Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Κυματική Διάδοση

5η διάλεξη

2023-2024

Μιχάλης Ταρουδάκης

Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d\psi}{dx}]+[q(x)+\lambda r(x)]\psi=0$$

$\psi(x)$: $[\alpha,b]$

- *p(x), q(x), r(x)* πραγματικές και συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,b]$,
- *p(x)* διαφορίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha,b]$,
- *p(x)* και *r(x)>0* στο $[\alpha,b]$,

Sturm–Liouville

$$A_1 \frac{d\psi}{dx}(a) - A_2\psi(a) = 0$$

Οριακές Συνθήκες

$$B_1 \frac{d\psi}{dx}(b) + B_2\psi(b) = 0$$

Πρόβλημα (δύο σημείων) ιδιοτιμών λ **Ιδιοτιμές**

$\lambda_m \to \psi_m$ **Ιδιοσυναρτήσεις**

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d\psi_m}{dx}] + [q(x) + \lambda_m r(x)]\psi_m = 0$$

Sturm–Liouville

- **ΘΕΩΡΗΜΑ** Θεωρούμε το πρόβλημα S-L, όπως ορίστηκε ανωτέρω. Τότε υπάρχει μία άπειρη ομάδα πραγματικών αριθμών , $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m.} \ldots\ldots$ τέτοια ώστε $\lambda_m \to \infty, \quad m \to \infty$ που ικανοποιεί το εν λόγω πρόβλημα. Εάν οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m \ldots\ldots$, η ιδιοσυνάρτηση ψ_m έχει ακριβώς m-1 μηδενισμούς στο διάστημα $[a,b]$. Επιπλέον, εάν οι συντελεστές A_1, A_2, B_1, B_2 και είναι όλοι μη αρνητικοί, τότε για όλα τα m, $\lambda_m > 0$

Sturm–Liouville

- **Θ1**. Οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Sturm-Liouville είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους την *r(x)*

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d\psi_m}{dx}]+[q(x)+\lambda_m r(x)]\psi_m=0 \quad \times\psi_n$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d\psi_n}{dx}]+[q(x)+\lambda_n r(x)]\psi_n=0 \quad \times\psi_m$$

$$(\lambda_m-\lambda_n)r(x)\psi_m\psi_n+\frac{d}{dx}\{p(x)\psi_n\frac{d\psi_m}{dx}-p(x)\psi_m\frac{d\psi_n}{dx}\}=0.$$

Sturm–Liouville

- **Θ1**. Οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Sturm-Liouville είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους την *r(x)*.

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b r(x)\psi_m\psi_n dx + p(b)\left[\psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx}\right]_b - p(a)\left[\psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx}\right]_a = 0$$

$$A_1 \frac{d\psi}{dx}(a) - A_2\psi(a) = 0$$

$$B_1 \frac{d\psi}{dx}(b) + B_2\psi(b) = 0$$

Sturm–Liouville

- **Θ1**. Οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Sturm-Liouville είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους την *r(x)*.

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b r(x)\psi_m\psi_n dx + p(b)\left[\psi_n \cancel{\frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx}}\right]_b - p(a)\left[\psi_n \cancel{\frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx}}\right]_a = 0$$

$$A_1\frac{d\psi}{dx}(a) - A_2\psi(a) = 0$$

$$\lambda_m \neq \lambda_n$$

$$\int_a^b r(x)\psi_m(x)\psi_n(x)dx = 0$$

Ορθογώνιες

$$B_1\frac{d\psi}{dx}(b) + B_2\psi(b) = 0$$

Μπορεί να επιλεγούν συντελεστές ώστε να είναι επί πλέον ορθοκανονικές Ορθοκανονικές

$$\int_a^b r(x)\psi_m(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}$$

Sturm–Liouville

- **Θ2**. Οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Sturm-Liouville είναι πραγματικές

Εάν οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές $\psi_m(x) = u_m(x) + iv_m(x)$

λ_m, λ_m^* ιδιοτιμές

Άτοπο

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d\psi_m}{dx}] + [q(x) + \lambda_m r(x)]\psi_m = 0 \qquad \times \psi_m^*$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d\psi_m^*}{dx}] + [q(x) + \lambda_m^* r(x)]\psi_m^* = 0 \qquad \times \psi_m$$

$$(\lambda_m - \lambda_m^*)\int_a^b r(x)\psi_m\psi_m^* dx = 0 \qquad \psi_m\psi_m^* = u^2 + v^2 > 0$$

$$r(x) > 0$$

Sturm–Liouville

Πληρότητα ομάδας ιδιοσυναρτήσεων

$$\sum_{m=1}^{M} c_m \psi_m(x)$$

$$I_M = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{m=1}^{M} c_m \psi_m(x) \right]^2 dx$$

