Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Κυματική Διάδοση

6η διάλεξη

2023-2024

Μιχάλης Ταρουδάκης

Συναρτήσεις Green

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]G=-\delta(z-z_0)$$

$$G(z,z_0,\lambda)$$

Η συνάρτηση G είναι παντού συνεχής, αλλά έχει ασυνεχή παράγωγο στο z_o

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[p(z)\frac{dG}{dz}\right]_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}=-1$$

Συναρτήσεις Green

Ανάπτυξη σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων

$$G(z, z_0, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z)$$

Θεωρούμε το πρόβλημα Sturm-Liouville που ορίζεται στο ίδιο διάστημα με τη συνάρτηση Green με την εξίσωση

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{d\psi_n}{dz}] + q(z) = -\lambda_n r(z)\psi_n$$

και τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες

Συναρτήσεις Green

Εξίσωση ορισμού της συνάρτησης Green στο διάστημα [a,b]

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]G=-\delta(z-z_0)$$

Αντίστοιχο πρόβλημα Sturm-Liouvilee

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{d\psi_n}{dz}]+q(z)=-\lambda_n r(z)\psi_n$$

Δείξαμε ότι

$$G(z,z_0,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(z)\psi_n(z_0)}{\lambda_n-\lambda}$$

Συναρτήσεις Green

$$G(z,z_0,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(z)\psi_n(z_0)}{\lambda_n-\lambda}$$

Θεωρούμε $\lambda \in \mathbb{C}$

Συνάρτηση Green μιγαδική

$$\int_{C_\lambda} G(z,z_0,\lambda)d\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(z)\psi_n(z_0)\int_{C_\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda_n-\lambda}$$

ιδιόμορφα σημεία λ_n

Πόλοι στο μιγαδικό επίπεδο του λ

Συναρτήσεις Green

$$\int_{C_\lambda} G(z,z_0,\lambda)d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(z)\psi_n(z_0)\int_{C_\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda_n-\lambda}$$

$$f(\lambda)=\frac{1}{(\lambda_n-\lambda)} \qquad f(z)=\frac{p(z)}{q(z)} \qquad z\to\lambda$$

$$p(\lambda)=1 \qquad q(\lambda)=\lambda_n-\lambda \qquad q'(\lambda)=-1$$

λ_n ιδιόμορφα σημεία

Θ.Ο.Υ. Cauchy $\displaystyle\int_{C_\lambda} f(\lambda)d\lambda = 2\pi i b_1$

$$b_1=\frac{p(\lambda_n)}{q'(\lambda_n)} \qquad b_1=-1$$

$$\boxed{\int_{C_\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda_n-\lambda}=-2\pi i}$$

Συναρτήσεις Green

$$\int_{C_\lambda} G(z,z_0,\lambda)d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(z)\psi_n(z_0)\int_{C_\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda_n-\lambda}$$

$$\int_{C_\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda_n-\lambda} = -2\pi i$$

$$\int\limits_{C_\lambda} G(z,z_0,\lambda)d\lambda = -2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(z)\psi_n(z_0)$$

Σχέση πληρότητας

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(z)\psi_n(z')\psi_n(z) = \delta(z-z') \qquad z' \to z_0$$

$$\int_{C_\lambda} G(z,z_0,\lambda)d\lambda = -2\pi i\,\frac{\delta(z-z_0)}{r(z)}$$

Συναρτήσεις Green

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]G=-\delta(z-z_0) \qquad G(z):[\alpha,b]$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d\psi}{dx}]+[q(x)+\lambda r(x)]\psi=0$$ Εξίσωση S-L

$$G(z,z_0,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\psi_n(z) \qquad G(z,z_0,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(z)\psi_n(z_0)}{\lambda_n-\lambda}$$

$$\int_{C_\lambda}G(z,z_0,\lambda)d\lambda=-2\pi i\frac{\delta(z-z_0)}{r(z)}$$

Συναρτήσεις Green

Για μη ομογενή όρο που είναι συνεχής συνάρτηση

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dF}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]F=S(z) \qquad F(z):[\alpha, b]$$

$$F(z)=\int_{Z_r} G(z,z_0,\lambda)S(z_0)dz_0$$

Z_r Διάστημα ορισμού της $S(z)$

και $$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}]+[q(z)+\lambda r(z)]G=-\delta(z-z_0)$$

