Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Κυματική Διάδοση

9η διάλεξη

2023-2024

Μιχάλης Ταρουδάκης

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

Επίπεδα κύματα :

Κύματα των οποίων η επιφάνεια σταθερής φάσης είναι επίπεδο.

Το επίπεδο αυτό είναι κάθετο στον αριθμό κύματος όταν αυτός περιγράφεται ως διανυσματικό μέγεθος.

Η ακουστική ακτίνα είναι η καμπύλη σε κάθε σημείο της οποίας ο αριθμός κύματος είναι εφαπτόμενο διάνυσμα.

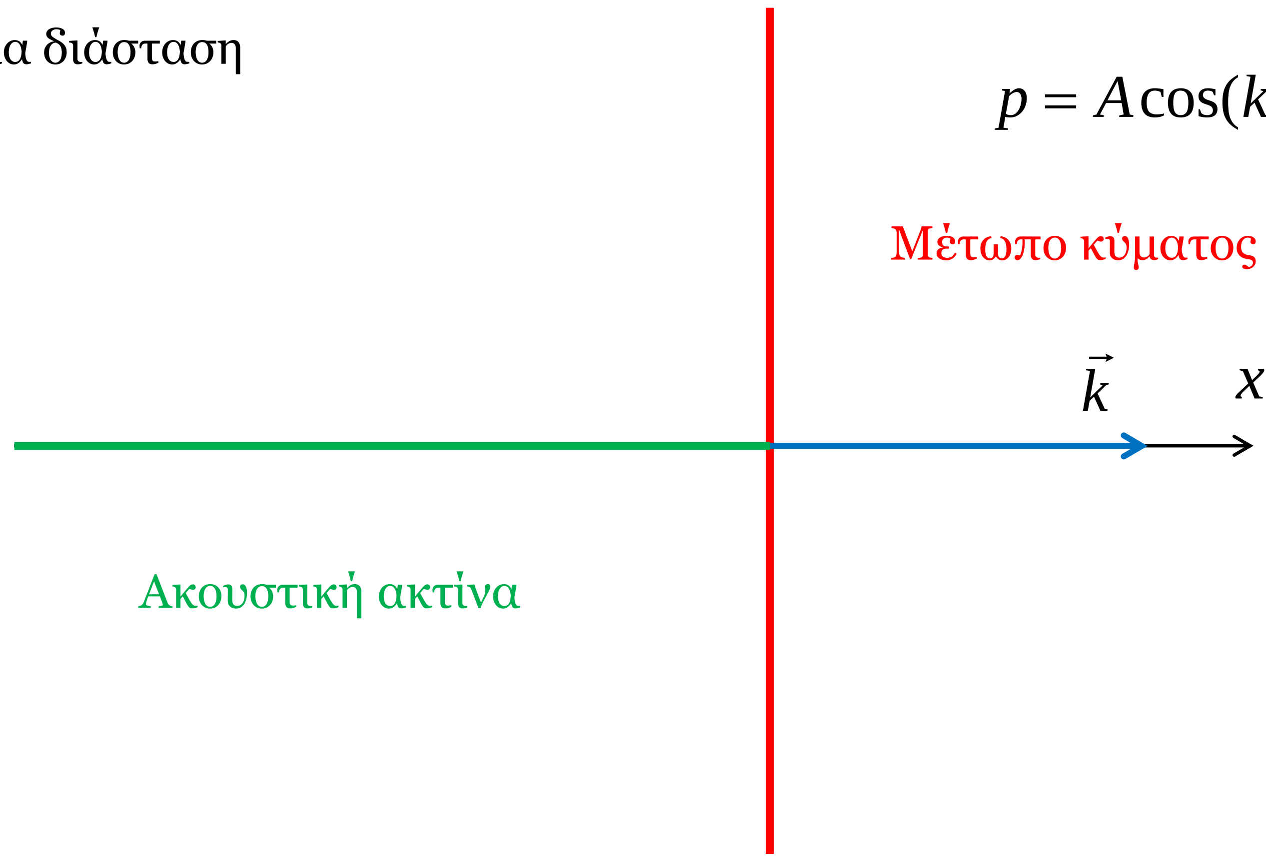
Επομένως, το μέτωπο κύματος είναι κάθετο στην ακουστική ακτίνα.

Για σταθερό αριθμό κύματος (σταθερή ταχύτητα διάδοσης) οι ακτίνες είναι ευθείες.

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

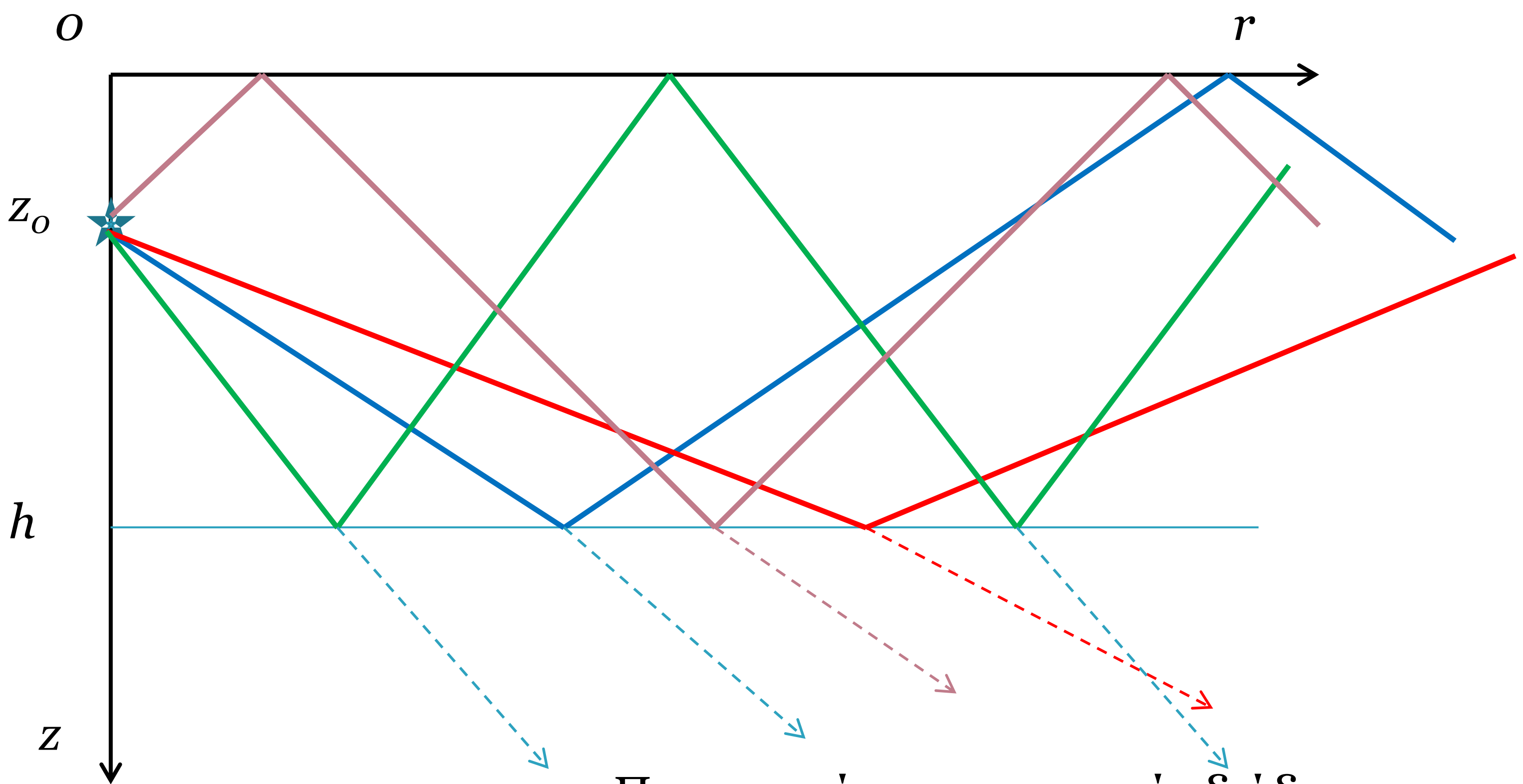
Σε μία διάσταση

$$p = A\cos(kx - \omega t)$$



Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

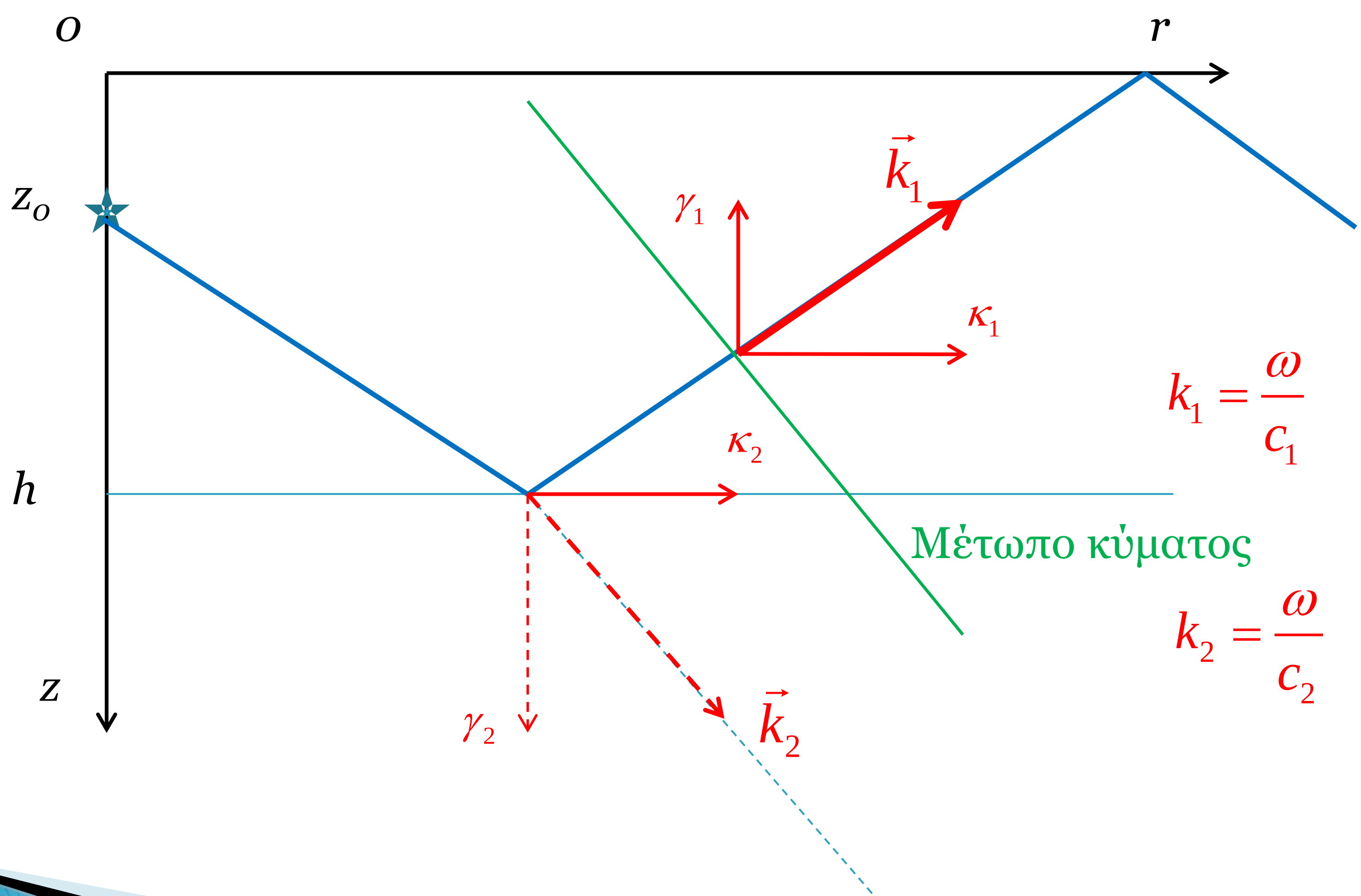
Μία σημειακή πηγή εκπέμπει προς όλες τις κατευθύνσεις



