r^2}{R}(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr})+q^2r^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2\Phi \qquad \frac{1}{R}(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr})+(q^2-\frac{m^2}{r^2})=0$$

Κυλινδρικό Σύστημα

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi$$

$$\Phi = E_1 e^{im\varphi} + E_2 e^{-im\varphi}$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \left(q^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) = 0$$

Εξίσωση Bessel

Κυλινδρικό Σύστημα

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\boxed{\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}}}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=0$$

Αξονική συμμετρία

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=0$$

$$p(r,z)=F(r)u(z)$$

Άσκηση