Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

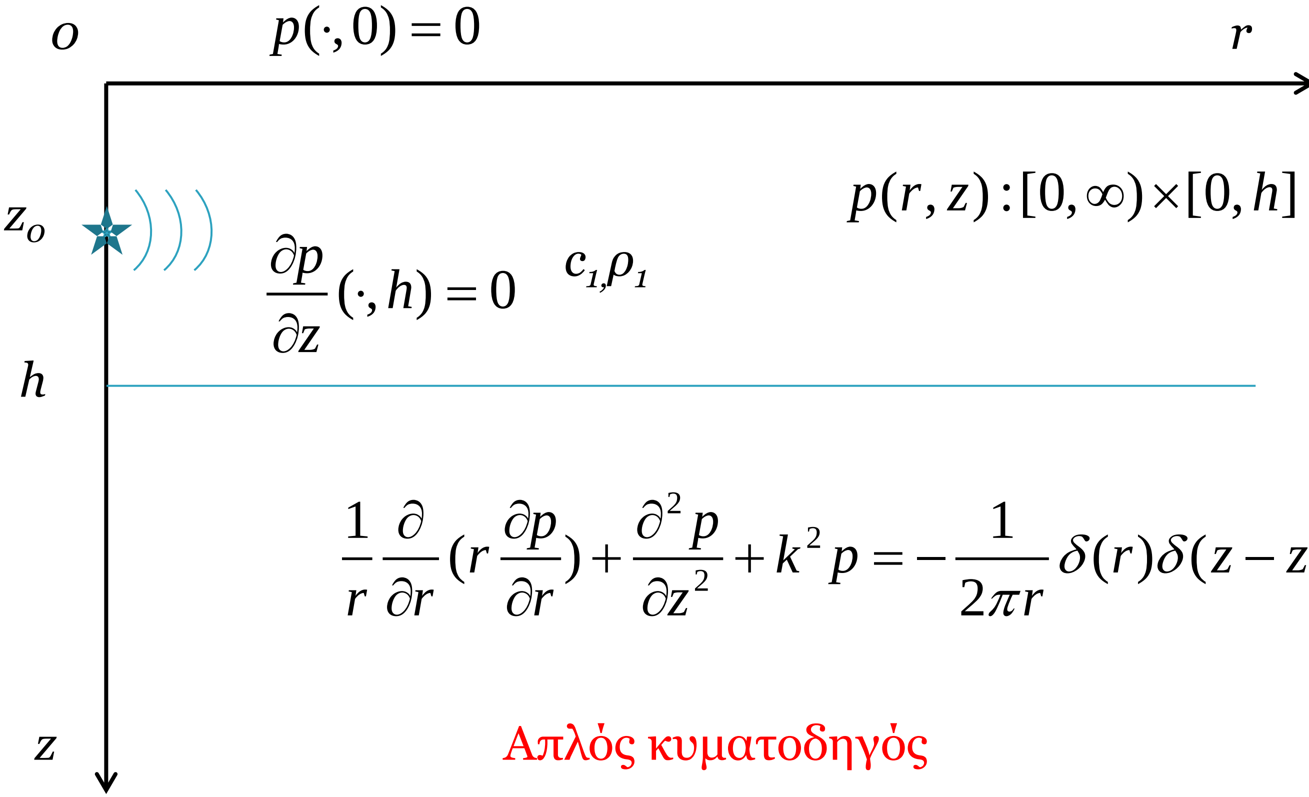
Κυματική Διάδοση

7η διάλεξη

2023-2024

Μιχάλης Ταρουδάκης

Π1 Απλός κυματοδηγός



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

Απλός κυματοδηγός

Δεν υπάρχει επανακτινοβολία ενέργειας από το άπειρο

Η ακουστική πίεση

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0) \qquad p(r,z):[0,\infty)\times[0,h]$$

$$p(r,r_0,z,z_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} G_1(r,r_0,\lambda)G_2(z,z_0,\lambda)d\lambda$$

$$r_0=0$$

$$p(r,0,z,z_0)=\begin{cases}-\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{C_\lambda}\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\cos\left(\gamma(z_0-h)\right)}{\cos\left(\gamma h\right)}\right\}\sin\left(\gamma z\right)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)d\lambda, & 0\le z\le z_0\\[2ex] -\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{C_\lambda}\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\sin\left(\gamma z_0\right)}{\cos\left(\gamma h\right)}\right\}\cos\left(\gamma(z-h)\right)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)d\lambda, & z_0\le z\le h\end{cases}$$

Η συνάρτηση G_1

$$\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}+\lambda G_1=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r) \qquad G_1:[0,\infty)$$

Λύνουμε για r>0 και εφαρμόζουμε την κατάλληλη συνθήκη στο ιδιόμορφο σημείο r=0

$$\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}+\lambda G_1=0$$

$$G_1(r,r_0,\lambda)=AH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)+BH_0^{(2)}(\sqrt{\lambda}r)$$

$$r_0=0$$

Η συνάρτηση G_2

$$\frac{d^2 G_2}{dz^2} + (k^2 - \lambda) G_2 = -\delta(z - z_0) \qquad G_2 : [0, h]$$