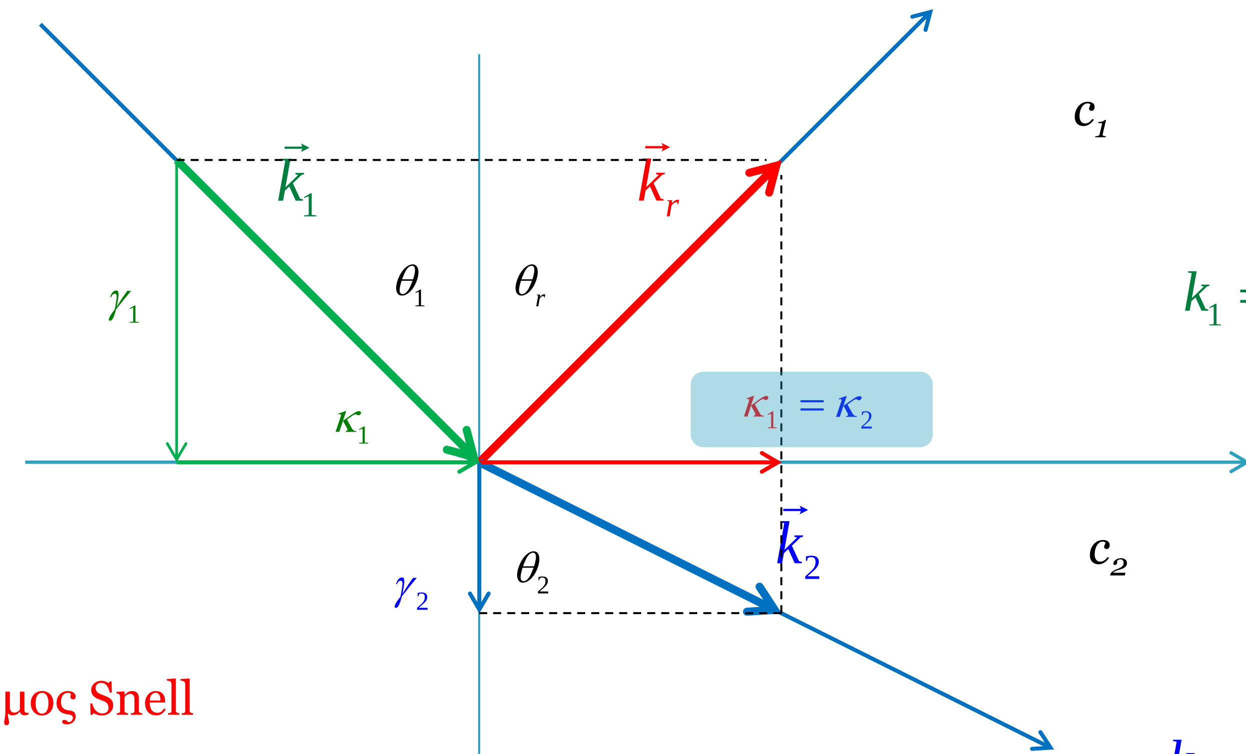
Περιγραφή της ακουστικής διάδοσης με χρήση της έννοιας των ακουστικών ακτίνων

Διάγραμμα ακτίνων (ray diagram)

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} = k_r$$

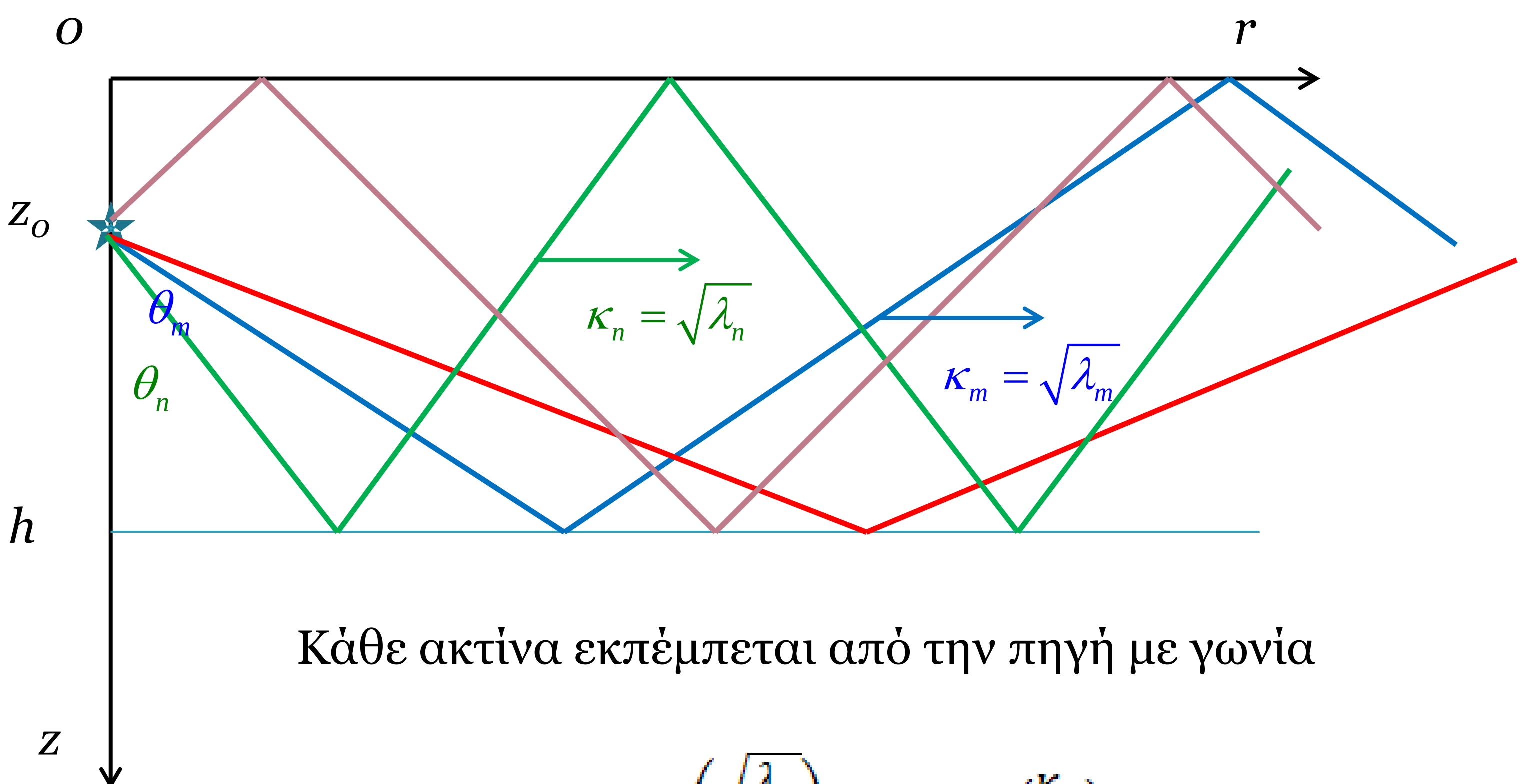
$$k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

Νόμος Snell

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \Longrightarrow \theta_1 = \theta_r$$

$$\kappa_1 = \sqrt{\lambda}$$

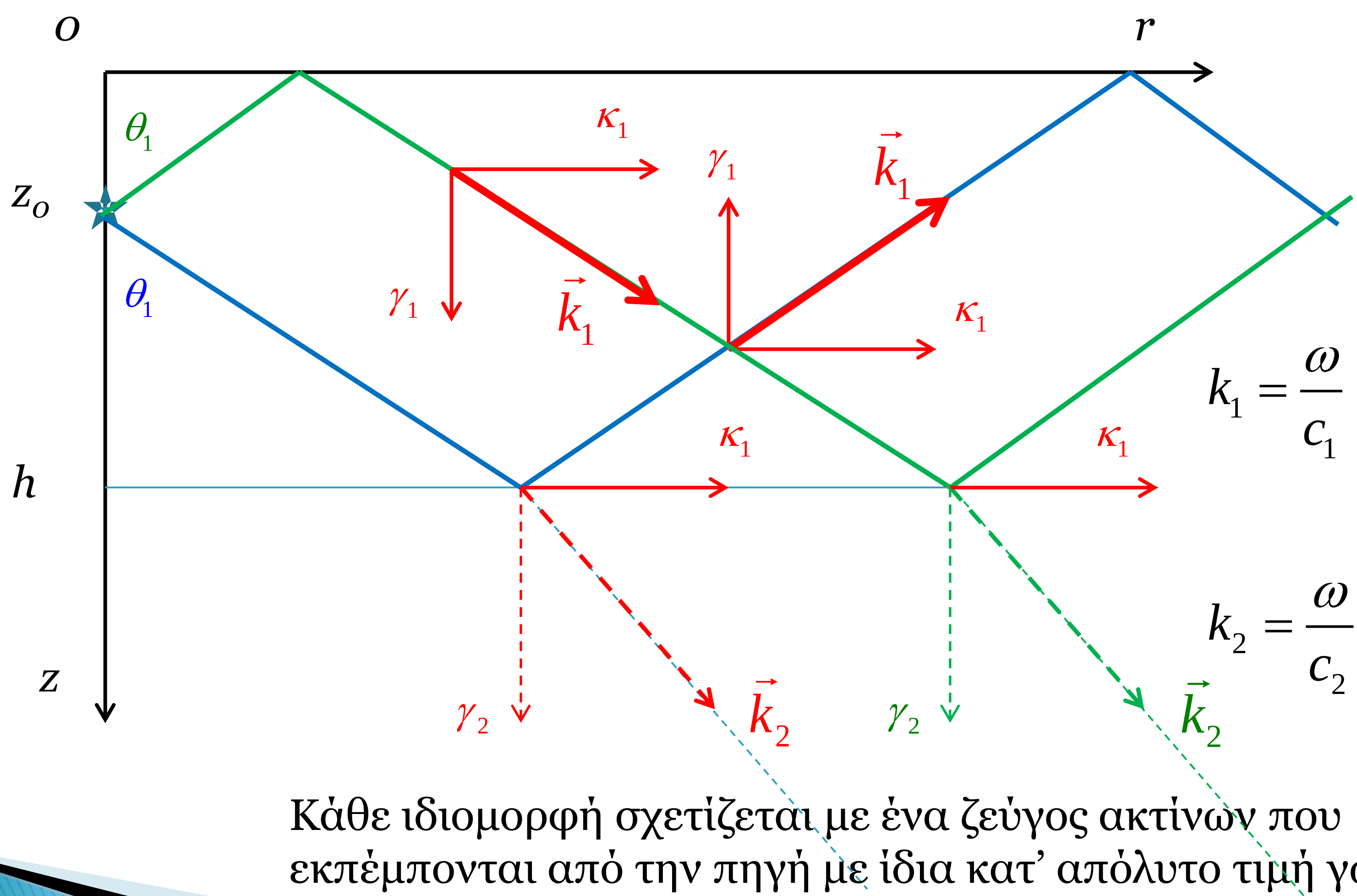
Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