Εάν $I_M \to 0, M \to \infty$ τότε η σειρά $\sum_{m=1}^{M} c_m \psi_m(x)$ είναι καλή προσέγγιση της $f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M_0(\varepsilon) : \forall M > M_0 \Rightarrow I_M < \varepsilon$$

$$f(x) = \underset{M \to \infty}{l.i.m} \sum_{m=1}^{M} c_m \psi_m(x)$$

Sturm–Liouville

- **Μέση τετραγωνική σύγκλιση**

$$f(x) = \underset{M \to \infty}{l.i.m} \sum_{m=1}^{M} c_m \psi_m(x)$$

Η ομάδα ιδιοσυναρτήσεων $\psi_m(x)\,, m = 1, 2, ...$ ενός κανονικού προβλήματος Sturm-Liouville είναι μια πλήρης ομάδα τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα [a,b]

Sturm–Liouville

Εάν μία συνάρτηση *f(x)* είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα [a,b], η αναπαράσταση της μέσω της σειράς

$$\sum_{m=1}^{M} c_m \psi_m(x)$$

όπου $\psi_m(x)\,, m = 1, 2, \ldots..$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος S-L , συγκλίνει εις το μέσον στην *f(x)* . Οι συντελεστές της σειράς είναι οι συντελεστές Fourier της *f(x)*

$$c_m = \int_a^b r(x) f(x) \psi_m(x) dx$$

Sturm–Liouville

Απόλυτη σύγκλιση

Έστω μία ομάδα τμηματικά συνεχών συναρτήσεων που διαθέτουν τμηματικά συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα $[a,b]$. Έστω $\{\psi_m\}$ η ομάδα των ιδιοσυναρτήσεων ενός κανονικού προβλήματος S-L στο διάστημα αυτό. Εάν οι συναρτήσεις *f(x)* ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες του προβλήματος S-L, τότε κάθε συνάρτηση *f(x)* που ανήκει στην ομάδα, μπορεί να αναπτυχθεί σε μία σειρά που συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο $[a,b]$:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \psi_m(x)$$

$$a_m = \int_a^b r(x) f(x) \psi_m(x) dx$$ Συντελεστές Fourier

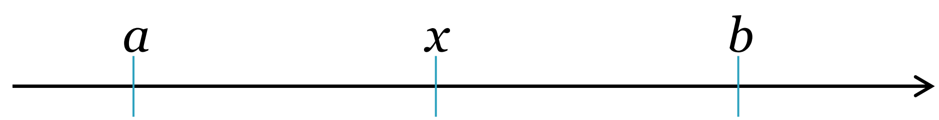
Sturm–Liouville

Έστω ότι η *f(x)* ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες του προβλήματος S-L και είναι τμηματικά συνεχής στο $[\alpha,b]$. Τότε η σειρά Fourier της *f(x)* συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο:

1. *f(x)* όπου *x* $[\alpha,b]$ και *x* δεν είναι σημείο ασυνέχειας της *f(x)*.

2. $\frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right]$ όταν *x* σημείο ασυνέχειας της *f(x)*.

όπου $f(x^+),\ f(x^-)$ είναι τα προς τα δεξιά και αριστερά όρια της *f(x)* στο σημείο ασυνέχειας *x*.



Sturm–Liouville

$$L \equiv \frac{1}{r(x)}\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]+q(x)\right\}$$

Κανονικός τελεστής εάν όλες οι υποθέσεις του προβλήματος S-L ικανοποιούνται

$$L\psi+\lambda\psi=0$$

Μη κανονικός τελεστής εάν κάποιες από τις υποθέσεις του προβλήματος S-L δεν ικανοποιούνται (π.χ. b μη πεπερασμένο)

$$f(x)=\sum_{m=1}^{M} a_m\psi_m(x)+\int_S b(\lambda)\varphi(x,\lambda)d\lambda$$

S διάστημα συνεχούς φάσματος

Sturm–Liouville

ψ_m Κανονικές ιδιοσυναρτήσεις

Πεπερασμένες διακριτές ιδιοτιμές - Διακριτό φάσμα M ιδιοτιμών

$$\int_I r(x)\psi_m(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}$$

I: πεδίο ορισμού του Προβλήματος

$\varphi(x,\lambda)$ Μη Κανονικές ιδιοσυναρτήσεις

Συνεχείς ιδιοτιμές - Συνεχές φάσμα ιδιοτιμών S

$$\int_I r(x)\phi(x,\lambda')\phi(x,\lambda)dx = \delta(\lambda'-\lambda)$$

Sturm–Liouville

Συνάρτηση δέλτα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 1 & x_0 \in [x_1, x_2] \\ 0 & x_0 \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

