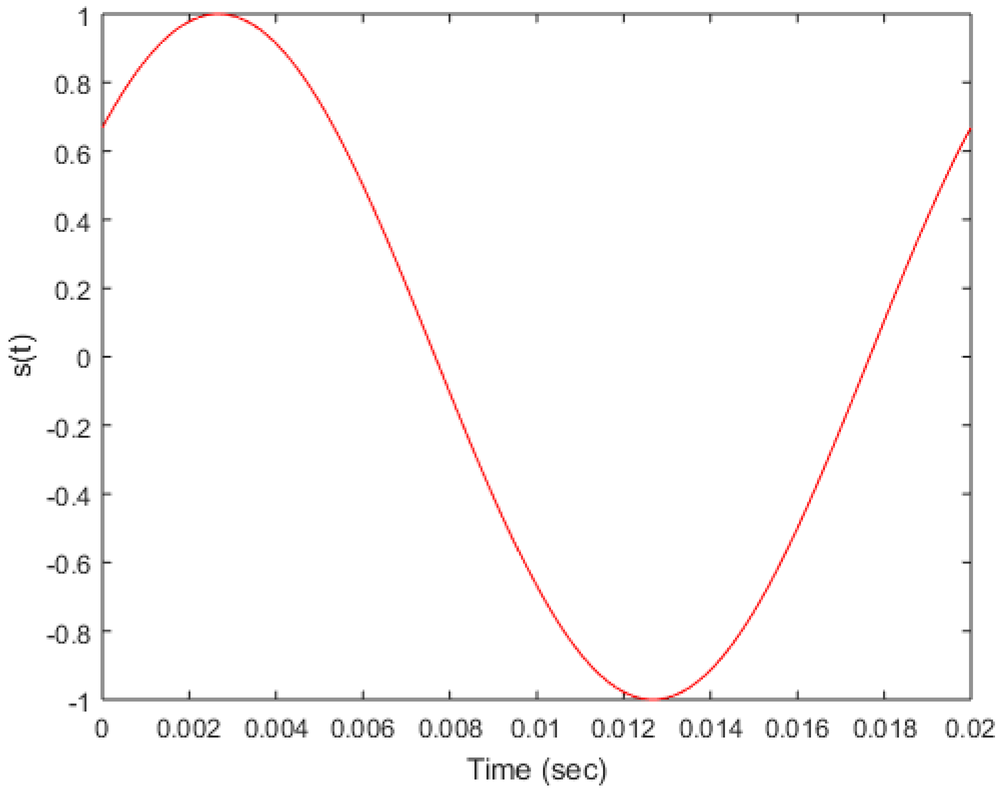
Εισαγωγή στην Επεξεργασία Σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier

Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

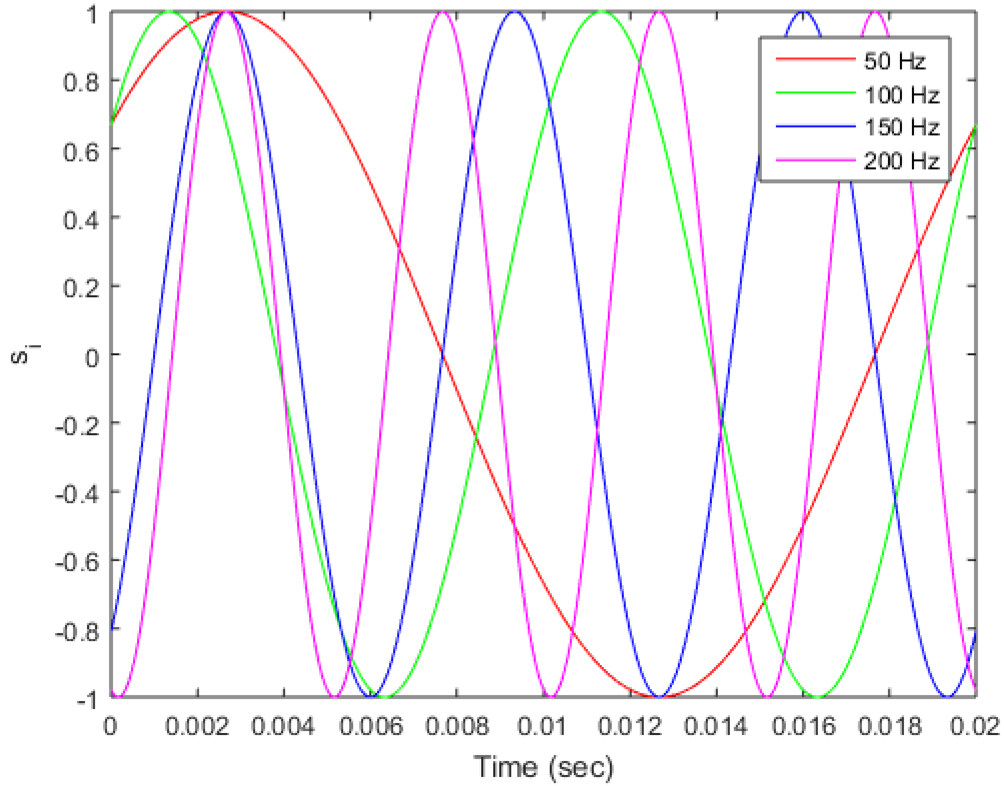
$$s(t) = A\cos(kr - \omega t)$$

$$A = 1,\ \ f = 50Hz,\ \ c = 1500\, m/\sec,\ \ k = 2\pi f / c,\ \ r = 4\,\mathrm{m}$$