Κάθε ακτίνα εκπέμπεται από την πηγή με γωνία

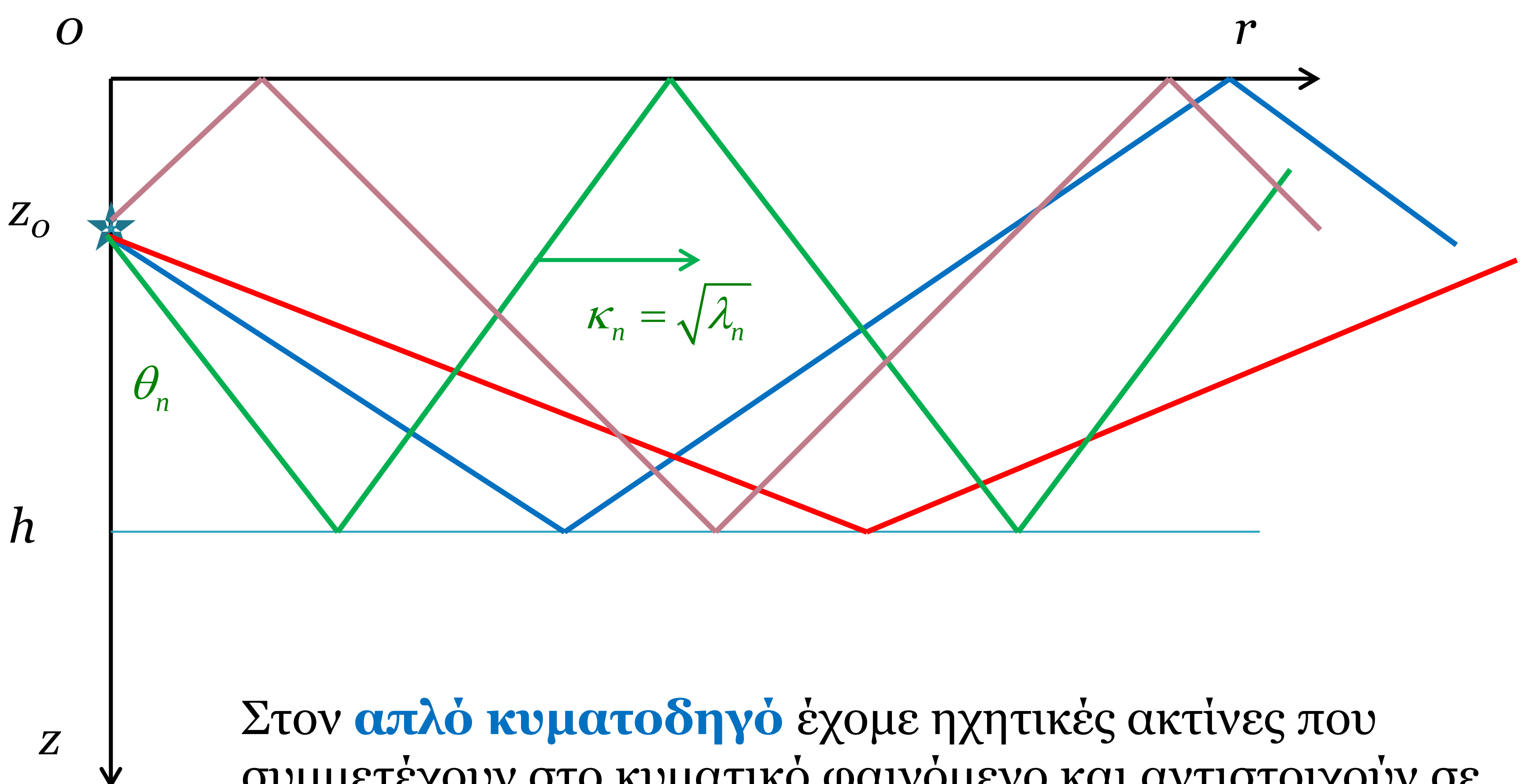
$$\theta_n = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{k}\right) = sin^{-1}\left(\frac{\kappa_n}{k}\right)$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



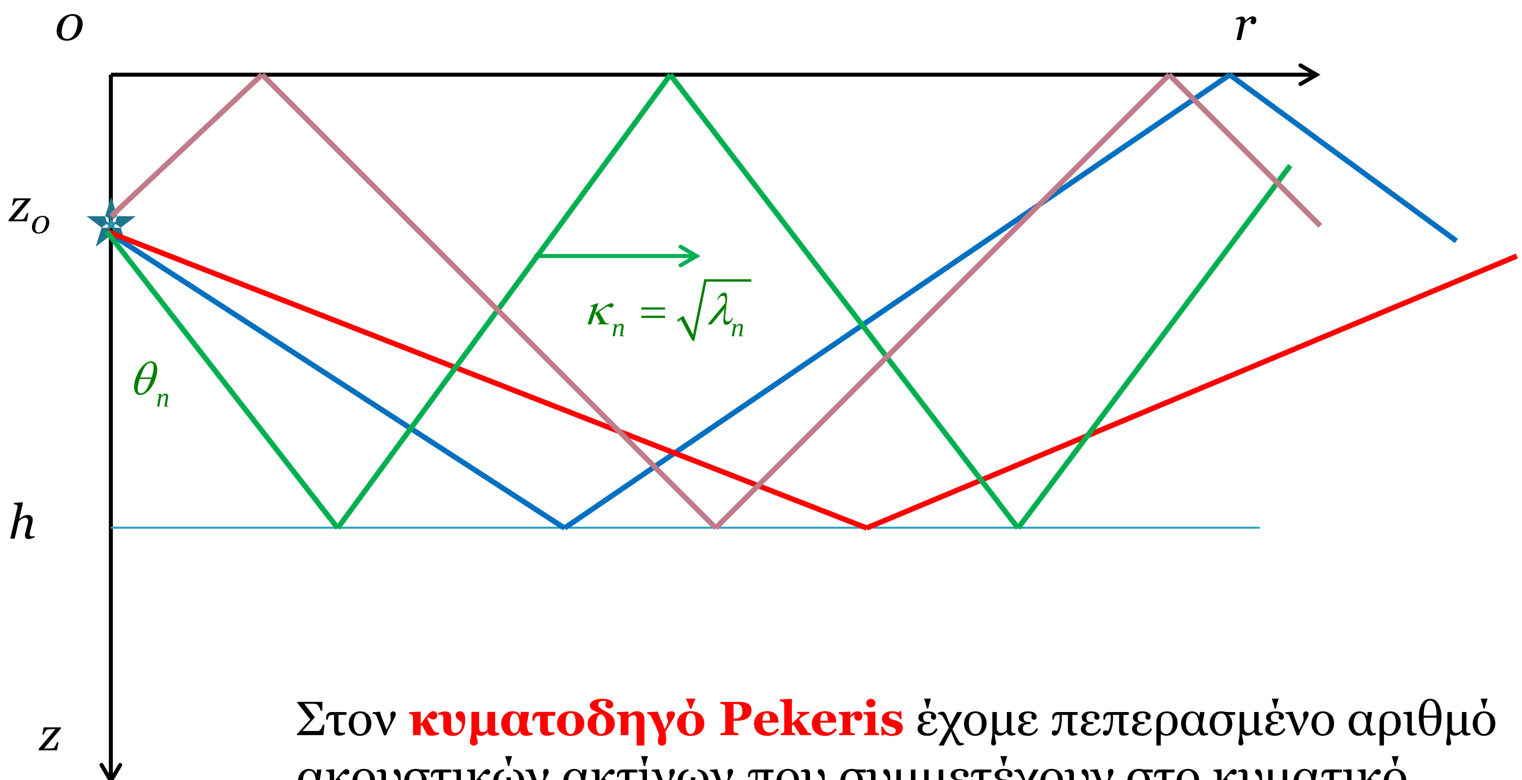
Κάθε ιδιομορφή σχετίζεται με ένα ζεύγος ακτίνων που εκπέμπονται από την πηγή με ίδια κατ' απόλυτο τιμή γωνία

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



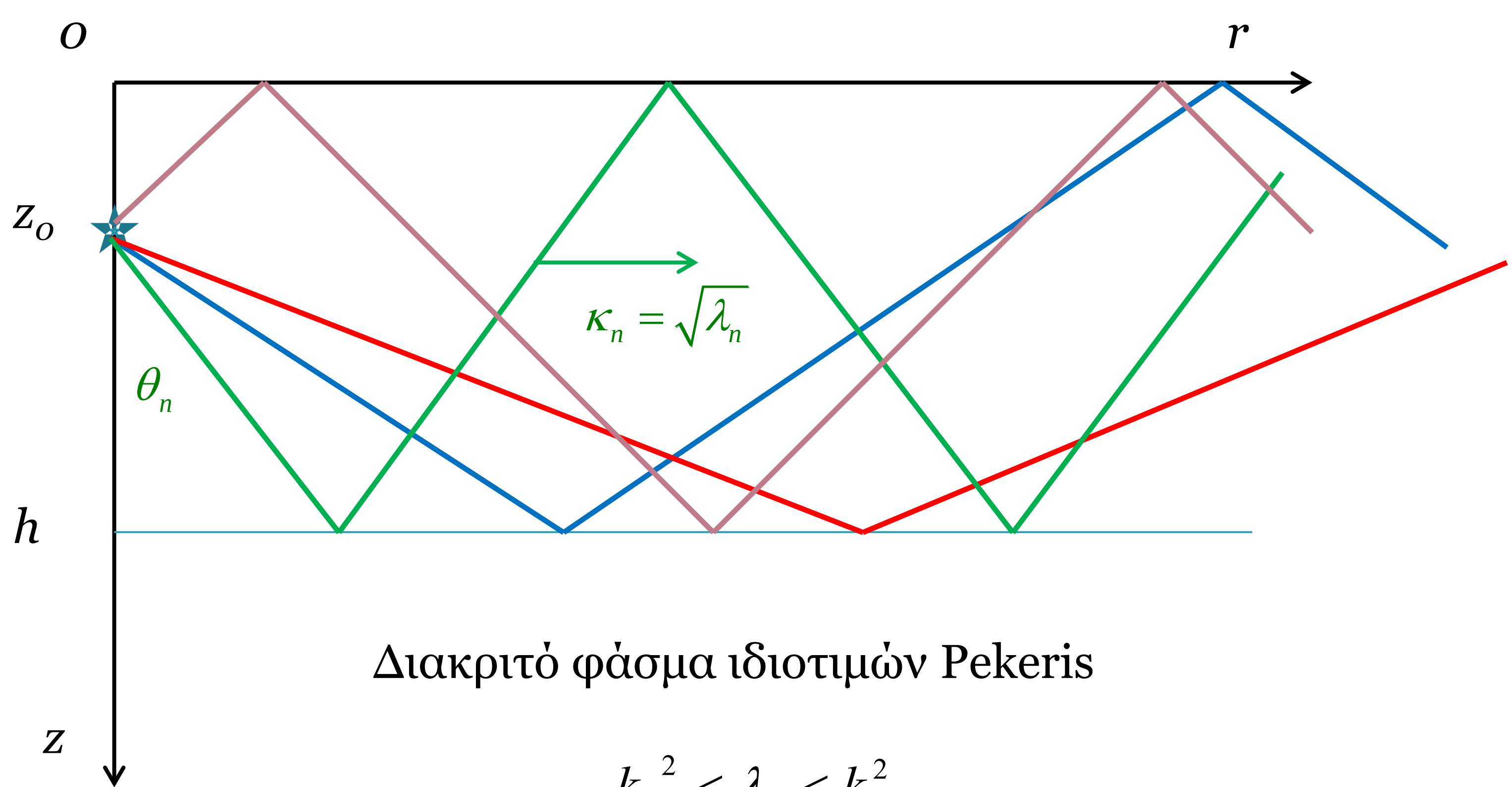
Στον **απλό κυματοδηγό** έχομε ηχητικές ακτίνες που συμμετέχουν στο κυματικό φαινόμενο και αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές για τις οποίες $\lambda_n > 0$. Οι ακτίνες αυτές ονομάζονται «ιδιοακτίνες» (eigenrays).