Η ακουστική εξίσωση με πηγή

Ακουστική εξίσωση με μη ομογενή όρο

$$\nabla^2 p_1(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = -S(\vec{x},t)$$

Θεωρούμε σημειακή αρμονική πηγή στο $\vec{x}_0$

$$S(\vec{x},t) = S(\vec{x},\vec{x}_0,t) = A\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)e^{-i\omega t}$$

Η ακουστική πίεση :

$$p_1(\vec{x},t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\nabla^2 p(\vec{x}) + \frac{\omega^2}{c^2}p(\vec{x}) = -A\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

A=1

$$\nabla^2 p(\vec{x}) + \frac{\omega^2}{c^2}p(\vec{x}) = -\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Η ακουστική εξίσωση με πηγή

Η ομογενής Helmholtz στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=0$$

Η εξίσωση Helmholtz στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με σημειακή πηγή

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\delta\left(x-x_0\right)$$

Πρέπει να εκφράσουμε την πηγή στο κυλινδρικό σύστημα

Η δέλτα στα διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων

Σύστημα συντεταγμένων με (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

$$\iiint \delta(\xi_1 - \xi_1^{'})\delta(\xi_2 - \xi_2^{'})\delta(\xi_3 - \xi_3^{'})d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

(x, y, z) $$\iiint \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)dxdydz = \iiint \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)d\vec{x}$$

Στοιχειώδης όγκος $dxdydz = \left|J\right| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}$$

Η δέλτα στα διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων

Σύστημα συντεταγμένων με (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

$$\iiint \delta(\xi_1 - \xi_1^{'})\delta(\xi_2 - \xi_2^{'})\delta(\xi_3 - \xi_3^{'})d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

$$\iiint \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)dxdydz = \iiint \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)d\vec{x}$$

$$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) = \frac{1}{|J|}\delta(\xi_1 - \xi_1^{'})\delta(\xi_2 - \xi_2^{'})\delta(\xi_3 - \xi_3^{'})$$

Κυλινδρικό

x=rcosφ, y=rsinφ, z=z

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

Η δέλτα στα διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)=\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)$$

Για r=0 δεν υπάρχει αντιστοιχία των δύο συστημάτων

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)$$

Αξονική συμμετρία $\quad p=p(r,z), \quad r_0=0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r})+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{r}\delta(r)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)$$

Η δέλτα στα διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p\right)d\phi=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{r}\delta(r)\delta(\phi-\phi_0)\delta(z-z_0)\right)d\phi$$

$$2\pi\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p\right)=-\frac{1}{r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)}$$

Η εξίσωση Helmholtz με σημειακή αρμονική πηγή στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Σφαιρικό σύστημα

$$r,\theta,\varphi$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

$$\left|J\right| = r^2\sin\theta$$

$$dxdydz = \left|J\right| dr d\theta d\varphi$$

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}_0) = \frac{1}{\left|J\right|}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$$

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}_0) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$$

Σφαιρική συμμετρία *p(r)*

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dp}{dr}\right]+k^2 p = -\frac{\delta(r)}{4\pi r^2}}$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

o $p(\cdot,0)=0$ Ελεύθερη επιφάνεια r

c_1, ρ_1

$p(r,z):[0,\infty)\times[0,h]$

z_o

$$\frac{\partial p}{\partial z}(\cdot,h)=0$$ Ακλόνητη επιφάνεια

h

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

z

Απλός κυματοδηγός

Δεν υπάρχει επανακτινοβολία ενέργειας από το άπειρο

Π1 Απλός κυματοδηγός

Θεωρούμε το ομογενές πρόβλημα

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=0$$

Χωρισμός μεταβλητών $p(r,z)=R(r)Z(z)$

$$\frac{d^2 R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\lambda R=0$$

λ σταθερά χωρισμού

$$\frac{d^2 Z}{dz^2}+\left(k^2-\lambda\right)Z=0$$

Οδηγούμαστε σε ορισμό δύο συναρτήσεων Green

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$G_1(r, r_0, \lambda) \qquad G_1 : [0, \infty)$$

$$r_0 = 0 \qquad \frac{d^2 G_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr} + \lambda G_1 = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