Ιδιόμορφο σημείο στο z_o

Λύνουμε για $z < z_o$ και για $z > z_o$ εφαρμόζουμε την κατάλληλη συνθήκη στο ιδιόμορφο σημείο z_o

$$\gamma^2 = k^2 - \lambda$$

$$G_2(z, z_0, \lambda) = \begin{cases} A_2(z_0, \lambda) e^{i\gamma z} + B_2(z_0, \lambda) e^{-i\gamma z}, \ 0 \le z \le z_0 \\ A_3(z_0, \lambda) e^{i\gamma z} + B_3(z_0, \lambda) e^{-i\gamma z}, \ z_0 \le z < h \end{cases}$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$
p(r,0,z,z_0)=\begin{cases} -\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{C_\lambda}\dfrac{1}{\gamma}\left\{\dfrac{\cos\left(\gamma(z_0-h)\right)}{\cos\left(\gamma h\right)}\right\}\sin\left(\gamma z\right)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)d\lambda, & 0\le z\le z_0 \\ -\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{C_\lambda}\dfrac{1}{\gamma}\left\{\dfrac{\sin\left(\gamma z_0\right)}{\cos\left(\gamma h\right)}\right\}\cos\left(\gamma(z-h)\right)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)d\lambda, & z_0\le z\le h \end{cases}
$$

Ιδιόμορφα σημεία : $\cos\left(\gamma h\right)=0 \qquad \gamma\in\mathbb{R}$

Χαρακτηριστική εξίσωση κυματοδηγού

$$\gamma_n h=(2n-1)\frac{\pi}{2}, \qquad n=1,2,3,.......$$

$$\gamma_n=(2n-1)\frac{\pi}{2h}, \qquad n=1,2,3,.......$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\gamma_n = (2n-1)\frac{\pi}{2h}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

$$\gamma_n^2 = k^2 - \lambda_n$$

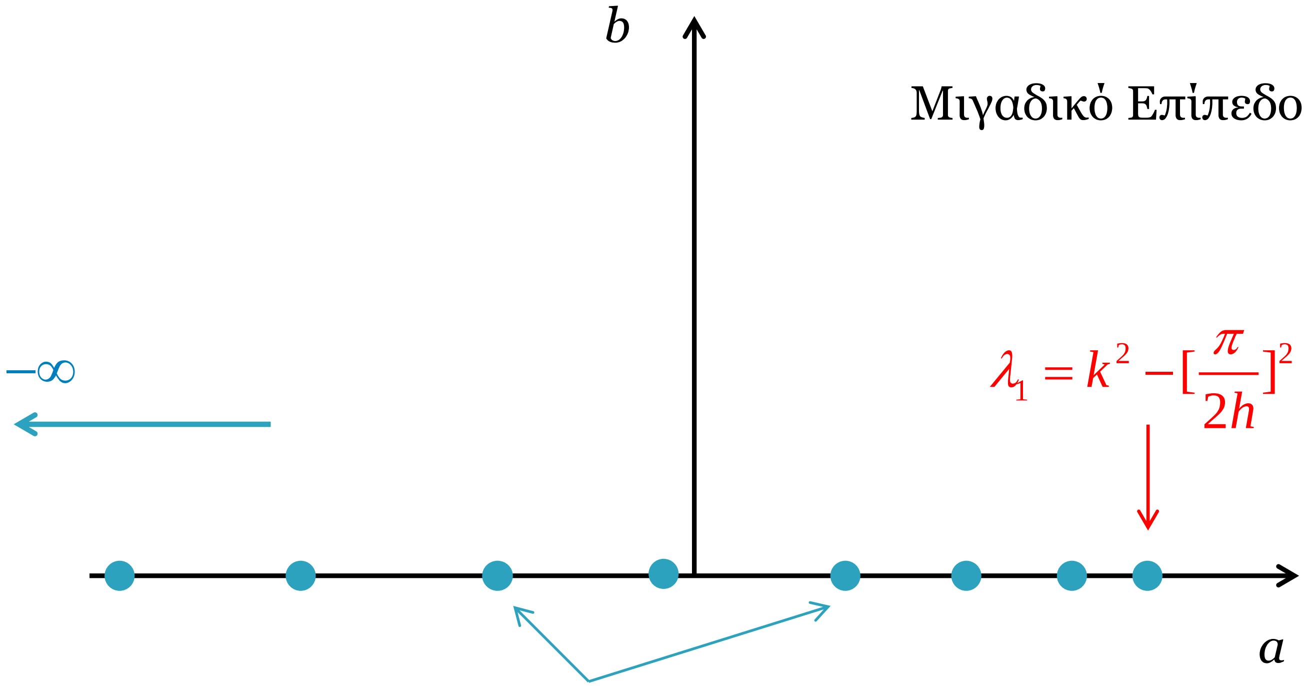
$$\lambda_n = k^2 - [(2n-1)\frac{\pi}{2h}]^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int_{C_\lambda}\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\cos(\gamma(z_0-h))}{\cos(\gamma h)}\right\}\sin(\gamma z)\,H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)\,d\lambda, \quad 0 \le z \le z_0$$