Sturm–Liouville

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$x\delta(x) = 0$$

$$\delta(ax) = (1/a)\delta(x)$$

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{df/dx}\delta(x - x_0), \quad f(x_0) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x'')\delta(x'' - x')dx'' = \delta(x - x')$$

$$\frac{d}{dx}\delta(x) = -\frac{1}{x}\delta(x)$$

Συναρτήσεις Green

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]G=-\delta(z-z_0) \qquad G(z):[\alpha, b]$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d\psi}{dx}]+[q(x)+\lambda r(x)]\psi=0$$ Εξίσωση S-L

•*p(x), q(x), r(x)* πραγματικές και συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,b]$,

•*p(x)* διαφορίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha,b]$,

•*p(x)* και *r(x)>0* στο $[\alpha,b]$,

Συναρτήσεις Green

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]G=-\delta(z-z_0)$$

$$G(z,z_0,\lambda)$$

Η συνάρτηση G είναι παντού συνεχής, αλλά έχει ασυνεχή παράγωγο στο z_o

Θυμίζουμε
$$\int_{z_1}^{z_2}\delta(z-z_0)dz=\begin{cases}1 & z_0\in[z_1,z_2]\\ 0 & z_0\notin[z_1,z_2]\end{cases}$$

Να προσδιορίσουμε την ασυνέχεια της $\frac{dG}{dz}$ στο z_o

Συναρτήσεις Green

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]G=-\delta(z-z_0)$$

$$G(z,z_0,\lambda)$$

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]dz+\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}[q(z)+\lambda r(z)]Gdz=-\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}\delta(z-z_0)dz$$

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}\delta(z-z_0)dz=1$$

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]dz+\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}[q(z)+\lambda r(z)]Gdz=-1$$

Συναρτήσεις Green

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]dz + \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}[q(z)+\lambda r(z)]Gdz = -1$$

$$\left[p(z)\frac{dG}{dz}\right]_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} + \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}[q(z)+\lambda r(z)]Gdz = -1$$

$$\varepsilon \to 0$$

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}[q(z)+\lambda r(z)]Gdz \to 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[p(z)\frac{dG}{dz}\right]_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} = -1$$

Συναρτήσεις Green

$$p(z_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{dG}{dz}\right]_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}=-1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{dG}{dz}\right]_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}=-\frac{1}{p(z_0)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{dG}{dz}(z_0+\varepsilon,z_0,\lambda)-\frac{dG}{dz}(z_0-\varepsilon,z_0,\lambda)\right]=-\frac{1}{p(z_0)}$$

Ασυνέχεια της $\frac{dG}{dz}$ στο z_o

Συναρτήσεις Green

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{d\psi}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]\psi=0$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\psi_n(z)$$

$$A_n=\int_a^b r(z)f(z)\psi_n(z)dz$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b r(z')f(z')\psi_n(z')\psi_n(z)dz'$$

$$f(z)=\int_a^b\{\sum_{n=1}^{\infty}r(z')\psi_n(z')\psi_n(z)\}f(z')dz'$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}r(z')\psi_n(z')\psi_n(z)=\delta(z-z')$$

Σχέση πληρότητας

Συναρτήσεις Green

$$G(z,z_0,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\psi_n(z)$$

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]G=-\delta(z-z_0)$$

$$\frac{d}{dz}p(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{d\psi_n}{dz}(z)\right]+q(z)\sum_{n=1}^{\infty}A_n\psi_n(z)+\lambda r(z)\sum_{n=1}^{\infty}A_n\psi_n(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}r(z)\psi_n(z_0)\psi_n(z)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left\{\frac{d}{dz}(p(z)\frac{d\psi_n}{dz})+q(z)\psi_n\right\}+\lambda r(z)\sum_{n=1}^{\infty}A_n\psi_n(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}r(z)\psi_n(z_0)\psi_n(z)$$

Συναρτήσεις Green

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \frac{d}{dz}\left(p(z)\frac{d\psi_n}{dz}\right) + q(z)\psi_n \right\} + \lambda r(z)\sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} r(z)\psi_n(z_0)\psi_n(z)$$

Χρησιμοποιώντας $$\frac{d}{dz}\left[p(z)\frac{d\psi_n}{dz}\right] + q(z) = -\lambda_n r(z)\psi_n$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_n\lambda_n r(z)\psi_n(z) + \lambda r(z)\sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} r(z)\psi_n(z_0)\psi_n(z)$$

$$\times \psi_m(z)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda - \lambda_n)\int_a^b r(z)\psi_n(z)\psi_m(z)dz = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z_0)\int_a^b r(z)\psi_n(z)\psi_m(z)dz$$