Π1a

$$\frac{d}{dz}[p(z)\frac{dG}{dz}] + [q(z) + \lambda r(z)]G = -\delta(z - z_0)$$

$$z \to r,\, z_0 \to r_0,\, p(z) \to 2\pi r,$$
$$q(z) \to 0,\, r(z) \to 2\pi r$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$G_1(r, r_0, \lambda) \qquad\qquad G_1 : [0, \infty)$$

$$r_0 = 0 \qquad\qquad \frac{d^2 G_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr} + \lambda G_1 = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

Π1a

Ιδιότητες Green

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left\{\varepsilon \frac{dG_1}{dr}(\varepsilon, \lambda)\right\} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\lim_{r \to \infty}\sqrt{r}\left\{\frac{dG_1}{dr}(r, \lambda) - i\sqrt{\lambda}\, G_1(r, \lambda)\right\} = 0$$

Συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$G_2(z, z_0, \lambda) \qquad\qquad G_2 : [0, h]$$

$$\frac{d^2 G_2}{dz^2} + (k^2 - \lambda) G_2 = -\delta(z - z_0)$$

Π1b

$$\frac{d}{dz}[\,p(z)\frac{dG}{dz}] + [q(z) + \lambda r(z)]G = -\delta(z - z_0)$$

$$p(z) \to 1, \quad q(z) \to k^2, \quad r(z) \to 1, \quad \lambda \to -\lambda$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$G_2(z, z_0, \lambda) \qquad\qquad G_2 : [0, h]$$

$$\frac{d^2 G_2}{dz^2} + (k^2 - \lambda) G_2 = -\delta(z - z_0)$$

$$G_2(0, z_0, \lambda) = 0$$

Π1b

Ιδιότητες Green

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ G_2(z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - G_2\left(z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda\right) \right\} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{dG_2}{dz}(z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - \frac{dG_2}{dz}\left(z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda\right) \right\} = -1$$

$$\frac{dG_2}{dz}(h, z_0, \lambda) = 0$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

ΘΕΩΡΗΜΑ : Έστω G_1, G_2 οι συναρτήσεις Green που επιλύουν τα προβλήματα Π1a και Π1b αντίστοιχα. Τότε η λύση του προβλήματος του απλού κυματοδηγού (Πρόβλημα Π1) δίδεται από τη σχέση

$$p(r, r_0, z, z_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r, r_0, \lambda) G_2(z, z_0, \lambda)\, d\lambda$$

όπου c_λ είναι κατάλληλη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο που λαμβάνεται με τη θετική φορά.

Π1 Απλός κυματοδηγός

Έχομε δει

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G(z,z_0,\lambda)d\lambda = -\frac{\delta(z-z_0)}{r(z)}$$

$$G_1, \rightarrow r\left(z\right) = 2\pi r$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)d\lambda = -\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r}$$

$$G_2, \rightarrow r\left(z\right) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda = \delta(z-z_0)$$

Θέλομε να αποδείξουμε

$$p(r,r_0,z,z_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)d\lambda = -\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda = \delta(z-z_0)$$

$$p(r,r_0,z,z_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\frac{d^2G_1}{dr^2}G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i r}\int_{C_\lambda}\frac{dG_1}{dr}G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}G_1\frac{d^2G_2}{dz^2}d\lambda$$

$$-\frac{k^2}{2\pi i}\int_{C_\lambda}G_1G_2 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\{\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}\}G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}G_1\frac{d^2G_2}{dz^2}d\lambda - \frac{k^2}{2\pi i}\int_{C_\lambda}G_1G_2 d\lambda =$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\{-\lambda G_1-\frac{1}{2\pi r}\delta(r-r_0)\}G_2 d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}G_1\{-k^2G_2+\lambda G_2-\delta(z-z_0)\}d\lambda$$

$$-\frac{k^2}{2\pi i}\int_{C_\lambda}G_1G_2d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\lambda G_1G_2d\lambda+\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_\lambda}G_2d\lambda+\frac{k^2}{2\pi i}\int_{C_\lambda}G_1G_2d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\lambda G_1G_2d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\delta(z-z_0)\int_{C_\lambda}G_1d\lambda-\frac{k^2}{2\pi i}\int_{C_l}G_1G_2d\lambda$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_\lambda}G_2d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\delta(z-z_0)\int_{C_\lambda}G_1d\lambda$$

$$\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}+\lambda G_1=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r) \qquad \frac{d^2G_2}{dz^2}+(k^2-\lambda)G_2=-\delta(z-z_0)$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_\lambda} G_2 d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\delta(z-z_0)\int_{C_\lambda} G_1 d\lambda$$