Το γ=0 δεν είναι ιδιόμορφο σημείο

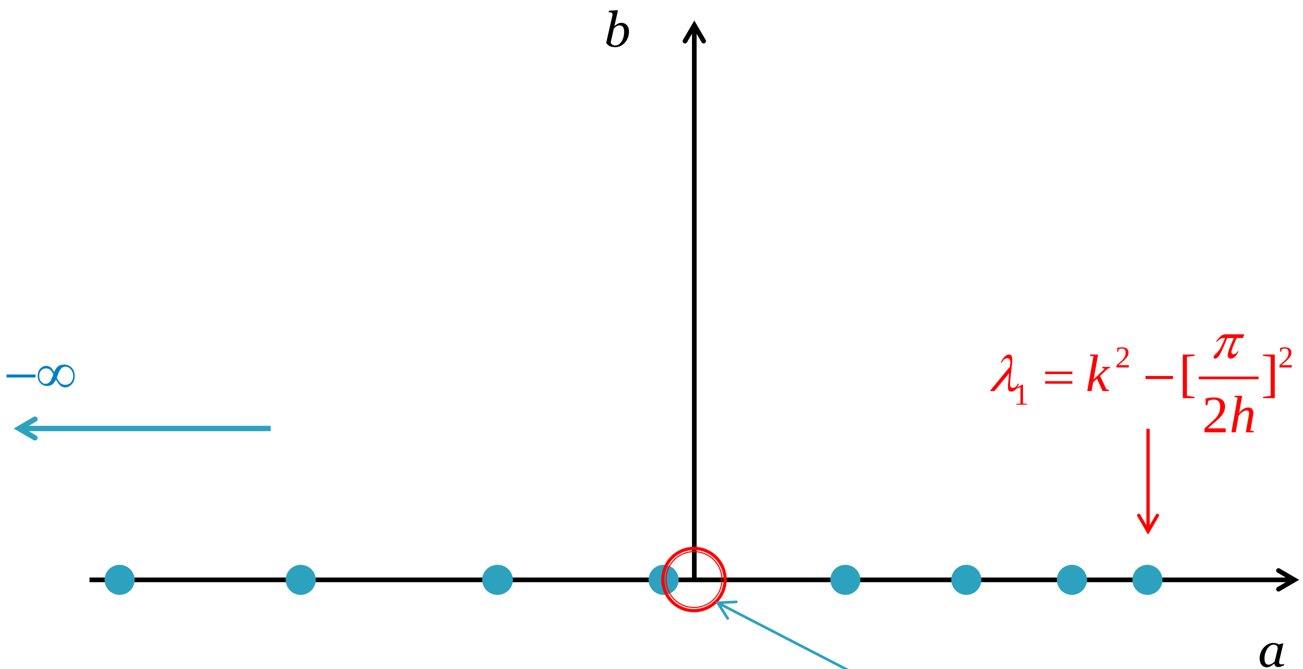
Υπολογισμός του ολοκληρώματος



$$\lambda_n = k^2 - [(2n-1)\frac{\pi}{2h}]^2, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Πραγματικοί αριθμοί

