Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

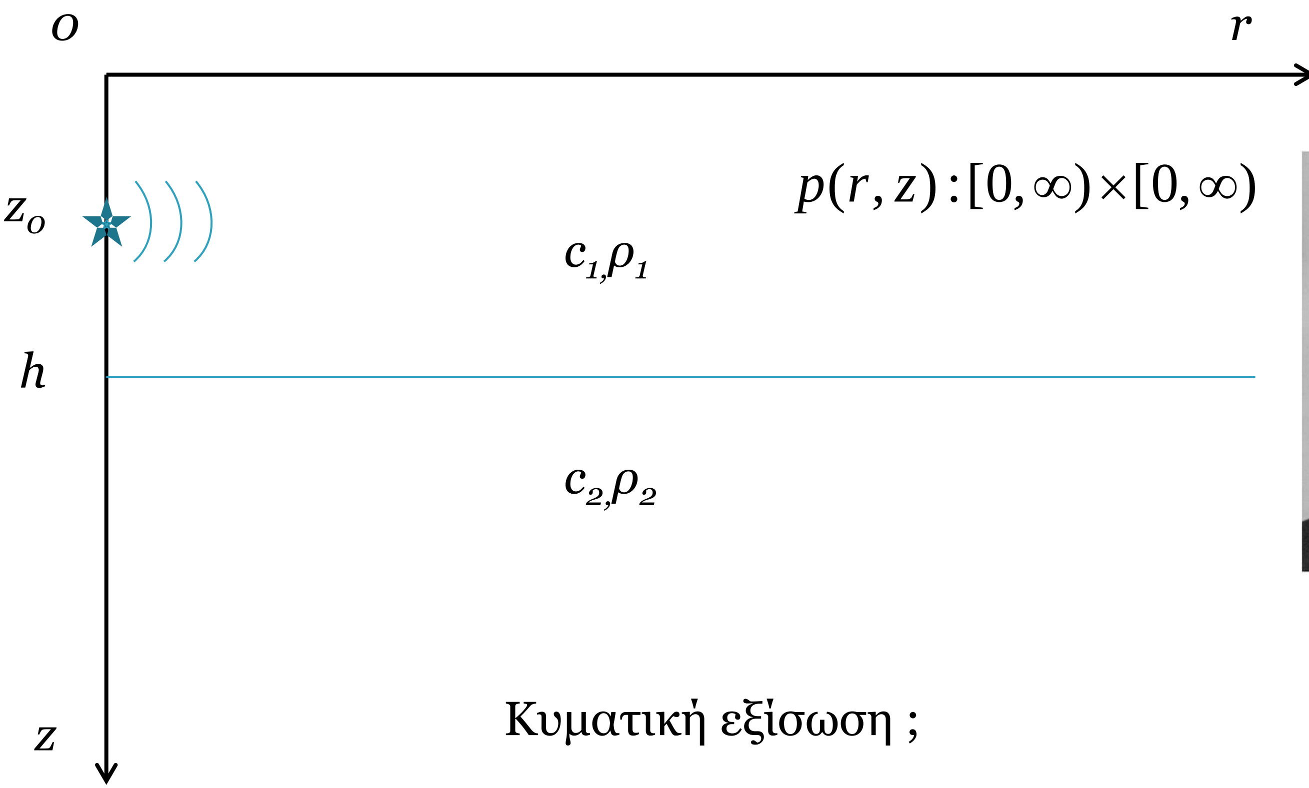
Κυματική Διάδοση

8η διάλεξη

2023-2024

Μιχάλης Ταρουδάκης

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



$$p(r,z):[0,\infty)\times[0,\infty)$$

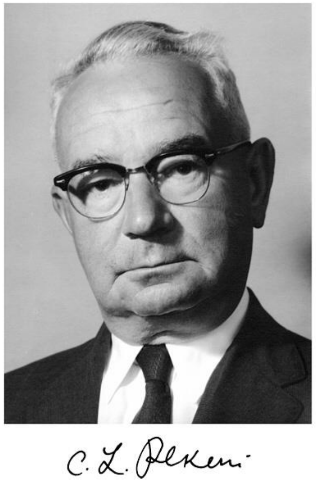
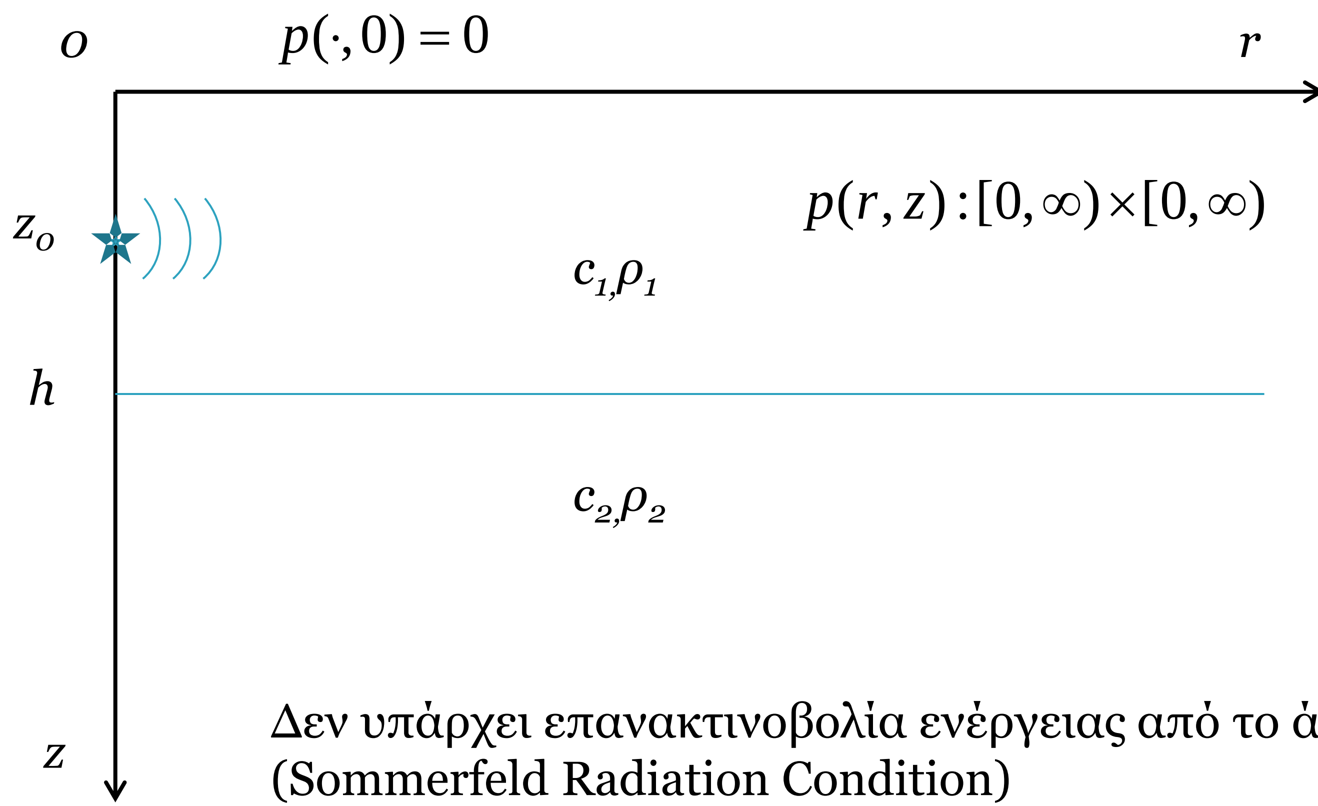


Photo by Rutz, St. Moritz, Switzerland

Κυματική εξίσωση ;

Οριακές συνθήκες

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



Δεν υπάρχει επανακτινοβολία ενέργειας από το άπειρο
(Sommerfeld Radiation Condition)

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

Επαναδιατύπωση της ακουστικής εξίσωσης σε χωρίο με μεταβολή της πυκνότητας

Θυμίζουμε

$$p(\vec{x},t) = p_0(\vec{x},t) + p_1(\vec{x},t)$$

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{u}_0(\vec{x},t) + \vec{u}_1(\vec{x},t)$$

$$\rho(\vec{x},t) = \rho_0(\vec{x},t) + \rho_1(\vec{x},t)$$

Ομογενής ακουστική εξίσωση σε χωρίο σταθερής πυκνότητας:

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

Ομογενής ακουστική εξίσωση σε χωρίο μεταβλητής πυκνότητας:

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{\rho_0}\nabla\rho_0\nabla p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

Θα θεωρήσουμε $\rho_0(\vec{x},t) = \rho_0(z)$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$p_1 = pe^{-i\omega t}$$

$$p_1(\vec{x},\mathrm{t}) = p(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με αξονική συμμετρία

$$p_1(r,z,t) = p(r,z)e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \boxed{- \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{\partial p}{\partial z}} + k^2 p = 0$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{\partial p}{\partial z}+k^2 p=0$$

$$\rho_0(z)=\begin{cases}\rho_1 & \text{για} \quad 0\le z\le h\\ \rho_2 & \text{για} \quad z>h\end{cases}$$

Η εξίσωση Helmholtz με πηγή

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{\partial p}{\partial z}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta\left(r\right)\delta(z-z_0)$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$p(\vec{x},t) = p_0(\vec{x},t) + p_1(\vec{x},t)$$
$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{u}_0(\vec{x},t) + \vec{u}_1(\vec{x},t)$$
$$\rho(\vec{x},t) = \rho_0(\vec{x},t) + \rho_1(\vec{x},t)$$