Συναρτήσεις Green

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda-\lambda_n)\int_a^b r(z)\psi_n(z)\psi_m(z)dz = -\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(z_0)\int_a^b r(z)\psi_n(z)\psi_m(z)dz$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda-\lambda_n)\delta_{mn} = -\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(z_0)\delta_{nm}$$

$$A_m(\lambda-\lambda_m) = -\psi_m(z_0) \qquad m\to n$$

$$G(z,z_0,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(z)$$

$$\boxed{G(z,z_0,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(z)\psi_n(z_0)}{\lambda_n-\lambda}}$$

Συναρτήσεις Green

Συνοψίζουμε

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]G=-\delta(z-z_0)$$

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{d\psi_n}{dz}]+q(z)=-\lambda_n r(z)\psi_n$$

$$G(z,z_0,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(z)\psi_n(z_0)}{\lambda_n-\lambda}$$

$$G(z,z_0,\lambda)=G(z_0,z,\lambda)$$

Συμμετρική συνάρτηση ως προς z_o

Συναρτήσεις Green

$$G(z,z_0,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(z)\psi_n(z_0)}{\lambda_n-\lambda}$$

Θεωρούμε $\lambda\in\mathbb{C}$

Συνάρτηση Green μιγαδική

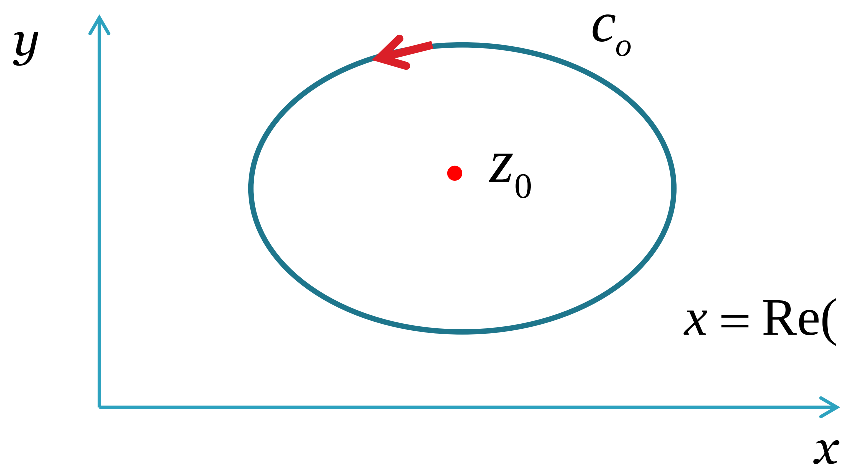
$$\int_{C_\lambda}G(z,z_0,\lambda)d\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(z)\psi_n(z_0)\int_{C_\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda_n-\lambda}$$

ιδιόμορφα σημεία λ_n

Πόλοι στο μιγαδικό επίπεδο του λ

Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα

$f(z)$ $\quad z_0 \quad$ ιδιόμορφο σημείο

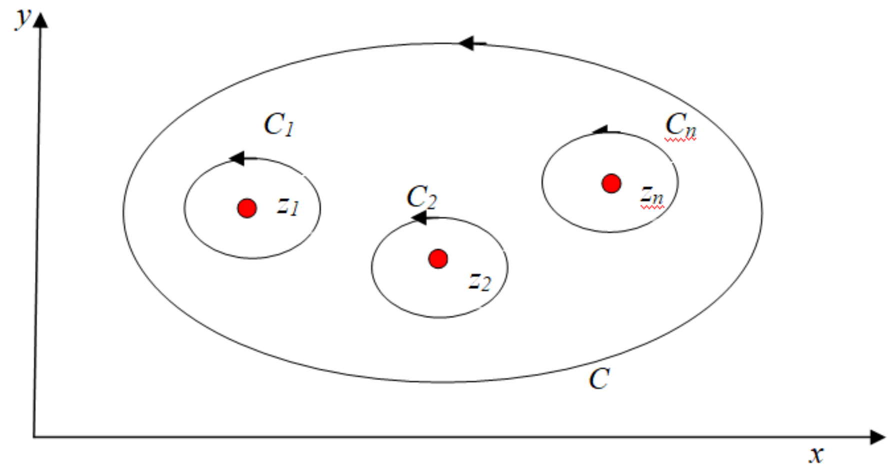


$x = \mathrm{Re}(f(z)) \quad y = \mathrm{Im}(f(z))$

Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} f(z)dz \qquad \int_{c_0} f(z)dz = 2\pi i b_1$$

Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα



$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(b_1 + b_2 + \cdots \ldots + b_n)$$

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad q(z_0) = 0,\ q'(z_0) \neq 0 \qquad p(z_0) \neq 0$$

$$b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$