Υπολογισμός του ολοκληρώματος

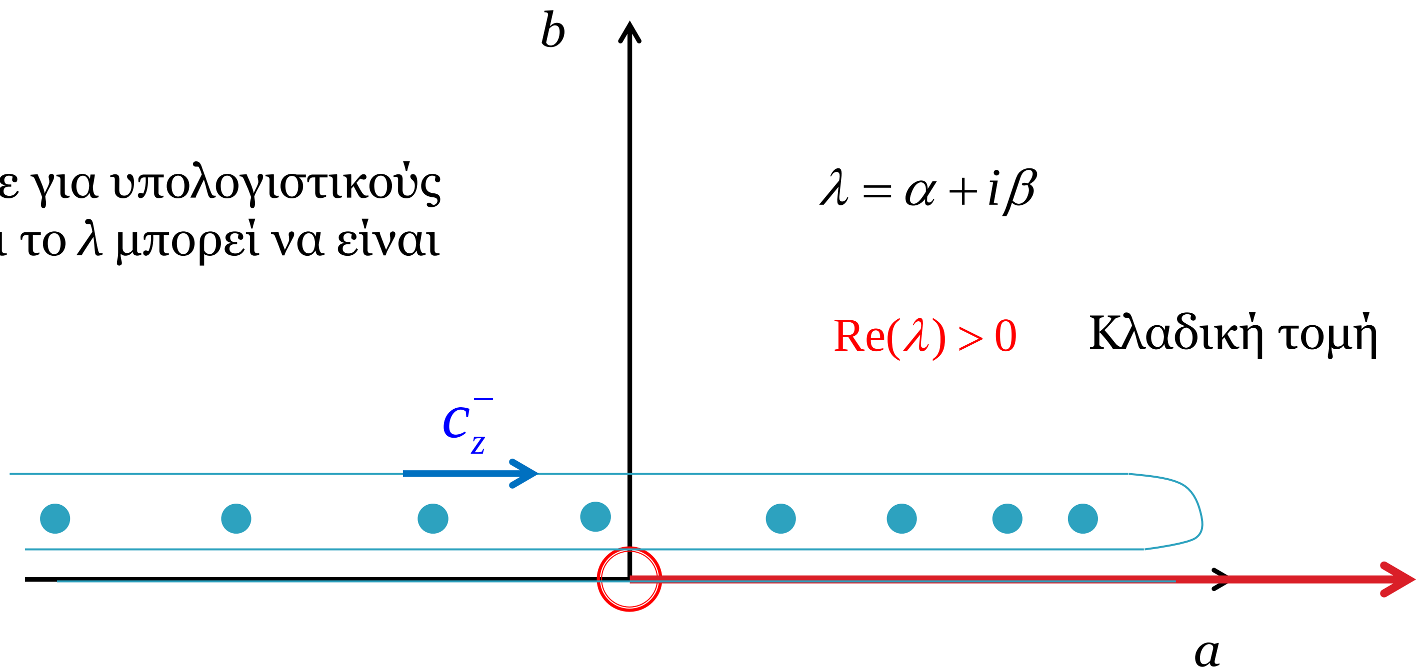


$$-\frac{1}{8\pi}\int_{C_\lambda}\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\cos\left(\gamma(z_0-h)\right)}{\cos\left(\gamma h\right)}\right\}\sin\left(\gamma z\right)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)d\lambda, \quad 0\le z\le z_0$$

$\lambda = 0$ Ορίζει κλαδική τομή (branch cut)

Υπολογισμός του ολοκληρώματος

Δεχόμαστε για υπολογιστικούς λόγους ότι το λ μπορεί να είναι μιγαδικό



$k = k' + ik'', \quad k'' > 0$ Λόγω της επ' άπειρον συμπεριφοράς της πίεσης

$$\lambda_n = k^2 - [(2n-1)\frac{\pi}{2h}]^2 = \left(k'^2 - k''^2\right) - [(2n-1)\frac{\pi}{2h}]^2 + 2ik'k''$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος

Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

$$\int_{c_0} f(z)dz = 2\pi i b_1 \qquad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\cos\left(\gamma(z_0 - h)\right)}{\cos\left(\gamma h\right)}\right\}\sin\left(\gamma z\right)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \lambda}$$

$$f(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} \qquad q(\lambda) = \cos\left(\gamma h\right) \qquad b_n = \frac{p(\lambda_n)}{q'(\lambda_n)}$$

$$q'(\lambda_n) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\cos\left(\gamma h\right))_{\lambda=\lambda_n}$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος

Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

$$q'(\lambda_n) = \frac{\partial}{\partial \lambda}(\cos(\gamma h))_{\lambda=\lambda_n}$$

$$\gamma^2 = k^2 - \lambda \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial \lambda}\cos(\gamma h)\right]_{\lambda=\lambda_n} = -\left[h(\sin(\gamma h))\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_n}$$

$$= -\left[h(\sin(\gamma h))\frac{\partial}{\partial \lambda}(k^2-\lambda)^{1/2}\right]_{\lambda=\lambda_n} = h\frac{\sin(\gamma_n h)}{2\gamma_n} = \frac{h(-1)^{n+1}}{2\gamma_n}, \quad n = 1, 2, ...$$

αφού $\cos(\gamma_n h) = 0 \qquad \gamma_n = (2n-1)\dfrac{\pi}{2h}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$

επίσης

$$\cos(\gamma_n(z_0 - h)) = \cos(\gamma_n z_0)\cos(\gamma_n h) + \sin(\gamma_n z_0)\sin(\gamma_n h) = (-1)^{n+1}\sin(\gamma_n z_0)$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος

Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

$$b_n = \frac{p(\lambda_n)}{q'(\lambda_n)} = \frac{1}{\dfrac{h(-1)^{n+1}}{2\gamma_n}} \left\{ \frac{\cos\left(\gamma_n (z_0 - h)\right) \sin\left(\gamma_n z\right) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r)}{\gamma_n} \right\}$$

$$b_n = \frac{p(\lambda_n)}{q'(\lambda_n)} = \frac{1}{\dfrac{h(-1)^{n+1}}{2\gamma_n}} \left\{ \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\gamma_n z_0\right) \sin\left(\gamma_n z\right) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r)}{\gamma_n} \right\}$$

$$b_n = \frac{p(\lambda_n)}{q'(\lambda_n)} = \frac{2}{h} \left\{ \sin\left(\gamma_n z_0\right) \sin\left(\gamma_n z\right) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r) \right\}$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος

Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

$$p(r,0,z,z_0)=\frac{1}{8\pi}\int_{C_z^-}\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\cos\left(\gamma(z_0-h)\right)}{\cos\left(\gamma h\right)}\right\}\sin\left(\gamma z\right)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)d\lambda \quad =\frac{1}{8\pi}2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$$p(r,0,z,z_0)=\frac{i}{4}\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{i}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{h}\left\{\sin\left(\gamma_n z_0\right)\sin\left(\gamma_n z\right)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n}r)\right\}$$

$$p(r,0,z,z_0)=\frac{i}{2h}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\gamma_n z_0\right)\sin\left(\gamma_n z\right)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n}r)$$

για $r>>$ $$p(r,0,z,z_0)=\frac{i}{\sqrt{2\pi h}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\gamma_n z_0\right)\sin\left(\gamma_n z\right)\frac{\exp(i(\sqrt{\lambda_n}r-\frac{\pi}{4}))}{\sqrt{\sqrt{\lambda_n}r}}$$

Ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r})+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(k^2-\lambda)u=0 \qquad u(z):[0,h]$$

$$u(0)=0, \quad \frac{du}{dz}(h)=0 \qquad k^2-\lambda=\gamma^2$$

Πρόβλημα Sturm-Liouville

γ_n Ιδιοτιμές

$u_n(z)$ Ιδιοσυναρτήσεις

$$k^2-\gamma_n^2=\lambda_n$$

Ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων

$$p(\cdot,0)=0 \quad \frac{\partial p}{\partial z}(\cdot,h)=0 \qquad p(\cdot,z):[0,\infty)\times[0,h]$$

$$u(0)=0, \quad \frac{du}{dz}(h)=0 \qquad u(z):[0,h]$$

$$p(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n(r)u_n(z)$$

2ο θεώρημα αναπαράστασης

Υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων $u_n(z)$

Υπολογισμός των συναρτήσεων $A_n(r)$

Υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (k^2 - \lambda)u = 0 \qquad u(z) = Ae^{i\gamma z} + Be^{-i\gamma z} \qquad \sqrt{k^2 - \lambda} = \gamma$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dz}(h) = 0$$

$$A + B = 0$$

$$i\gamma Ae^{i\gamma h} - i\gamma Be^{-i\gamma h} = 0$$

Το σύστημα των συντελεστών για να έχει μη μηδενική λύση, θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος να είναι 0

Υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων

$$A+B=0$$

$$i\gamma Ae^{i\gamma h}-i\gamma Be^{-i\gamma h}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma e^{i\gamma h} & -i\gamma e^{-i\gamma h} \end{vmatrix}=0$$

$$-i\gamma[e^{-i\gamma h}+e^{i\gamma h}]=0$$

$$\boxed{\cos(\gamma h)=0}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση κυματοδηγού !!

$$\gamma_n=(2n-1)\frac{\pi}{2h}, \qquad n=1,2,3,....... \qquad \lambda_n=k^2-\gamma_n{}^2=k^2-\left[\frac{(2n-1)}{h}\frac{\pi}{2}\right]^2$$

Υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων

$$u_n(z) = Ae^{i\gamma_n z} + Be^{-i\gamma_n z} = A(e^{i\gamma_n z} - e^{-i\gamma_n z}) =$$
$$= A(\cos(\gamma_n z) + i\sin(\gamma_n z) - \cos(\gamma_n z) + i\sin(\gamma_n z)) =$$
$$= 2Ai\sin\gamma_n z \quad .$$

$$\gamma_n = (2n-1)\frac{\pi}{2h}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθογώνιες και μπορούν να κανονικοποιηθούν

$$\int_0^h u_n{}^2(z)dz = 1$$

$$2Ai = \sqrt{\frac{2}{h}}$$

$$u_n(z) = \sqrt{\frac{2}{h}}\sin\left(\sqrt{k^2 - \lambda_n}\, z\right)$$

$$\kappa_n = \sqrt{\lambda_n}$$

Υπολογισμός των συντελεστών

$$p(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(r)u_n(z)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r})+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n A_n^{''}+\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}u_n A_n^{'}+\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{''}A_n+k^2\sum_{n=1}^{\infty}u_n A_n=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

$$A_n^{''}=\frac{d^2A_n}{dr^2},\ A_n^{'}=\frac{dA_n}{dr},\ u_n^{''}=\frac{d^2u_n}{dz^2},\ u_n^{'}=\frac{du_n}{dr}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left\{A_n^{''}+\frac{1}{r}A_n^{'}+\lambda_n A_n\right\}=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

Υπολογισμός των συντελεστών

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left\{ A_n^{''} + \frac{1}{r} A_n^{'} + \lambda_n A_n \right\} = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0) \qquad \times u_m(z)$$

$$\int_0^h \sum_{n=1}^{\infty} u_n u_m \left\{ A_n^{''} + \frac{1}{r} A_n^{'} + \lambda_n A_n \right\} dz = -\frac{1}{2\pi r}\int_0^h \delta(r)\delta(z-z_0) u_m dz$$

Λόγω ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων

$$A_m^{''} + \frac{1}{r} A_m^{'} + \lambda_m A_m = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r) u_m(z_0) \qquad u_m(z_0) \neq 0$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\frac{A_m}{u_m(z_0)}\right] + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{A_m}{u_m(z_0)}\right] + \lambda_m \left[\frac{A_m}{u_m(z_0)}\right] = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

Υπολογισμός των συντελεστών

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\frac{A_m}{u_m(z_0)}\right]+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{A_m}{u_m(z_0)}\right]+\lambda_m\left[\frac{A_m}{u_m(z_0)}\right]=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

$$\frac{d^2G_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr}+\lambda G_1=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

$$G_1(r,0,\lambda)=\frac{A_m(r)}{u_m(z_0)}$$

$$\frac{A_m}{u_m(z_0)}=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m}r)$$

$$A_m=\frac{i}{4}u_m(z_0)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m}r)$$

Υπολογισμός των συντελεστών

$$p(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(r)u_n(z)$$

$$p(r,z)=\frac{i}{4}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z_0)u_n(z)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n}r)$$