Συνθήκη στη διεπιφάνεια

$$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_1 \qquad \vec{u}_1(\vec{x}) = \left(u_{1x}(\vec{x}), u_{1y}(\vec{x}), u_{1z}(\vec{x})\right) \qquad -\frac{\partial p_1}{\partial z} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} u_{1z}$$

Για αρμονική διέγερση

$$\vec{u}_1(\vec{x},t) = \vec{u}_{1\vec{x}}(\vec{x})e^{-i\omega t},\ p_1(\vec{x},t) = p_{1\vec{x}}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

Για λόγους απλότητας του συμβολισμού θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια το συμβολισμό $\vec{u}(\vec{x}),\ p(\vec{x})$ για τη χωρική εξάρτηση της ταχύτητας και της ακουστικής πίεσης αντίστοιχα

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$\vec{u}_1(\vec{x},t) = \vec{u}(\vec{x})e^{-i\omega t},\ p_1(\vec{x},t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial z} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} u_{1z}$$

$$u_{1z}(\vec{x},t) = u_z(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = -i\omega\rho_0 u_z$$

$$u_z = \frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Τα δύο ακουστικά μέσα βρίσκονται σε συνεχή επαφή :
Συνέχεια της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων

$$u_z(h^-) = u_z(h^+) \Rightarrow \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}(\cdot, h^-) = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}(\cdot, h^+)$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$\rho_0 = \rho(z)$$

$$\rho_0(z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για} \quad 0 \le z \le h \\ \rho_2 & \text{για} \quad z > h \end{cases}$$

$$p(z) = \begin{cases} p^{(1)}(\cdot, z) & \text{για} \quad 0 \le z \le h \\ p^{(2)}(\cdot, z) & \text{για} \quad z \ge h \end{cases}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}(\cdot, h^-) = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}(\cdot, h^+)$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}(\cdot, h) = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial z}(\cdot, h)$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

o $\quad$ r

$$p^{(1)}(\cdot,0)=0$$

z_o

c_1,ρ_1

$$p^{(1)}(\cdot,h)=p^{(2)}(\cdot,h)$$

h

c_2,ρ_2

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}(\cdot,h)=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial z}(\cdot,h)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{\partial p}{\partial z}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

z

$$\lim_{z\to\infty} p^{(2)}(\cdot,z)=0$$

Δεν υπάρχει επανακτινοβολία ενέργειας από το άπειρο

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

Θεωρούμε το πρόβλημα Sturm-Liouville για τη συνάρτηση $u(z):[0,\infty)$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{du}{dz}(z)\right)+\left(\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)}-\frac{\lambda}{\rho_0(z)}\right)u(z)=0$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d\psi}{dx}]+[q(x)+\lambda r(x)]\psi=0$$

$$p(x)\equiv\frac{1}{\rho_0(z)},q(x)\equiv\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)},r(x)=\frac{1}{\rho_0(z)},\lambda\to-\lambda$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

Θεωρούμε το πρόβλημα Sturm-Liouville για τη συνάρτηση $u(z):[0,\infty)$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{du}{dz}(z)\right)+\left(\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)}-\frac{\lambda}{\rho_0(z)}\right)u(z)=0$$

$$u(z)=\begin{cases} u^{(1)}(z) & \text{για} \quad 0\le z\le h \\ u^{(2)}(z) & \text{για} \quad z\ge h \end{cases}$$

$$\rho_0(z)=\begin{cases} \rho_1 & \text{για} \quad 0\le z\le h \\ \rho_2 & \text{για} \quad z> h \end{cases}$$

$$k(z)=\begin{cases} \dfrac{\omega}{c_1}=k_1 & \text{για} \quad 0\le z\le h \\ \dfrac{\omega}{c_2}=k_2 & \text{για} \quad z> h \end{cases}$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$u(z):[0,\infty)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{du}{dz}(z)\right)+\left(\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)}-\frac{\lambda}{\rho_0(z)}\right)u(z)=0$$

$$u^{(1)}(0)=0$$

$$u^{(1)}(h)=u^{(2)}(h)$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}(h)=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial z}(h)$$

$$\lim_{z\to\infty}u^{(2)}(z)=0$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$u(z):[0,\infty)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{du}{dz}(z)\right)+\left(\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)}-\frac{\lambda}{\rho_0(z)}\right)u(z)=0$$

$$u^{(1)}(0)=0 \qquad u^{(1)}(h)=u^{(2)}(h) \qquad \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}(h)=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial z}(h) \qquad \lim_{z\to\infty}u^{(2)}(z)=0$$