1η επιλογή

Ιδιόμορφα σημεία της $G1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^+} G_1(r,r_0,\lambda)d\lambda=-\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r}$$

$$\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_r^+} G_2 d\lambda=0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=\frac{1}{2\pi i}\delta(z-z_0)\int_{C_\lambda} G_1 d\lambda=-\frac{1}{2\pi r}\delta\left(r-r_0\right)\delta\left(z-z_0\right)$$

$$r_0=0$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_\lambda} G_2 d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\delta(z-z_0)\int_{C_\lambda} G_1 d\lambda$$

2η επιλογή

Ιδιόμορφα σημεία της G2

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z^-} G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda=-\delta(z-z_0)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\delta(z-z_0)\int_{C_z^-} G_1 d\lambda=0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=\frac{1}{4\pi^2 ir}\delta(r-r_0)\int_{C_\lambda} G_2 d\lambda=-\frac{1}{2\pi r}\delta\left(r-r_0\right)\delta\left(z-z_0\right)$$

$$r_0=0$$

Π1 Απλός κυματοδηγός

$$p(r,r_0,z,z_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda$$

$$r_0 = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r}) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

Να υπολογίσουμε G_1 και G_2

Η συνάρτηση G_1

$$\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}+\lambda G_1=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r) \qquad G_1:[0,\infty)$$

Λύνουμε για r>0 και εφαρμόζουμε την κατάλληλη συνθήκη στο ιδιόμορφο σημείο r=0

$$\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}+\lambda G_1=0$$

$$G_1(r,r_0,\lambda)=AH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)+BH_0^{(2)}(\sqrt{\lambda}r)$$

$$r_0=0$$

Η συνάρτηση G_1

$$\frac{d^2 G_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr} + \lambda G_1 = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r) \qquad r_0 = 0$$

Συνθήκη ακτινοβολίας

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left\{ \frac{dG_1}{dr}(r,0,\lambda) - i\sqrt{\lambda}\, G_1(r,0,\lambda) \right\} = 0$$

$B=0 \qquad G_1(r,0,\lambda) = A H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r)$

Συνθήκη στο ιδιόμορφο σημείο

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \varepsilon \frac{dG_1}{dr}(\varepsilon,0,\lambda) \right\} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\varepsilon \frac{dG_1}{dr}(\varepsilon,0,\lambda) = A\varepsilon\sqrt{\lambda}\, H_0^{(1)'} \sqrt{\lambda}\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi}$$

Η συνάρτηση G_1

$$\varepsilon \frac{dG_1}{dr}(\varepsilon, 0, \lambda) = A\varepsilon\sqrt{\lambda}\, H_0^{(1)\prime}\sqrt{\lambda}\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi}$$

$$A\varepsilon\sqrt{\lambda}\left\{J_0^{'}(\sqrt{\lambda}\varepsilon) + i\, N_0^{'}(\sqrt{\lambda}\varepsilon)\right\} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$-A\varepsilon\sqrt{\lambda}\left\{J_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon) + i\, N_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon)\right\} = -\frac{1}{2\pi}$$

Ασυμπτωτικές εκφράσεις για μικρά ορίσματα

$$J_1(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon) \approx \frac{\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}{2} \qquad N_1(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon) \approx -\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}, \ \varepsilon \neq 0$$

$$-A\varepsilon\sqrt{\lambda}\left\{\frac{\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}{2} - i\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\,\varepsilon}\right\} = -\frac{1}{2\pi} \qquad -\frac{1}{2}A\varepsilon^2\lambda + i\frac{2A}{\pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

για $\varepsilon \to 0 \; -\frac{1}{2}A\varepsilon^2\lambda + i\frac{2A}{\pi} \to i\frac{2A}{\pi}$ $\Rightarrow$ $i\frac{2A}{\pi} = -\frac{1}{2\pi}$ $\Rightarrow$ $\boxed{A = \frac{i}{4}}$