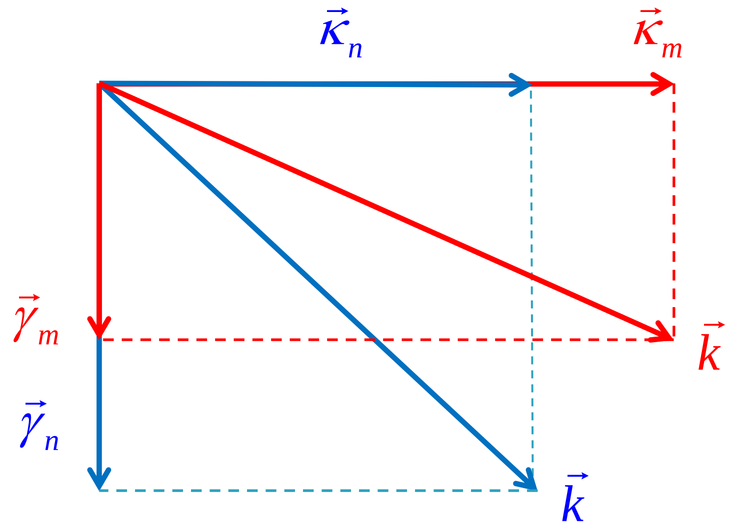
$$u_n(z)=\sqrt{\frac{2}{h}}\sin\left(\sqrt{k^2-\lambda_n}\,z\right)=\sqrt{\frac{2}{h}}\sin\left(\gamma_n z\right)$$

$$p(r,z)=\frac{i}{2h}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{k^2-\lambda_n}\,z_0)\sin(\sqrt{k^2-\lambda_n}\,z)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n}r)$$

Κάθε όρος της σειράς χαρακτηρίζεται ως «ιδιομορφή» (mode)

Modal Expansion

Φυσική ερμηνεία



$$\kappa_n = \sqrt{\lambda_n}$$

Για να έχει φυσική σημασία (κύμα) η λύση της ακουστικής εξίσωσης θα πρέπει $\kappa_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$

$$\lambda_n = k^2 - \gamma_n{}^2 = k^2 - \left[\frac{(2n-1)}{h}\frac{\pi}{2}\right]^2, \;\; n = 1, \ldots, \infty$$

$\lambda_n > 0$ Κανονικές ιδιομορφές

Η ακουστική πίεση

$$p(r,z)=\frac{i}{\sqrt{2\pi h}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{k^2-\lambda_n}\,z_0\right)\sin\left(\sqrt{k^2-\lambda_n}\,z\right)\frac{\exp(i(\sqrt{\lambda_n}r-\frac{\pi}{4}))}{\sqrt{\sqrt{\lambda_n}r}}$$

$\lambda_n<0$ Αποσβεννύμενες ιδιομορφές

$\sqrt{\lambda_n}=\pm i\sqrt{-\lambda_n}=\pm ib_n$ Διατήρηση ενέργειας $\sqrt{\lambda_n}=ib_n$

$$p(r,z)=\frac{i}{\sqrt{2\pi h}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{k^2-\lambda_n}\,z_0\right)\sin\left(\sqrt{k^2-\lambda_n}\,z\right)\frac{\exp(-b_nr-\frac{\pi}{4}))}{\sqrt{ib_nr}}$$

Δεν διαδίδεται κύμα στην διεύθυνση *r*

Η ακουστική πίεση

Εάν $\lambda_n = k^2 - \left[\frac{(2n-1)}{h} \frac{\pi}{2} \right]^2 < 0 \quad \forall n \in (1,2,.....)$

Δεν υπάρχει κυματικό φαινόμενο

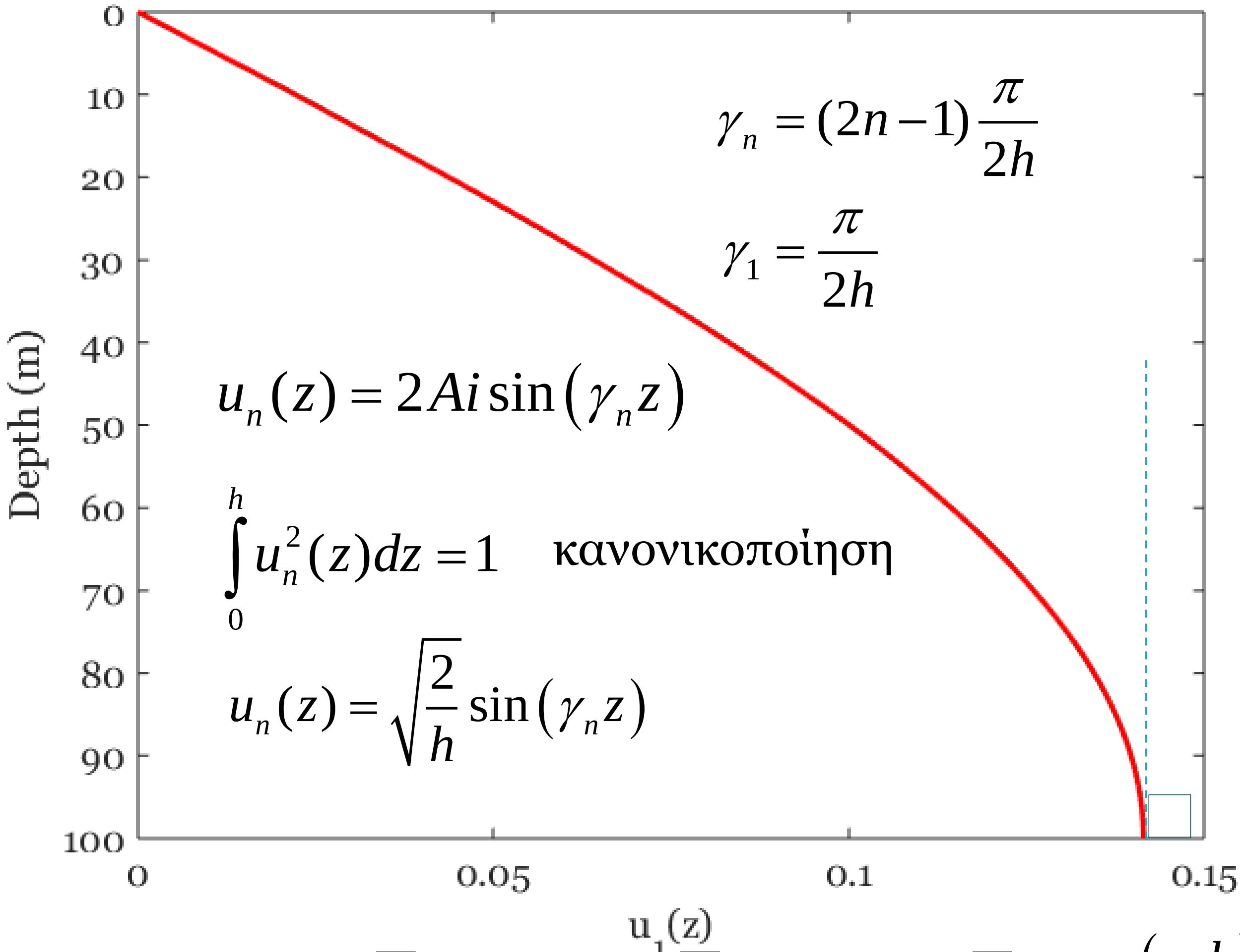
$$k - \frac{\pi}{2h} < 0 \Rightarrow k(= \frac{\omega}{c}) < \frac{\pi}{2h}$$