Ιδιόμορφο πρόβλημα Sturm-Liouville

Μία συνάρτηση *f*(*z*) οριζόμενη στο ίδιο διάστημα, μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της σχέσης

$$f(z)=\sum_{n=1}^{N}A_n u_n(z,\lambda_n)+\int_S b(\lambda)u(z,\lambda)d\lambda$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$u(z):[0,\infty)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{du}{dz}(z)\right)+\left(\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)}-\frac{\lambda}{\rho_0(z)}\right)u(z)=0$$

$$u^{(1)}(0)=0 \qquad p^{(1)}(\cdot,0)=0$$

$$u^{(1)}(h)=u^{(2)}(h) \qquad p^{(1)}(\cdot,h)=p^{(2)}(\cdot,h)$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}(h)=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial z}(h) \qquad \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}(\cdot,h)=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial z}(\cdot,h)$$

$$\lim_{z\to\infty}u^{(2)}(z)=0 \qquad \lim_{z\to\infty}p^{(2)}(\cdot,z)=0$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} A_n u_n(z) + \int_S b(\lambda) u(z,\lambda) d\lambda$$

$$p(r,z) = \sum_{n=1}^{N} A_n(r) u_n(z) + \cancel{\int_S b(r,\lambda) u(z,\lambda) d\lambda}$$

Σε μεγάλες αποστάσεις αγνοούμε το συνεχές φάσμα

$$p(r,z) \approx \sum_{n=1}^{N} A_n(r) u_n(z)$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

Υπολογισμός Ιδιοτιμών-Ιδιοσυναρτήσεων

$$p(r,z) \approx \sum_{n=1}^{N} A_n(r) u_n(z)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{du}{dz}(z)\right)+\left(\frac{k^2(z)}{\rho_0(z)}-\frac{\lambda}{\rho_0(z)}\right)u(z)=0$$

Λύνουμε την εξίσωση χωριστά για $0<z<h$ και για $z>h$

$$\frac{d^2u^{(*)}}{dz^2}+(k_*^2-\lambda)u^{(*)}=0 \qquad *=1,2$$

Δεν εμφανίζεται η πυκνότητα !

Και εφαρμόζουμε συνολικά όλες τις οριακές συνθήκες και τις συνθήκες στη διεπιφάνεια $z=h$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$\frac{d^2u^{(*)}}{dz^2}+(k_*^2-\lambda)u^{(*)}=0$$ ***=1,2**

$$u^{(1)}(z)=Ae^{i\gamma_1 z}+Be^{-i\gamma_1 z}$$ $$\gamma_1=\sqrt{k_1^2-\lambda}$$

$$u^{(2)}(z)=C_1e^{i\gamma_2(z-h)}+C_2e^{-i\gamma_2(z-h)}$$ $$\gamma_2=\sqrt{k_2^2-\lambda}$$

$$k_1=\frac{\omega}{c_1} \qquad k_2=\frac{\omega}{c_2}$$

$$\lim_{z\to\infty}u^{(2)}(z)=0 \qquad C_2=0 \qquad \gamma_2=ib_2 \quad b_2\in\Re^+$$

$$u^{(2)}(z)=C_1e^{-b_2(z-h)} \qquad {k_2}^2<\lambda$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$u^{(1)}(0)=0$$

$$u^{(1)}(z)=Ae^{i\gamma_1 z}+Be^{-i\gamma_1 z} \qquad u^{(1)}(0)=A+B=0 \Rightarrow B=-A$$

$$u^{(1)}(z)=Ae^{i\gamma_1 z}-Ae^{-i\gamma_1 z}=A\left(e^{i\gamma_1 z}-e^{-i\gamma_1 z}\right)$$

$$u^{(1)}(h)=u^{(2)}(h)$$

$$u^{(2)}(z)=C_1 e^{-b_2(z-h)} \qquad A\left(e^{i\gamma_1 h}-e^{-i\gamma_1 h}\right)=C_1 e^{-b_2(h-h)}=C_1$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{du^{(1)}}{dz}(h)=\frac{1}{\rho_2}\frac{du^{(2)}}{dz}(h)$$

$$\frac{1}{\rho_1}\gamma_1 i A[e^{i\gamma_1 h}+e^{-i\gamma_1 h}]=-\frac{1}{\rho_2}b_2 C_1$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$A\left(e^{i\gamma_1 h} - e^{-i\gamma_1 h}\right) = C_1$$

$$\frac{1}{\rho_1}\gamma_1 i A[e^{i\gamma_1 h} + e^{-i\gamma_1 h}] = -\frac{1}{\rho_2} b_2 C_1$$

$$\left.\begin{aligned} e^{i\gamma_1 h} &= \cos\gamma_1 h + i\sin\gamma_1 h \\ e^{-i\gamma_1 h} &= \cos\gamma_1 h - i\sin\gamma_1 h \end{aligned}\right\}$$

$$2i\sin\gamma_1 h \cdot A - C_1 = 0$$

$$2i\gamma_1 \cos\gamma_1 h \cdot A + b_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} C_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2i\sin\gamma_1 h & -1 \\ 2i\gamma_1\cos\gamma_1 h & b_2 \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