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



Στον **κυματοδηγό Pekeris** έχομε πεπερασμένο αριθμό ακουστικών ακτίνων που συμμετέχουν στο κυματικό φαινόμενο (ιδιοακτίνες) και αντιστοιχούν στο πεπερασμένο διακριτό φάσμα των ιδιοτιμών λ_n .

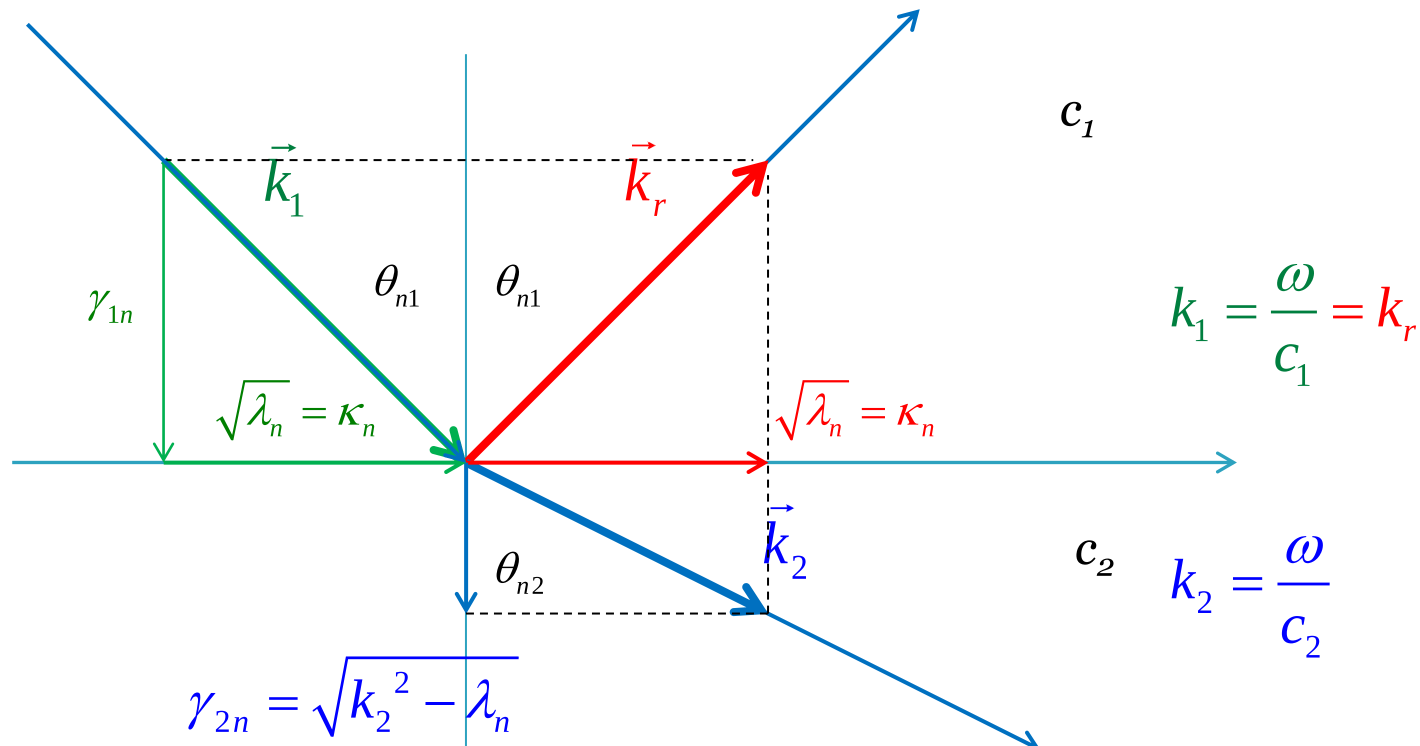
Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



Διακριτό φάσμα ιδιοτιμών Pekeris

$$k_2{}^2 < \lambda_n < k_1^2$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

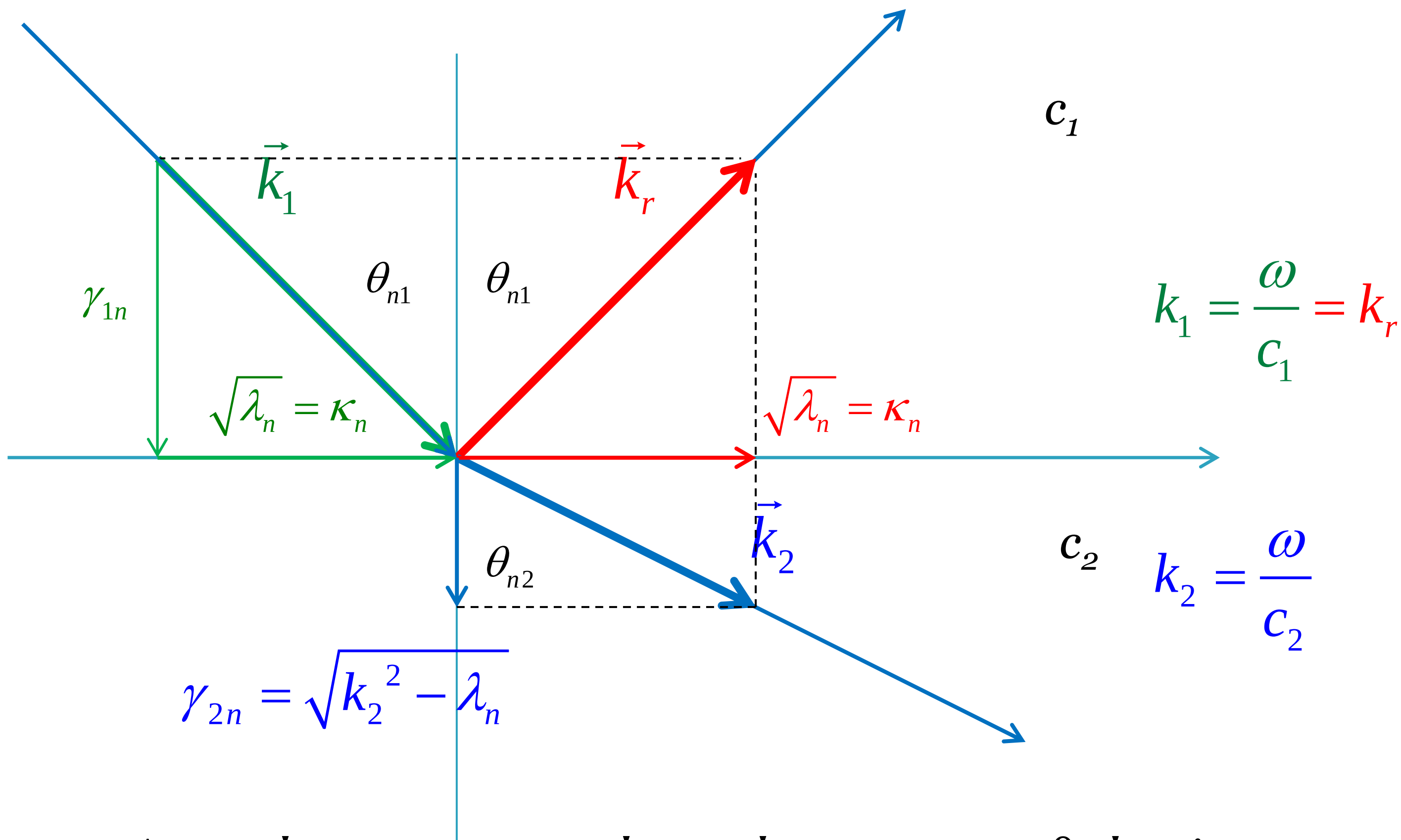


$$\theta_{n1} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{k_1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\kappa_n}{k_1}\right) \qquad \theta_{n2} = \sin^{-1}\left(\frac{\kappa_n}{k_2}\right)$$