Η συνάρτηση G_1

$$G_1(r, r_0, \lambda) = AH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)$$

$$r_0 = 0$$

$$A = \frac{i}{4} \longrightarrow \boxed{G_1(r, 0, \lambda) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)}$$

Για μεγάλα ορίσματα

$$H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r\sqrt{\lambda}}}\, e^{i(\sqrt{\lambda}r - \pi/4)}$$

$$G_1(r, 0, \lambda) \approx \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi r\sqrt{\lambda}}}\, e^{i(\sqrt{\lambda}r - \pi/4)}$$

Η συνάρτηση G_2

$$\frac{d^2 G_2}{dz^2} + (k^2 - \lambda) G_2 = -\delta(z - z_0) \qquad G_2 : [0, h]$$

Ιδιόμορφο σημείο στο z_o

Λύνουμε για $z < z_o$ και για $z > z_o$ εφαρμόζουμε την κατάλληλη συνθήκη στο ιδιόμορφο σημείο z_o

$$\gamma^2 = k^2 - \lambda$$

$$G_2(z, z_0, \lambda) = \begin{cases} A_2(z_0, \lambda) e^{i\gamma z} + B_2(z_0, \lambda) e^{-i\gamma z}, \; 0 \le z \le z_0 \\ \\ A_3(z_0, \lambda) e^{i\gamma z} + B_3(z_0, \lambda) e^{-i\gamma z}, \; z_0 \le z < h \end{cases}$$

Η συνάρτηση G_2

$$\frac{d^2 G_2}{dz^2} + (k^2 - \lambda) G_2 = -\delta(z - z_0) \qquad G_2 : [0, h]$$

$$G_2(0, z_0, \lambda) = 0$$

$$A_2 + B_2 = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{ G_2(z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - G_2(z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda \} = 0$$

$$A_2 e^{i\gamma z_0} + B_2 e^{-i\gamma z_0} = A_3 e^{i\gamma z_0} + B_3 e^{-i\gamma z_0}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{dG_2}{dz}(z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - \frac{dG_2}{dz}(z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda \right\} = -1$$

$$i\gamma \left\{ A_3 e^{i\gamma z_0} - B_3 e^{-i\gamma z_0} - A_2 e^{i\gamma z_0} + B_2 e^{-i\gamma z_0} \right\} = -1$$

$$\frac{dG_2}{dz}(h, z_0, \lambda) = 0$$

$$i\gamma A_3 e^{i\gamma h} - i\gamma B_3 e^{-i\gamma h} = 0$$

Η συνάρτηση G_2

$$\frac{d^2G_2}{dz^2}+(k^2-\lambda)G_2=-\delta(z-z_0) \qquad G_2:[0,h]$$

Λύση συστήματος

$$A_2=-\frac{i}{2\gamma}\frac{\cos\gamma(z_0-h)}{\cos\gamma h}, \quad B_2=\frac{i}{2\gamma}\frac{\cos\gamma(z_0-h)}{\cos\gamma h},$$

$$A_3=\frac{e^{-i\gamma h}}{2\gamma}\frac{\sin\gamma z_0}{\cos\gamma h}, \qquad B_3=\frac{e^{i\gamma h}}{2\gamma}\frac{\sin\gamma z_0}{\cos\gamma h}.$$

$$G_2(z,z_0,\lambda)=\frac{\cos\gamma(z_0-h)}{\gamma\cos\gamma h}\sin\gamma z, \quad 0\le z\le z_0$$

$$G_2(z,z_0,\lambda)=\frac{\sin\gamma z_0}{\gamma\cos\gamma h}\cos\gamma(z-h), \quad z_0\le z\le h$$

Η ακουστική πίεση

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0) \qquad p(r,z):[0,\infty)\times[0,h]$$

$$p(r,r_0,z,z_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)G_2(z,z_0,\lambda)\,d\lambda$$

$$p(r,r_0,z,z_0)=\begin{cases} -\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{C_\lambda}\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\cos\gamma(z_0-h)}{\cos\gamma h}\right\}\sin\gamma z\, H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)\,d\lambda, & 0\le z\le z_0 \\ -\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{C_\lambda}\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\sin\gamma z_0}{\cos\gamma h}\right\}\cos\gamma(z-h)\, H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)\,d\lambda, & z_0\le z\le h \end{cases}$$

$$r_0=0$$