Για μη μηδενική λύση

$$b_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} 2i \sin \gamma_1 h + 2i\gamma_1 \cos \gamma_1 h = 0$$

$$\boxed{\tan \gamma_1 h = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\gamma_1}{b_2}}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση κυματοδηγού Pekeris

$$u_n(z), \quad \gamma_n \to \lambda_n$$

$$k_1{}^2 = \gamma_{1n}{}^2 + \lambda_n \qquad\qquad k_2{}^2 = \lambda_n - b_{2n}{}^2$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$\tan\gamma_1 h = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\gamma_1}{b_2}$$

$$k_1^{\,2} = \gamma_{1n}^{\;\;2} + \lambda_n \qquad k_2^{\,2} = \lambda_n - b_{2n}^{\;\;2} \qquad b_{2n} = \sqrt{\lambda_n - k_2^2}$$

$$\lambda_n = k_1^{\,2} - \gamma_{1n}^{\;\;2} \qquad b_{2n} = \sqrt{k_1^{\,2} - \gamma_{1n}^{\;\;2} - k_2^2} = \sqrt{\omega^2\left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}\right) - \gamma_{1n}^2}$$

$$y_n = \gamma_{1n} h \qquad b = \frac{\rho_2}{\rho_1} \qquad a = \omega h\sqrt{\frac{1}{c_1^{\,2}} - \frac{1}{c_2^{\,2}}}$$

$$\boxed{\tan y_n = -\frac{b y_n}{\sqrt{a^2 - y_n^{\,2}}}}$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$\tan\gamma_1 h = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\gamma_1}{b_2}$$

$$k_1^{\;2} = \gamma_{1n}^{\;\;2} + \lambda_n \qquad\qquad k_2^{\;2} = \lambda_n - b_{2n}^{\;\;2}$$

$$\gamma_{2n} = \sqrt{k_2^2 - \lambda_n} \qquad \gamma_{2n} = ib_{2n} \quad b_{2n} \in \Re^+ \rightarrow \boxed{k_2^{\;2} < \lambda_n}$$

1ος περιορισμός

$$\gamma_{1n} = \sqrt{k_1^2 - \lambda_n}$$

Κυματικό φαινόμενο στο νερό → $\boxed{k_1^{\;2} > \lambda_n}$

2ος περιορισμός

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$\tan\gamma_1 h = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\gamma_1}{b_2}$$