Περιορισμός $\quad k_2{}^2 < \lambda_n < k_1^2$

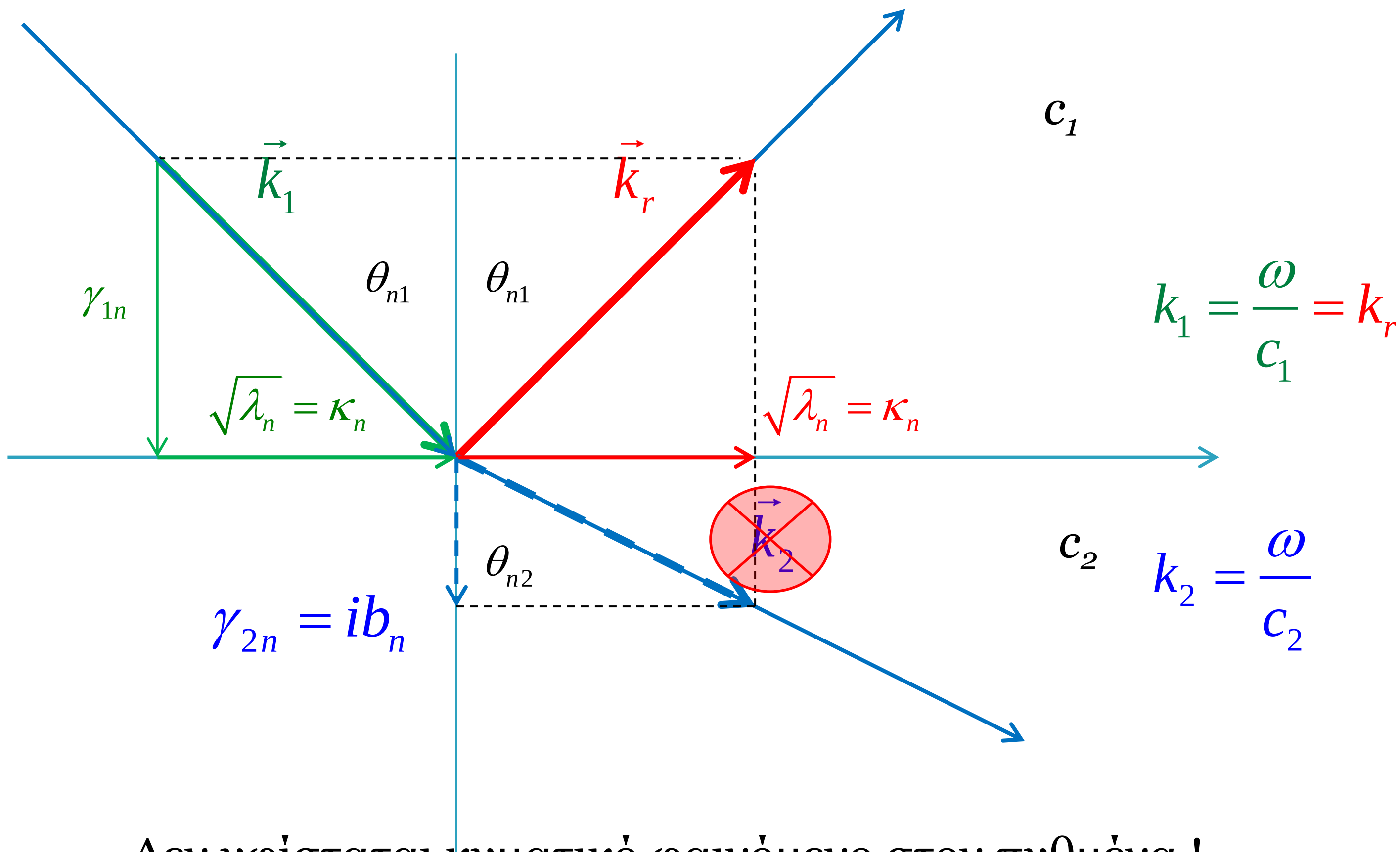
Συνεπώς $\quad \sqrt{\lambda_n} = \kappa_n > k_2 \Longrightarrow$ θ_{n2} φανταστική γωνία !

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



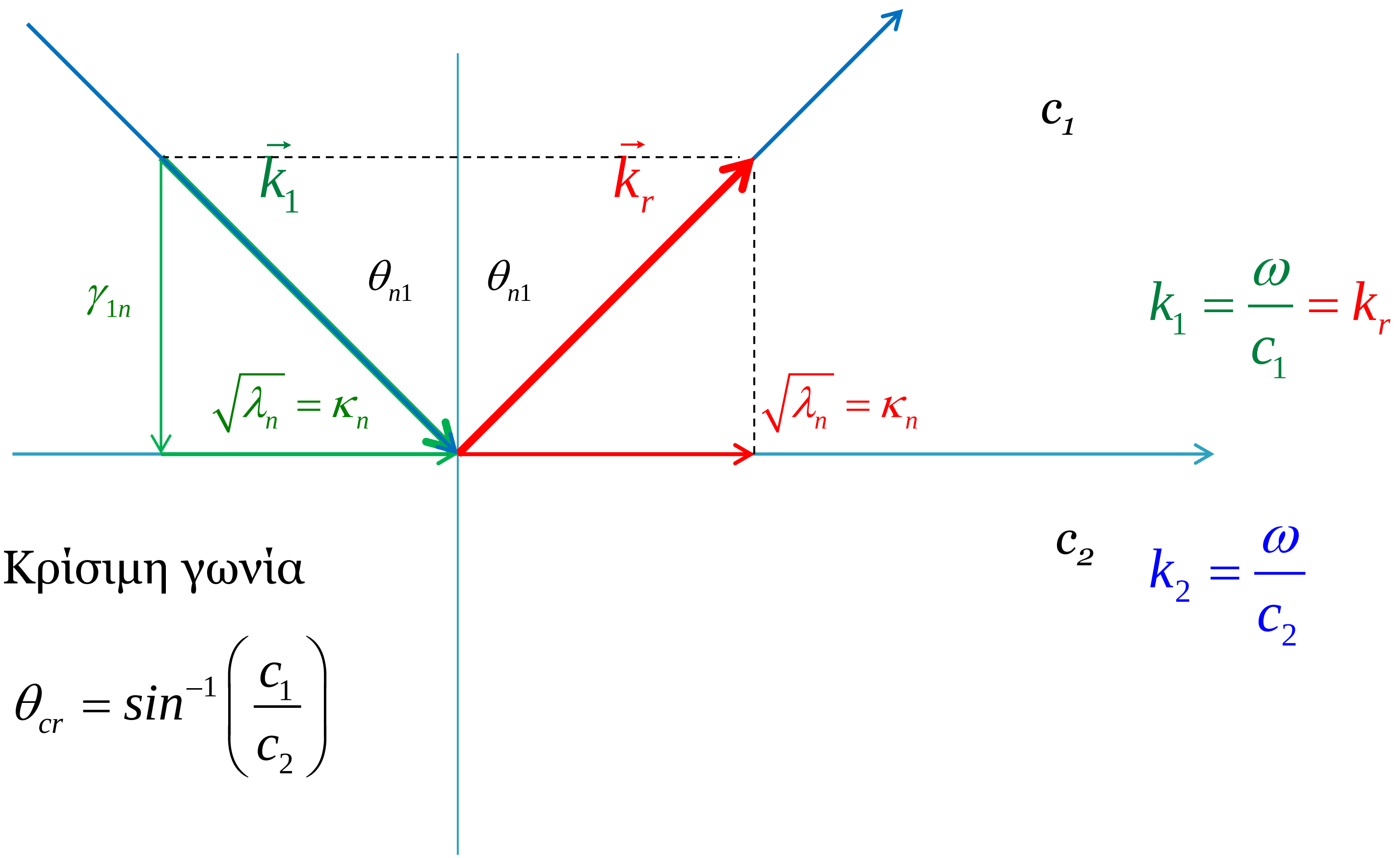
Δεν υφίσταται κυματικό φαινόμενο στον πυθμένα !

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



Δεν υφίσταται κυματικό φαινόμενο στον πυθμένα !

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris

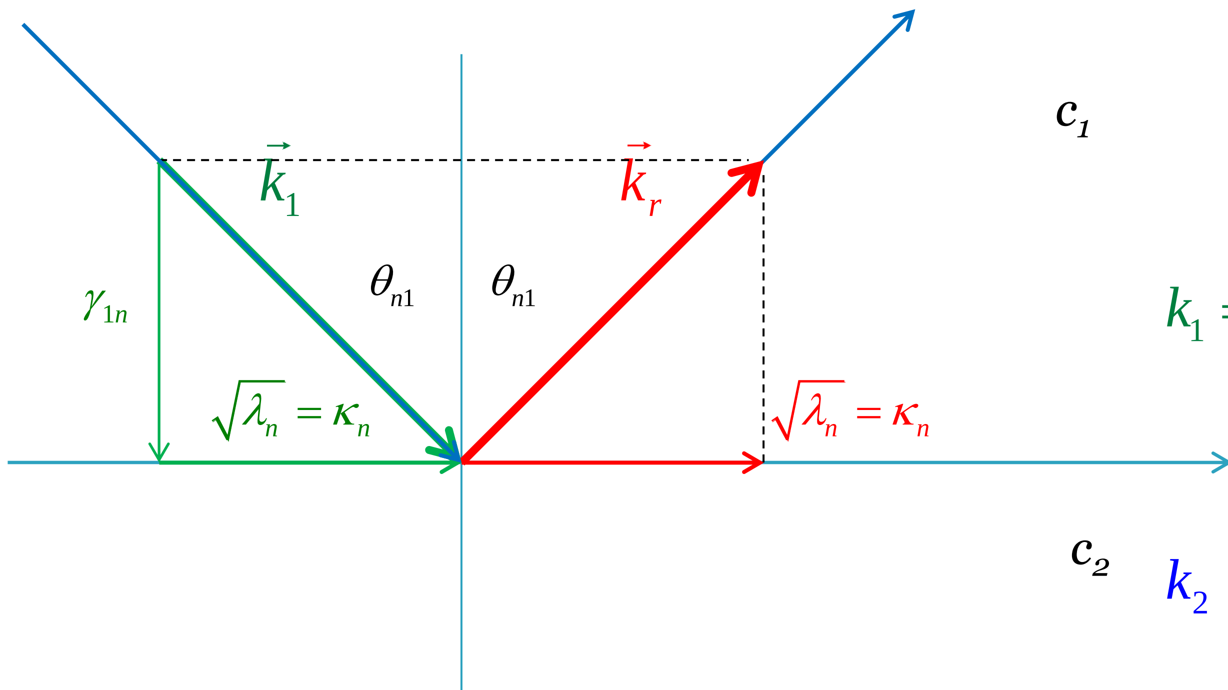


Κρίσιμη γωνία

$$\theta_{cr} = sin^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

Για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες της κρίσιμης γωνίας, η ακουστική ενέργεια που μεταφέρεται στην ακτίνα ανακλάται εξ' ολοκλήρου (**ολική ανάκλαση**)