$$\frac{2\pi f}{c} < \frac{\pi}{2h} \Rightarrow f < \frac{c}{4h}$$

Συχνότητα αποκοπής (cut-off frequency f_{co})

c=1500 m/sec, h = 5 m f_{co} = 75 Hz

Οι ιδιοσυναρτήσεις



$$\gamma_n = (2n-1)\frac{\pi}{2h}$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2h}$$

$$u_n(z) = 2Ai\sin\left(\gamma_n z\right)$$

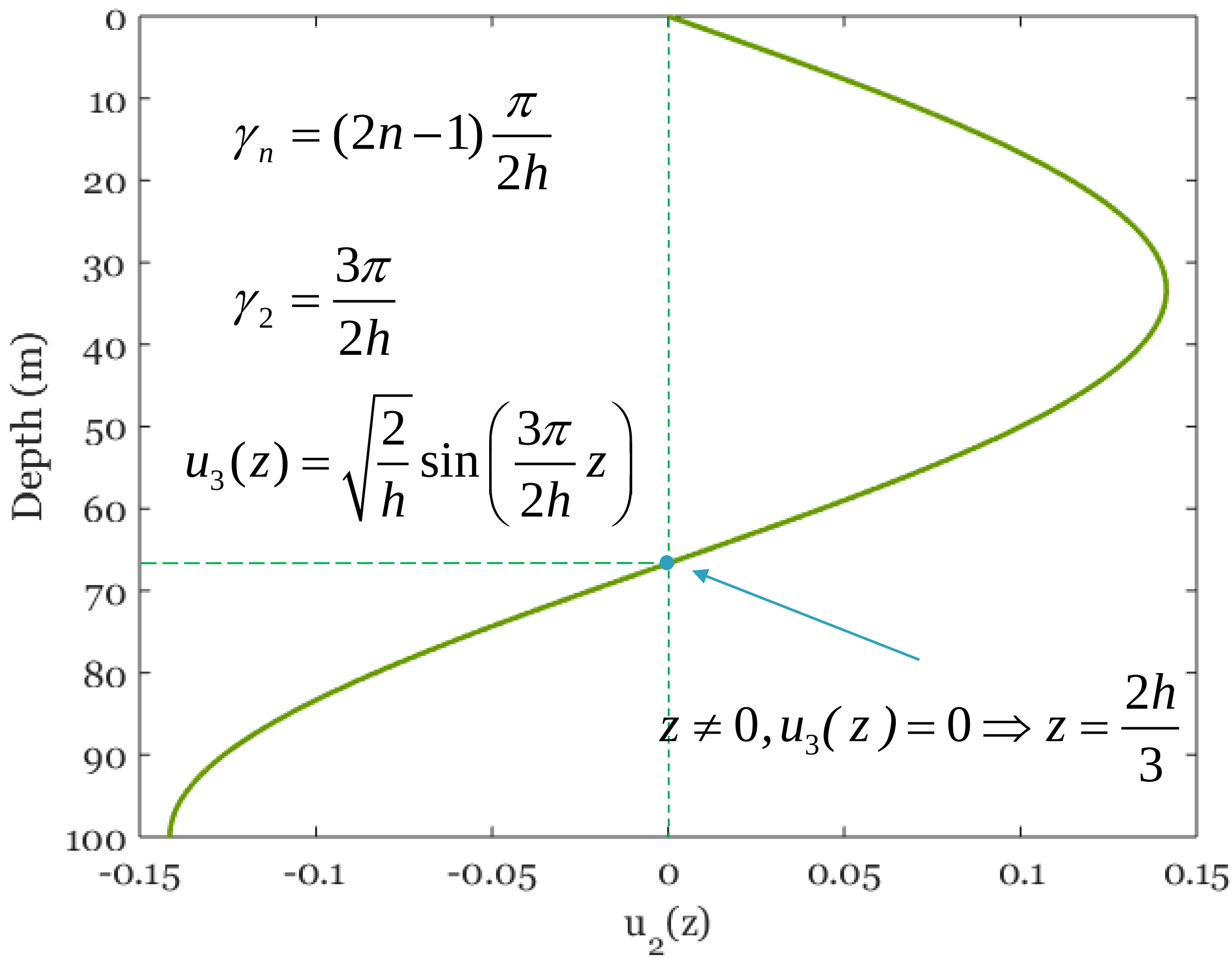
$$\int_0^h u_n^2(z)dz = 1$$ κανονικοποίηση