Περιορισμός ιδιοτιμών για διάδοση κύματος στο νερό και απόσβεση σε μεγάλο βάθος

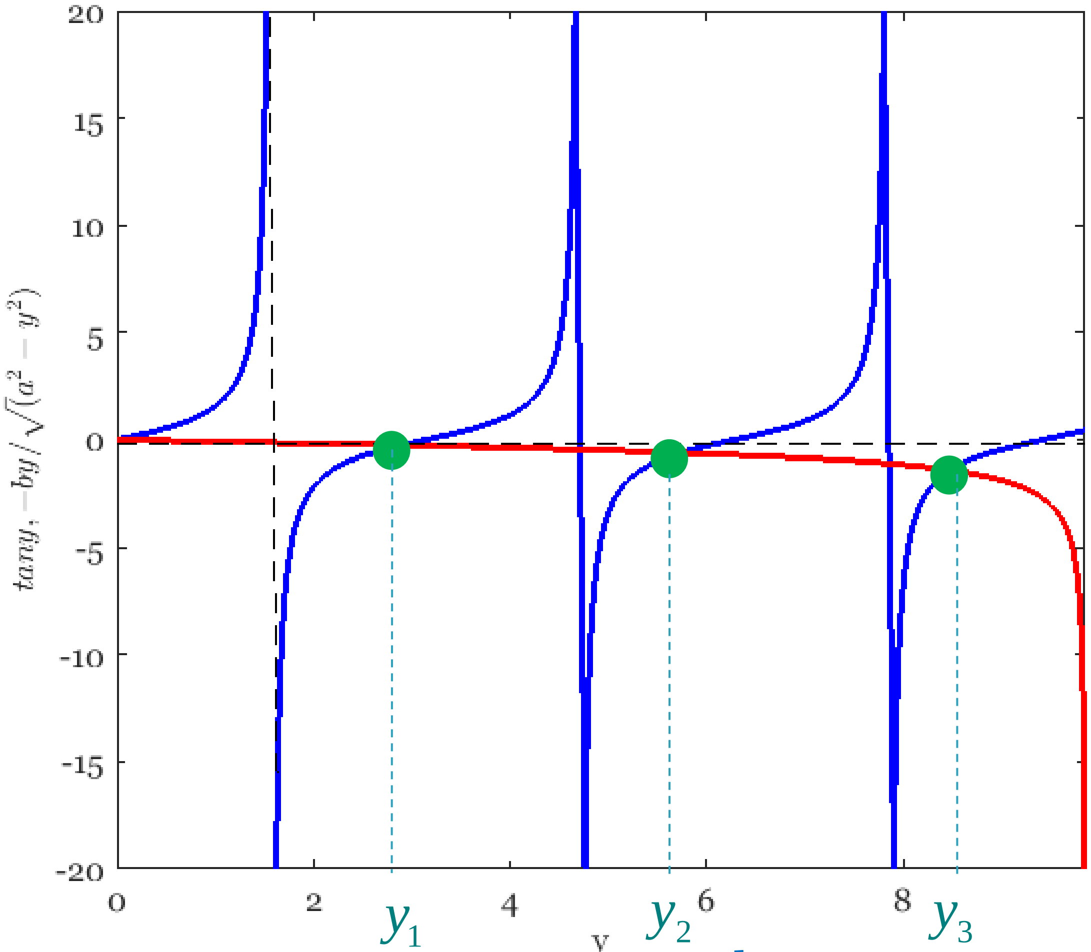
$$k_1^{\ 2} > \lambda_n > k_2^{\ 2}$$

$$\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 > \lambda_n > \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2$$

Αναγκαία συνθήκη

$$c_2 > c_1$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



Blue : tan$y$

Red: $-\dfrac{by}{\sqrt{a^2-y^2}}$

f= 50 Hz
h=100 m
c_1 =1500 m/sec
c_2=1700 m/sec
ρ_1=1000 kg/m³
ρ_2 =1200 kg/m³

$y_1 = 2.8003$

$y_2 = 5.5926$

$y_3 = 8.3377$

$\lambda_1 = 0.04308075093$

$\lambda_2 = 0.04073719364$

$\lambda_3 = 0.03691317606$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$u_n^{(1)}(z) = 2Ai\sin\gamma_{1n}z = A'\sin\sqrt{k_1{}^2 - \lambda_n}\,z$$

$$u_n^{(2)}(z) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda_n - k_2{}^2}\,(z-h)}$$

Συνθήκη συνέχειας στη διεπιφάνεια $\quad u_n{}^{(1)}(h) = u_n{}^{(2)}(h)$

$$A'\sin\sqrt{k_1{}^2 - \lambda_n}\,h = C_1$$

$$u_n^{(1)}(z) = A'\sin\left(\sqrt{k_1{}^2 - \lambda_n}\,z\right)$$

$$u_n^{(2)}(z) = A'\sin\left(\sqrt{k_1{}^2 - \lambda_n}\,h\right)e^{-\sqrt{\lambda_n - k_2{}^2}\,(z-h)}$$

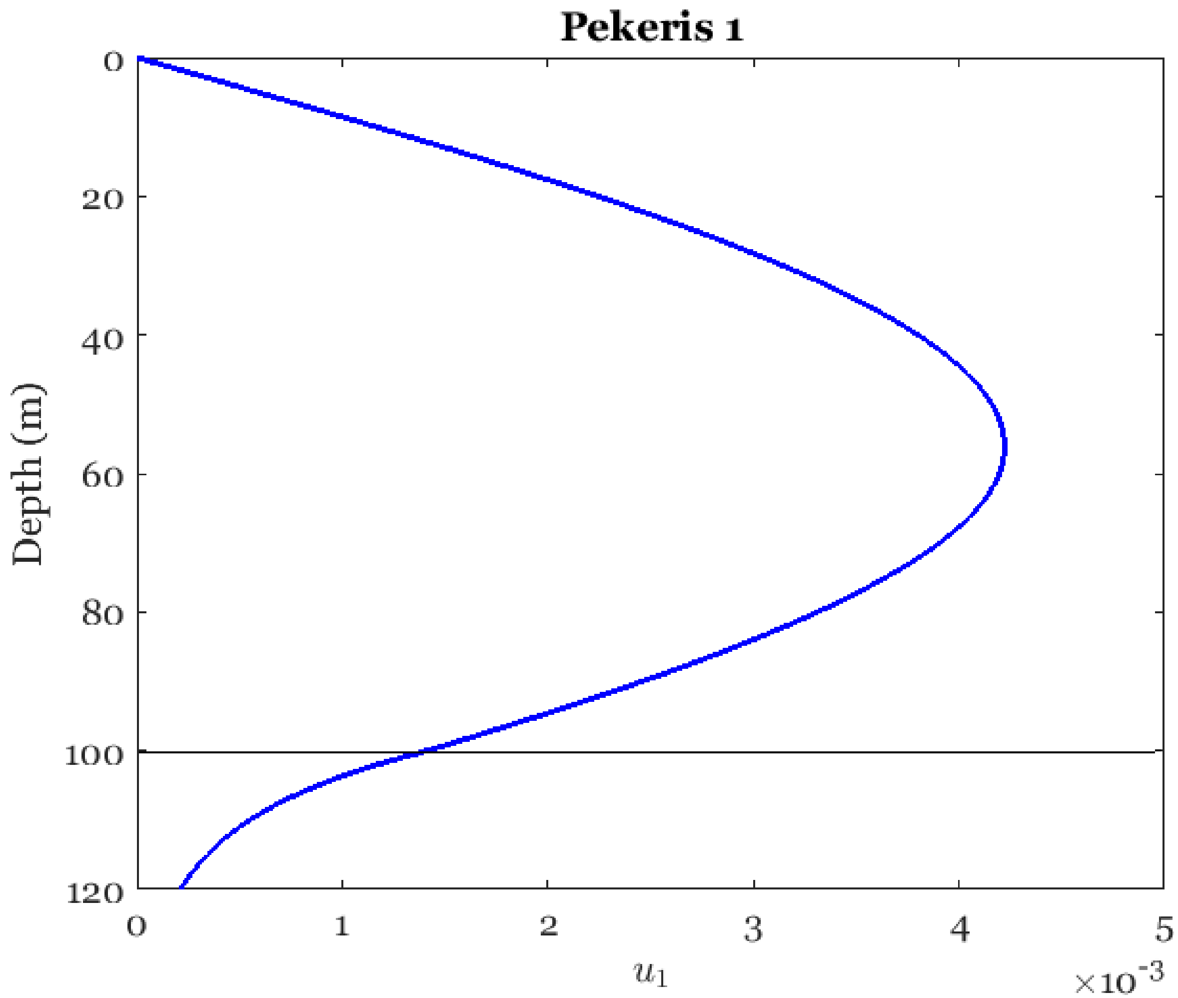
Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