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



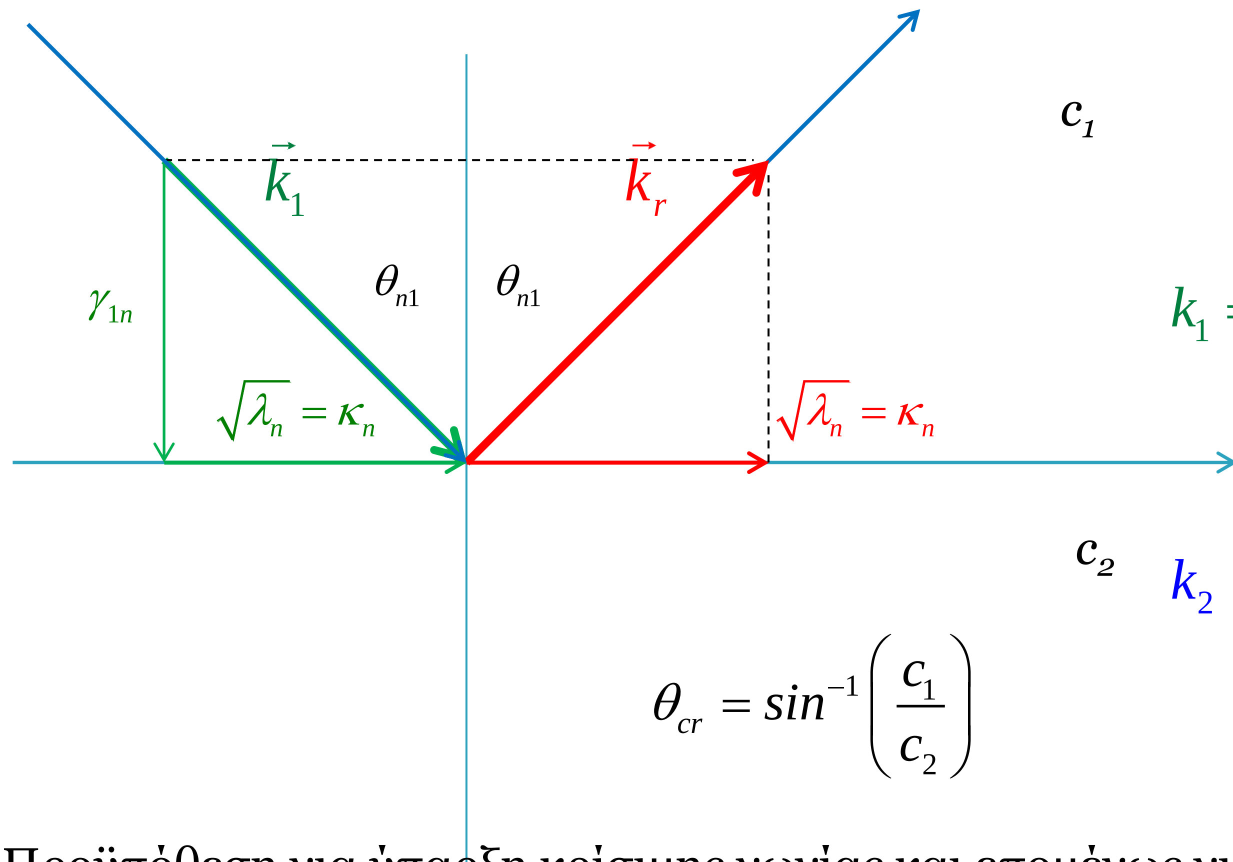
$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} = k_r$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

Οι ιδιοτιμές του κυματοδηγού Pekeris που αντιστοιχούν σε ιδιοσυναρτήσεις που συμμετέχουν στο ηχητικό πεδίο στο νερό σε μεγάλες αποστάσεις σχετίζονται με ακτίνες που υφίστανται ολική ανάκλαση στον πυθμένα !

$$\theta_n = \theta_{n1} > \theta_{cr} \qquad \sqrt{\lambda_n} = \kappa_n > k_2$$

Π2 Ο Κυματοδηγός Pekeris



$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} = k_r$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

$$\theta_{cr} = sin^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

Προϋπόθεση για ύπαρξη κρίσιμης γωνίας και επομένως για την ύπαρξη κυματικού φαινομένου στο νερό σε μεγάλες αποστάσεις :

$$c_2 > c_1$$

Π2 Ιδιότητες των ιδιομορφών στον κυματοδηγό Pekeris

Χαρακτηριστική εξίσωση $$\tan\gamma_{1n}h = -\frac{i\rho_2}{\rho_1}\frac{\gamma_{1n}}{\gamma_{2n}},$$

$$\gamma_{2n} = \sqrt{k_2{}^2 - \lambda_n} \longrightarrow \gamma_{2n} = ib_n \qquad \tan\gamma_{1n}h = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\gamma_{1n}}{b_n},$$

Οριακή κατάσταση $\gamma_{2n} = 0$ $$\gamma_{0n}h = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$$

$$\kappa_n = \sqrt{\lambda_n} = k_2 \qquad \gamma_{0n}h = h\sqrt{k_1{}^2 - \kappa_n^2} = h\sqrt{k_1{}^2 - k_2{}^2} = \omega h\sqrt{\frac{1}{c_1{}^2} - \frac{1}{c_2{}^2}}\,.$$

$$\omega h\sqrt{\frac{1}{c_1{}^2} - \frac{1}{c_2{}^2}} = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi\,.$$

Π2 Ιδιότητες των ιδιομορφών στον κυματοδηγό Pekeris

Συχνότητα αποκοπής για κάθε τάξη n από τη σχέση

$$\omega_{con} h \sqrt{\frac{1}{c_1^{\,2}} - \frac{1}{c_2^{\,2}}} = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$$

$$\omega_{con} = 2\pi f_{con}$$

$$f_{con} = \frac{(n-0.5)c_1 c_2}{2h\sqrt{c_2^{\,2} - c_1^{\,2}}}, \quad n = 1, 2, \ldots. N_{\max}$$

Κάτω από τη συχνότητα αποκοπής για κάθε τάξη n δεν διαδίδεται η αντίστοιχη ιδιομορφή

n=1

$$\omega h \sqrt{\frac{1}{c_1^{\,2}} - \frac{1}{c_2^{\,2}}} = \frac{\pi}{2}$$

$$f_{co1} = \frac{1}{4h\sqrt{\frac{1}{c_1^{\,2}} - \frac{1}{c_2^{\,2}}}} = \frac{c_1 c_2}{4h\sqrt{c_2^{\,2} - c_1^{\,2}}}$$

Κάτω από τη συχνότητα f_{co1} δεν διαδίδεται ήχος σε μεγάλες αποστάσεις !!

Π2 Ιδιότητες των ιδιομορφών στον κυματοδηγό Pekeris

Συνοψίζουμε :

$$y = \gamma_1 h \qquad g(y) = \tan y = -\frac{by}{\sqrt{a^2 - y^2}} \qquad a = \omega h \sqrt{\frac{1}{c_1{}^2} - \frac{1}{c_2{}^2}}$$

Για να μην έχομε καμία κανονική ιδιομορφή στο πρόβλημά μας η συχνότητα δεν μπορεί να είναι παραπάνω από την f_{co1}

Στην περίπτωση αυτή η τιμή της συνάρτησης θα οδηγηθεί στο όριο-∞ όταν $y=a$

$$g(y) = -\frac{by}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Θα έχομε τότε

$$\omega h \sqrt{\frac{1}{c_1{}^2} - \frac{1}{c_2{}^2}} = \frac{\pi}{2}$$

Π2 Ιδιότητες των ιδιομορφών στον κυματοδηγό Pekeris

$$y = \gamma_1 h \qquad \tan y = -\frac{by}{\sqrt{a^2 - y^2}} \qquad a = \omega h \sqrt{\frac{1}{c_1^{\,2}} - \frac{1}{c_2^{\,2}}}$$

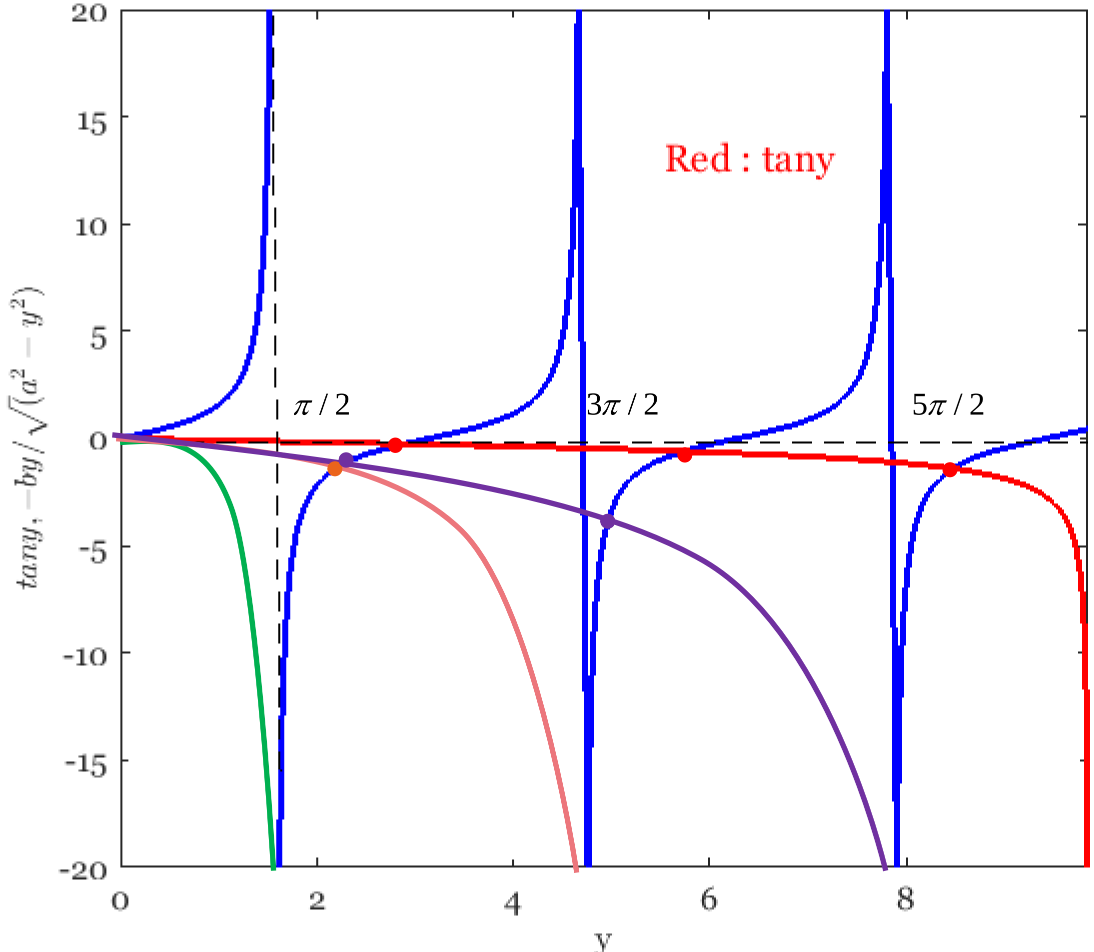
Για μεγαλύτερες συχνότητες θα έχομε μία ιδιομορφή μέχρι τη συχνότητα αποκοπής της δεύτερης ιδιομορφής που είναι

$$f_{co2} = \frac{(2-0.5)c_1 c_2}{2h\sqrt{c_2^{\,2} - c_1^{\,2}}} = \frac{3c_1 c_2}{4h\sqrt{c_2^{\,2} - c_1^{\,2}}}$$

Για την τρίτη ιδιομορφή :

$$f_{co3} = \frac{(2-0.5)c_1 c_2}{2h\sqrt{c_2^{\,2} - c_1^{\,2}}} = \frac{5c_1 c_2}{4h\sqrt{c_2^{\,2} - c_1^{\,2}}}$$

Π2 Ιδιότητες των ιδιομορφών στον κυματοδηγό Pekeris



f= 50 Hz
h=100 m
c_1 =1500 m/sec
c_2=1700 m/sec
ρ_1=1000 kg/m^3
ρ_2 =1200 kg/m^3

Καμπύλες όχι υπό κλίμακα

$$y_{0n} = \gamma_{0n} h = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$$

Π2 Ιδιότητες των ιδιομορφών στον κυματοδηγό Pekeris

Μέγιστος αριθμός ιδιομορφών :

Στη συχνότητα αποκοπής τάξης n: $$\omega_{con} h\sqrt{\frac{1}{{c_1}^2}-\frac{1}{{c_2}^2}}=\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi$$

Για τυχαία συχνότητα $\omega > \omega_{con}$ $$\omega h\sqrt{\frac{1}{{c_1}^2}-\frac{1}{{c_2}^2}}>\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi$$

$$n<\left(\frac{\omega h}{\pi}\sqrt{\frac{1}{{c_1}^2}-\frac{1}{{c_2}^2}}+\frac{1}{2}\right)$$

Π2 Ιδιότητες των ιδιομορφών στον κυματοδηγό Pekeris

Μέγιστος αριθμός ιδιομορφών :

$$n < \left(\frac{\omega h}{\pi} \sqrt{\frac{1}{c_1^{\;2}} - \frac{1}{c_2^{\;2}}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$N_{\max} = INT\left(\frac{\omega h}{\pi} \sqrt{\frac{1}{c_1^{\;2}} - \frac{1}{c_2^{\;2}}} + \frac{1}{2} \right) = INT\left(2\,f\,h\sqrt{\frac{1}{c_1^{\;2}} - \frac{1}{c_2^{\;2}}} + 0.5 \right)$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα :

$$N_{\max} = INT\left(2*50*100\sqrt{\frac{1}{1500^2} - \frac{1}{1700^2}} + 0.5 \right) = INT(3.637) = 3$$

Π2 Ιδιότητες των ιδιομορφών στον κυματοδηγό Pekeris

Ο αριθμός των διαδιδόμενων (κανονικών) ιδιομορφών εξαρτάται από το βάθος του κυματοδηγού και τη συχνότητα.