$$u_n(z) = \sqrt{\frac{2}{h}}\sin\left(\gamma_n z\right)$$

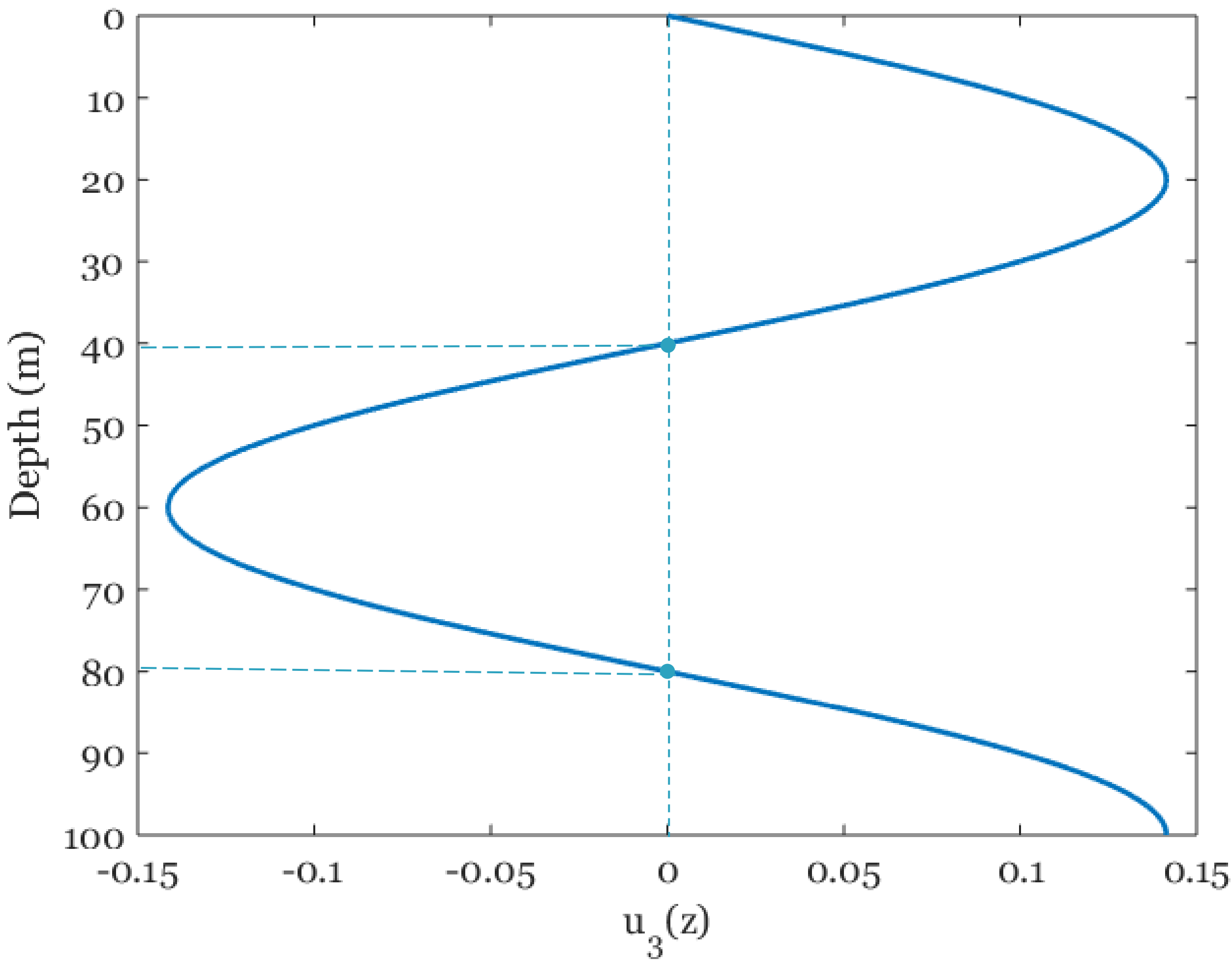
$$\cos\left(\gamma_n h\right) = 0$$

$$u_1(h) = \sqrt{\frac{2}{h}}\sin\left(\gamma_1 h\right) = \sqrt{\frac{2}{h}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{h}}$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις



Οι ιδιοσυναρτήσεις



Άλλο παράδειγμα