Οι ιδιοσυναρτήσεις μπορεί να κανονικοποιηθούν

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho_0(z)}(u_n(z))^2 dz = \int_0^{h} \frac{1}{\rho_1}(u_n^{(1)}(z)^2 dz + \int_h^{\infty} \frac{1}{\rho_2}(u_n^{(2)}(z))^2 dz = 1$$

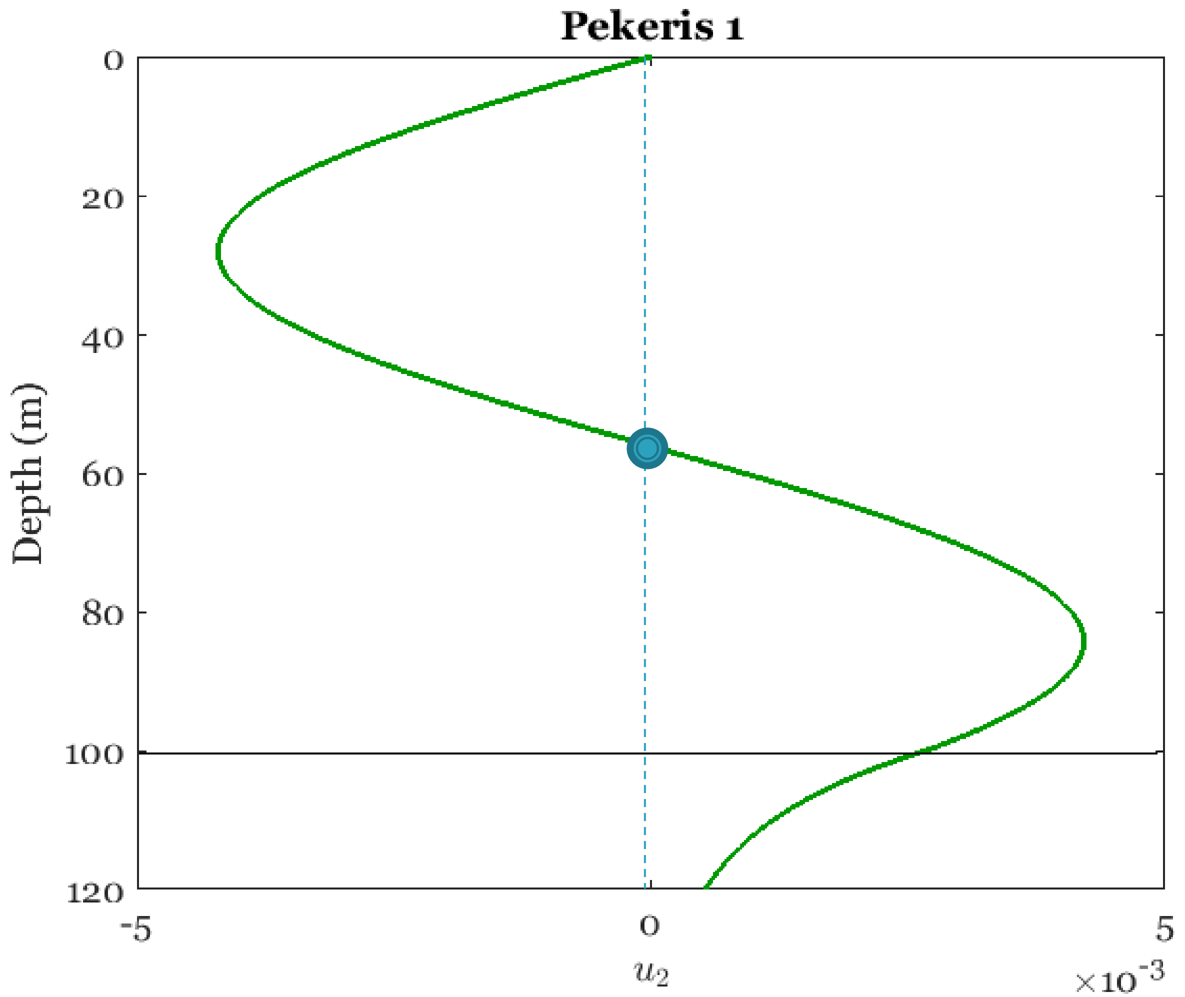
Από την κανονικοποίηση θα προκύψει η σταθερά A'