Μεγαλύτερο βάθος δίνει περισσότερες διαδιδόμενες ιδιομορφές.

Αντίστοιχα, μεγαλύτερη συχνότητα δίνει μεγαλύτερο αριθμό διαδιδόμενων ιδιομορφών.

Κάτω από ένα βάθος που εξαρτάται από τη συχνότητα ή αντίστροφα για σήματα μικρότερης συχνότητας από μία συχνότητα αποκοπής, δεν υπάρχει κυματικό φαινόμενο στο νερό.

Για πυθμένες με ταχύτητα διάδοσης ήχου μικρότερη από εκείνη του νερού, δεν υπάρχει κρίσιμη γωνία και επομένως δεν υπάρχει κυματικό φαινόμενο στο νερό.

Απώλεια διάδοσης

Transmission Loss TL

$$TL(r,z) = -20\log\frac{|p(r,z)|}{|p_0|} \quad (\mathrm{dB})$$

p_0 είναι η πίεση σε μία θέση αναφοράς

Κατά σύμβαση, ως πίεση αναφοράς ορίζεται η πίεση που θα είχε το ακουστικό πεδίο από την ίδια σημειακή αρμονική πηγή όταν αυτή εκπέμπει σε άπειρο χώρο σε απόσταση 1 m

Απώλεια διάδοσης

Μέση ένταση

$$< I > \approx \mathrm{Real}(\frac{1}{\rho c}\frac{1}{T}\int_0^T p(r,t)^2 dt)$$

Μέση τετραγωνική πίεση

$$\left|p\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T p(r,t)^2 dt$$

$$< I > \approx \frac{\left|p\right|^2}{\rho c}$$

Μείωση της έντασης καθώς το κύμα διαδίδεται στον κυματοδηγό

Απώλεια διάδοσης

$$I_1 = I(r_1, z_1) \qquad\qquad I_2 = I(r_2, z_2)$$

Απώλεια διάδοσης

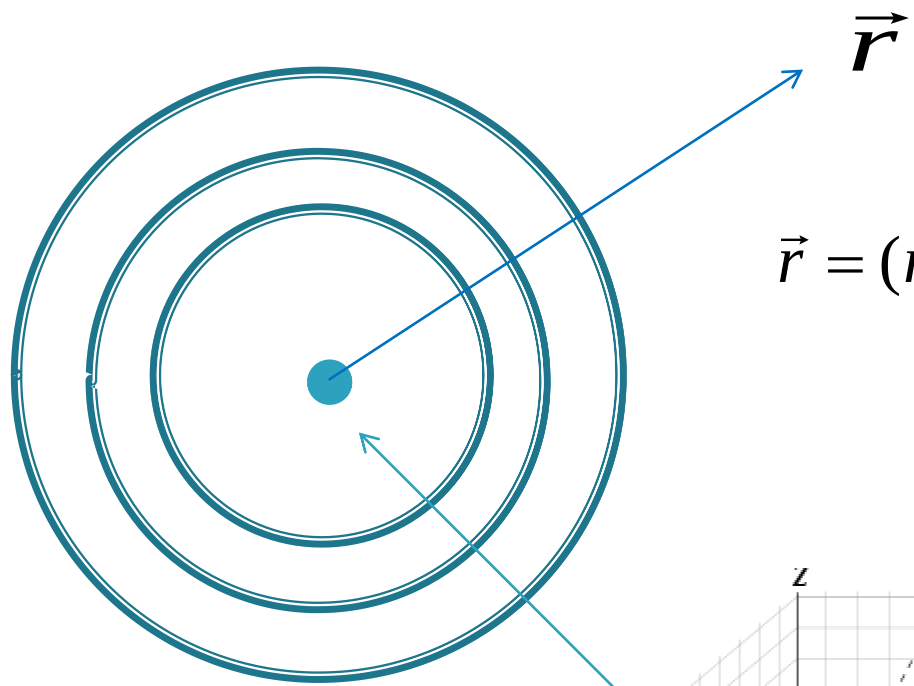
$$TL_{12} = -10\log\frac{|I_2|}{|I_1|} \quad \text{(dB)}$$

$$TL_{12} = -20\log\frac{|p_2|}{|p_1|} \quad \text{(dB)}$$

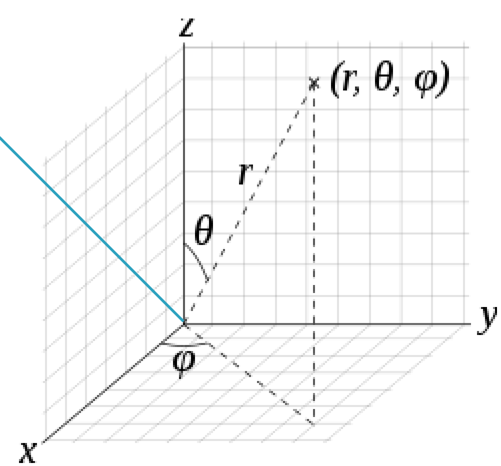
Κατά σύμβαση θεωρούμε πάντα το p_1 να αναφέρεται με τον ίδιο τρόπο

$$TL(r,z) = -20\log\frac{|p(r,z)|}{|p_0|} \quad \text{(dB)}$$

Απώλεια διάδοσης



$$\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$$



Πηγή στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Απώλεια διάδοσης

$$\nabla^2 p + k^2 p = -\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Σφαιρική συμμετρία

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dp}{dr} + k^2 p = -\frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$$

$$p(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \qquad p(r,t) = \frac{1}{4\pi r} e^{i(kr - \omega t)}$$