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



$1^{ης}$ τάξης
Μη
κανονικοποιημένες

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



$2^{ης}$ τάξης
Μη
κανονικοποιημένες

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

Υπολογισμός της πίεσης

$$p(r,z)=\sum_{n=1}^{N}A_n(r)u_n(z)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{\partial p}{\partial z}+k^2 p=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0)$$

Αντικατάσταση της αναπαράστασης στην κυματική εξίσωση

$$\sum_{n=1}^{N}u_n\frac{d^2A_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{N}u_n\frac{dA_n}{dr}+\sum_{n=1}^{N}A_n\frac{d^2p}{dz^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\sum_{n=1}^{N}A_n\frac{du_n}{dz}+k^2\sum_{n=1}^{N}u_nA_n=$$

$$-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0).$$

$\times(1/\rho_0)u_m$ και $\int_0^{\infty}dz$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho_0} u_m \sum_{n=1}^{N} u_n \frac{d^2 A_n}{dr^2} dz + \int_0^\infty \frac{1}{\rho_0} u_m \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{N} u_n \frac{dA_n}{dr} dz + \int_0^\infty \frac{1}{\rho_0} u_m \sum_{n=1}^{N} A_n \frac{d^2 u_n}{dz^2} dz -$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho_0} u_m \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{\partial z} \sum_{n=1}^{N} A_n \frac{du_n}{dz} dz + \int_0^\infty \frac{1}{\rho_0} u_m k^2 \sum_{n=1}^{N} u_n A_n dz = -\frac{1}{2\pi r} \int_0^\infty \frac{1}{\rho_0} u_m \delta(r)\delta(z - z_0) dz \quad .$$

$$\frac{d^2}{dr^2} A_m + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} A_m + \lambda_m A_m = -\frac{1}{2\pi r} \frac{1}{\rho_0(z_0)} \delta(r) u_m(z_0)$$

$\rho_0(z_0) = \rho_1$ $\qquad$ $u_m(z_0) = u_m^{(1)}(z_0)$ $\qquad$ Για πηγή στο νερό

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m\right] + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m\right] + \lambda_m \left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m\right] = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)}A_m\right]+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)}A_m\right]+\lambda_m\left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)}A_m\right]=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

Εξίσωση για τη συνάρτηση Green $\qquad G(r)=\left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)}A_m\right]$

Η εξίσωση και οι συνθήκες είναι ακριβώς αυτές που μελετήσαμε στον απλό κυματοδηγό !

$$\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)}A_m=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m}r)$$

$$A_m=\frac{i}{4\rho_1}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m}r)u_m^{(1)}(z_0)$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$p(r,z) = \frac{i}{4\rho_1}\sum_{n=1}^{N} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n}\, r)\, u_n^{(1)}(z_0)\, u_n(z)$$

Για μεγάλες αποστάσεις *r*

$$p(r,z) = \frac{i}{4\rho_1}\sum_{n=1}^{N} u_n^{(1)}(z_0)\, u_n(z)\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}\, r}}\, e^{i(\sqrt{\lambda_\nu}\, r-\pi/4)}$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

$$p(r,z)=\frac{i}{4}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z_0)u_n(z)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n}r)$$ Απλός κυματοδηγός

$$p(r,z)=\frac{i}{2h}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{k^2-\lambda_n}z_0\right)\sin\left(\sqrt{k^2-\lambda_n}z\right)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n}r)$$

$$p(r,z)=\frac{i}{4\rho_1}\sum_{n=1}^{N}u_n^{(1)}(z_0)u_n^{(*)}(z)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n}r),\quad *=1,2$$ Pekeris

$$u_n^{(1)}(z)=A'\left(\sin\sqrt{k_1^{\,2}-\lambda_n}z\right)\qquad u_n^{(2)}(z)=A'\sin\left(\sqrt{k_1^{\,2}-\lambda_n}h\right)e^{-\sqrt{\lambda_n-k_2^{\,2}}(z-h)}$$

Πηγή στο νερό A’από κανονικοποίηση