Η σύμβαση επιβάλει απόσταση αναφοράς 1 m

$$|p_0| = \left|\frac{1}{4\pi r}\right| = \frac{1}{4\pi}$$

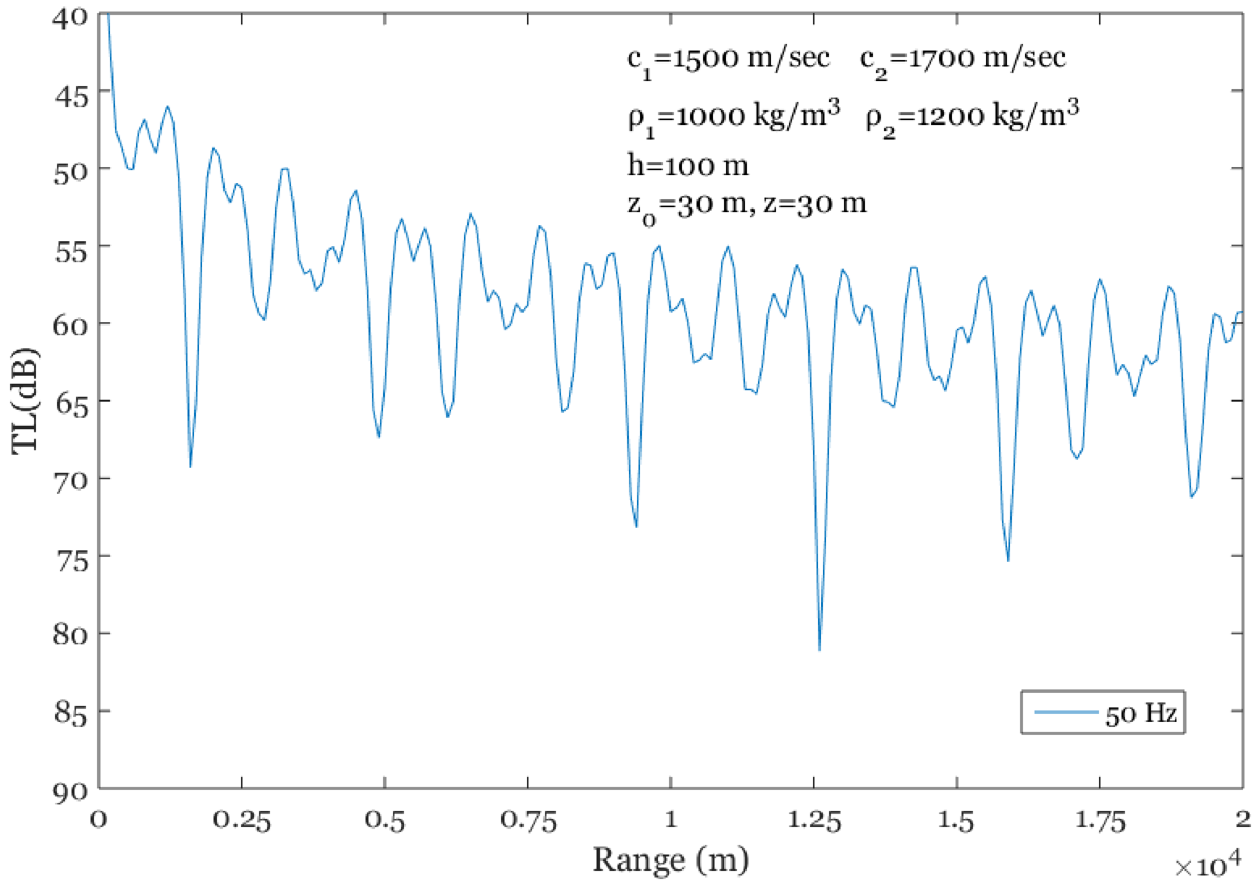
Απώλεια διάδοσης

$$TL(r,z) = -20\log\frac{|p(r,z)|}{|p_0|} \quad \text{(dB)}$$

$$\boxed{TL(r,z) = -20\log 4\pi\left|p(r,z)\right| \quad \text{(dB)}}$$

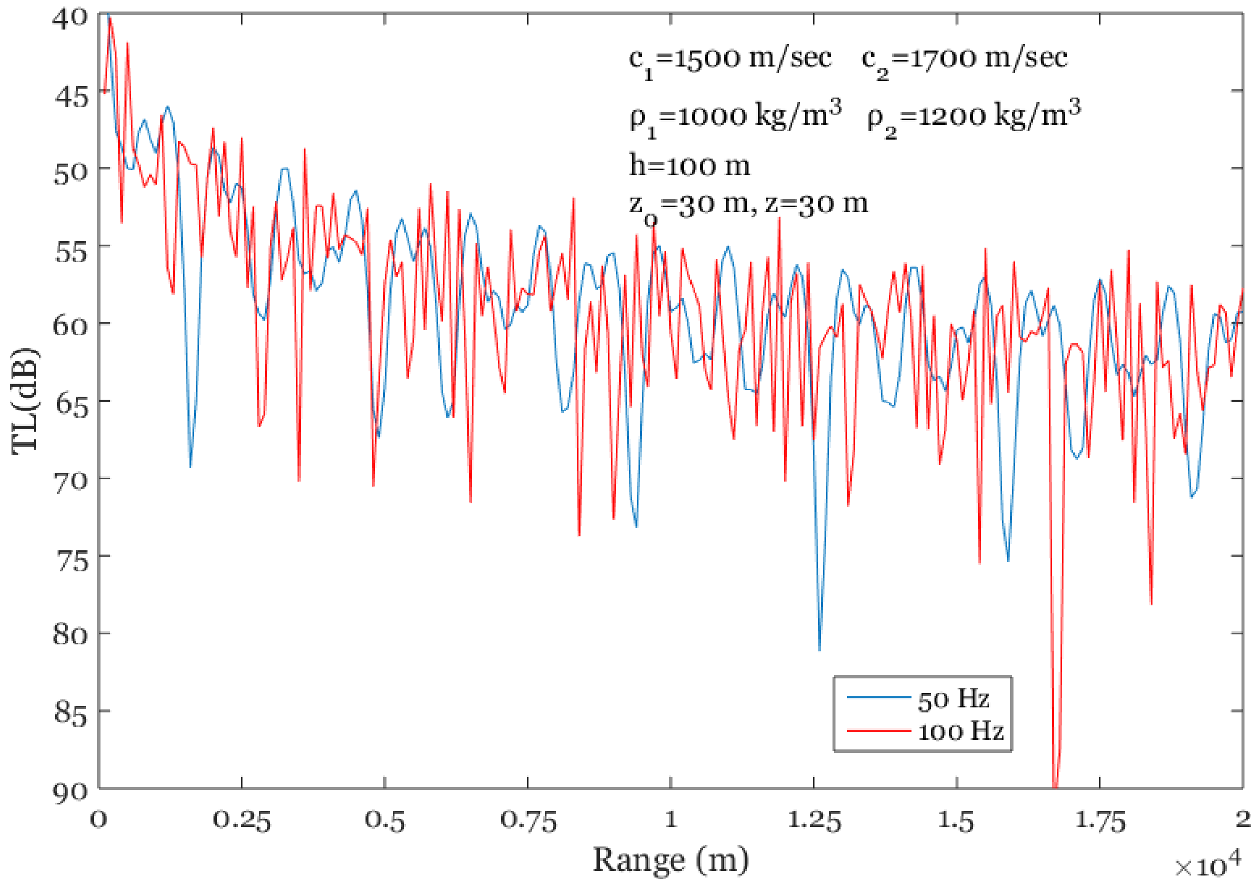
Υπολογίζεται η πίεση στο σημείο *r,z* και εφαρμόζεται ο τύπος που δίνει την απώλεια διάδοσης

Απώλεια διάδοσης



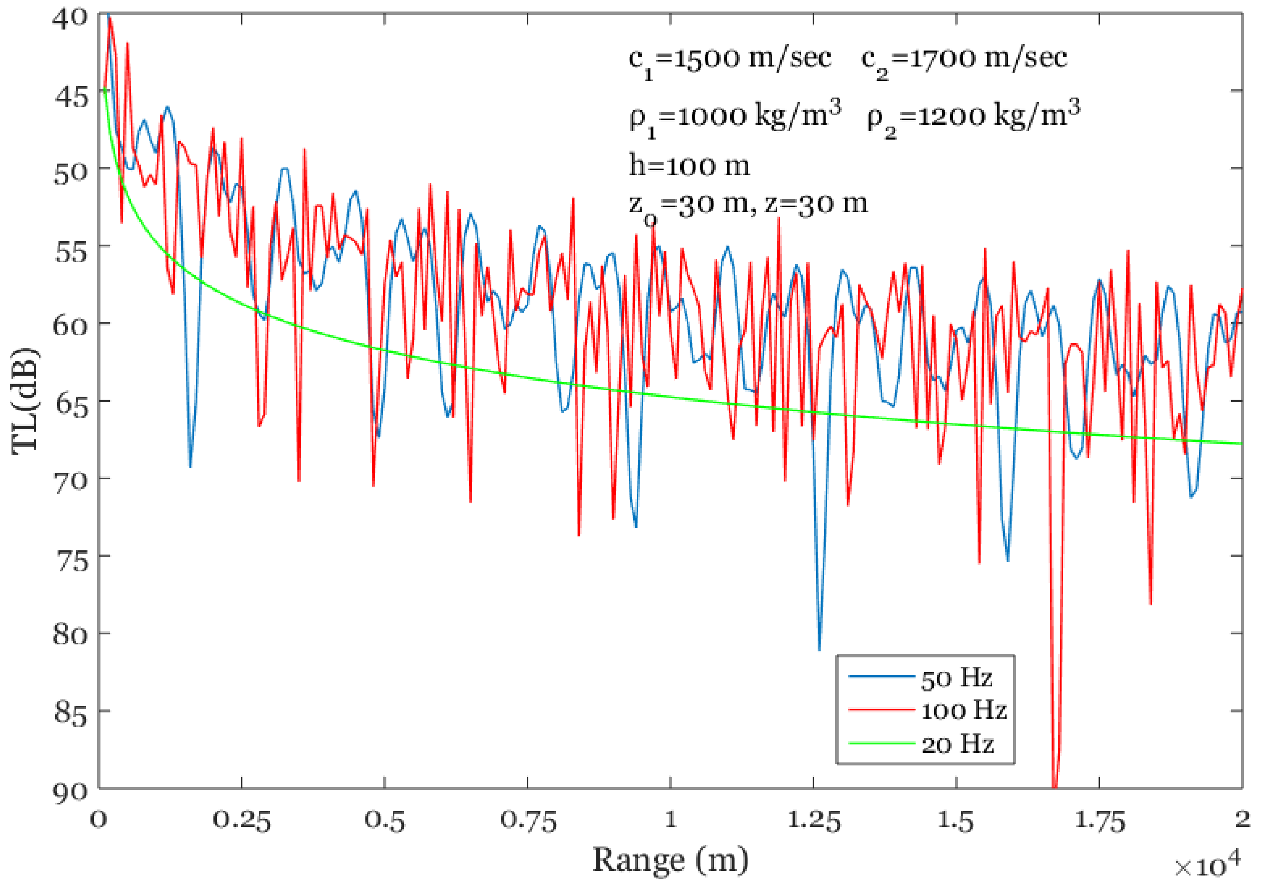
z_0 =30 m z = 30 m

Απώλεια διάδοσης



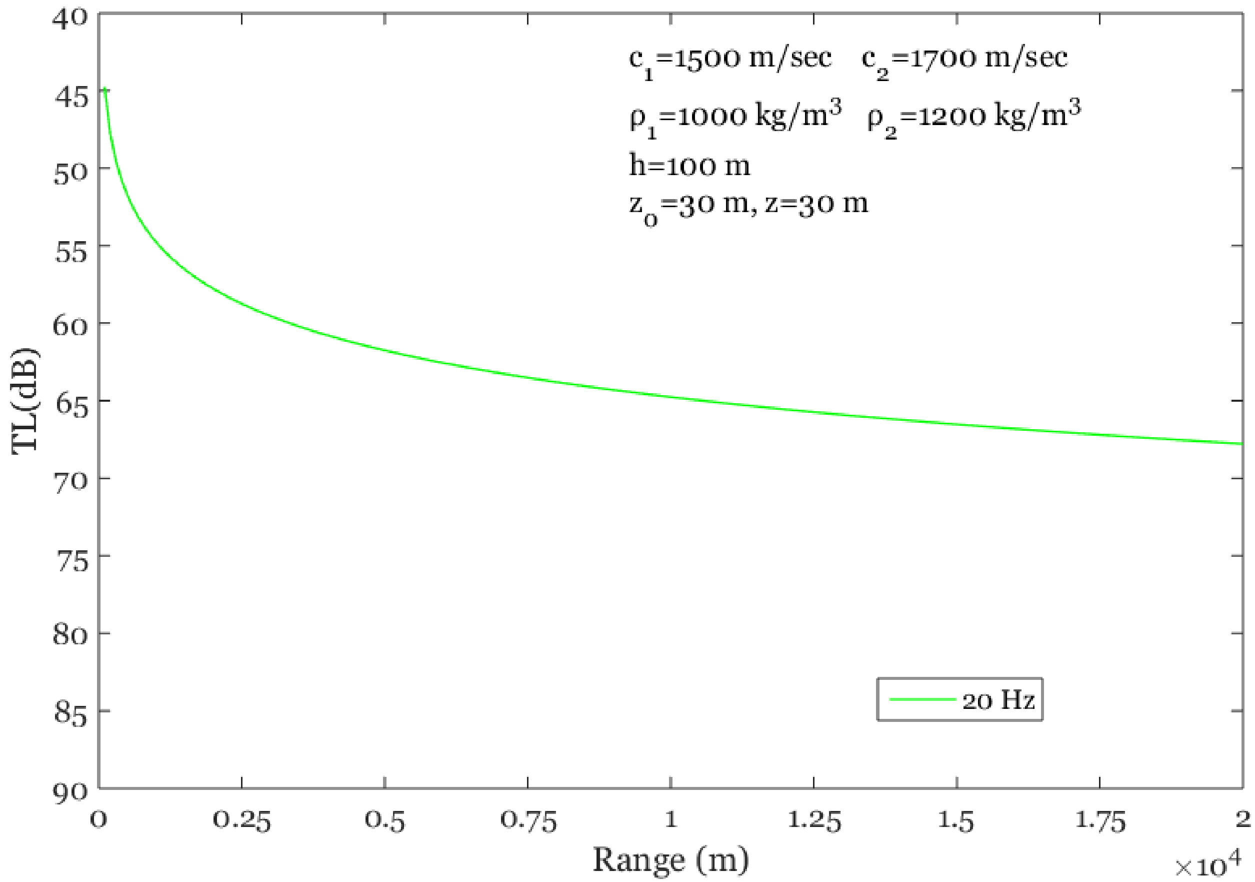
z_0 =30 m z = 30 m

Απώλεια διάδοσης



z_0 =30 m z = 30 m

Απώλεια διάδοσης



z_0 =30 m z = 30 m

Απώλεια διάδοσης