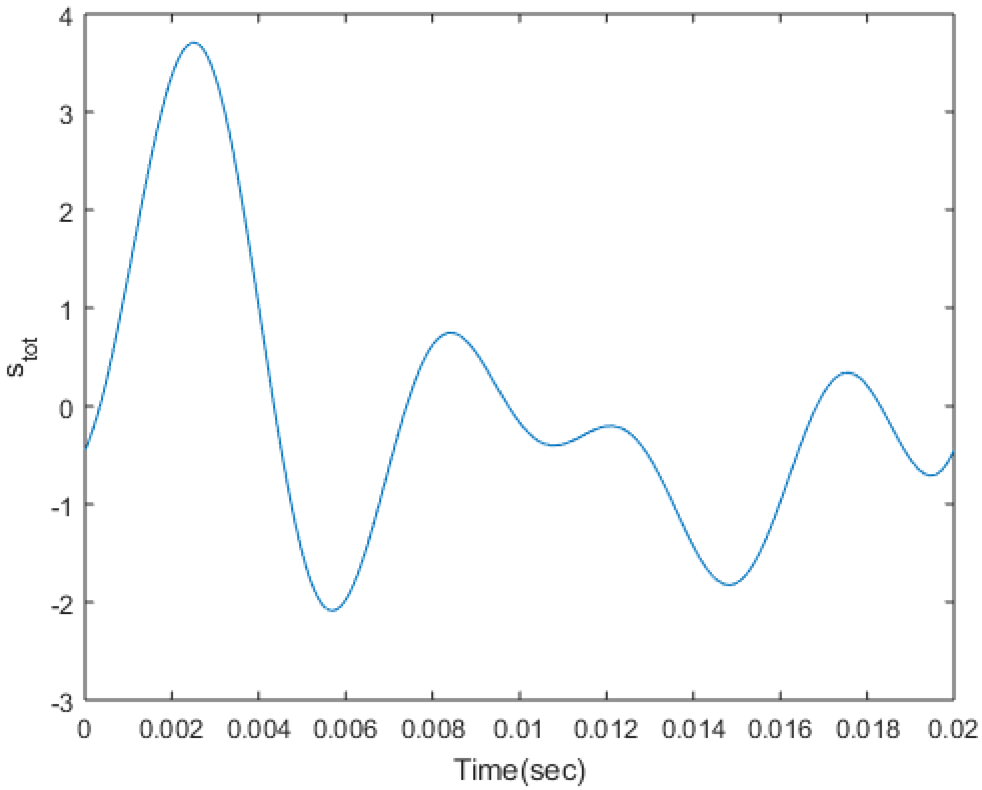


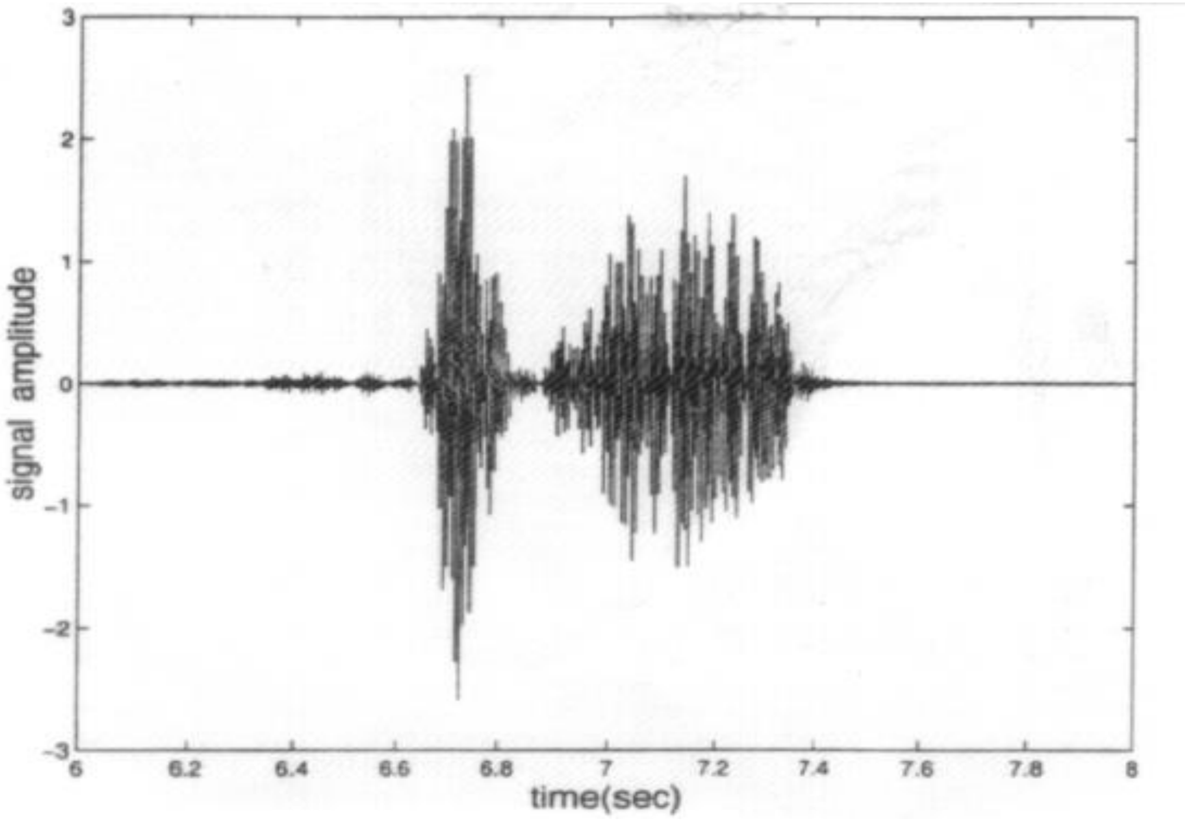
$$s_i(t) = A\cos(k_i r - \omega_i t)$$

$$A = 1,\ \ \omega_\iota = 2\pi f_i,\ \ c = 1500\, m/\sec,\ \ k_i = \omega_i / c, r = 4\,\mathrm{m}$$



$$s_{tot}(t) = s1 + s2 + s3 + s4$$



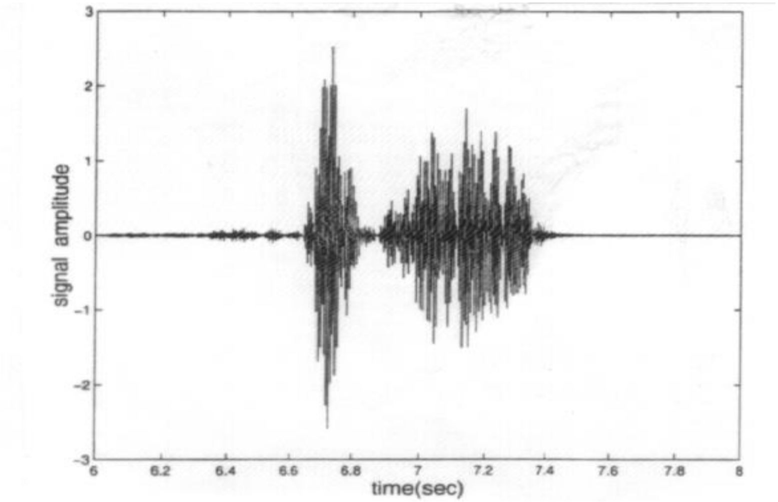

signal amplitude
time(sec)
3
2
1
0
−1
−2
−3
6
6.2
6.4
6.6
6.8
7
7.2
7.4
7.6
7.8
8

Συνεχής μετασχηματισμός Fourier

Σειρές Fourier για περιοδικά σήματα

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} x(t) dt$$

Ύπαρξη Ολοκληρώματος

$$F(\omega) = \Im\{ f(t)\}$$

$$f(t) = \Im^{-1}\{F(\omega)\}$$

$$\boxed{f(t) \leftrightarrow F(\omega)}$$

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα

$$f(t) = e^{-at} \qquad a > 0 \quad t > 0$$

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{1}{a + i\omega}$$

$$F(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{-\omega}{a^2 + \omega^2} i$$

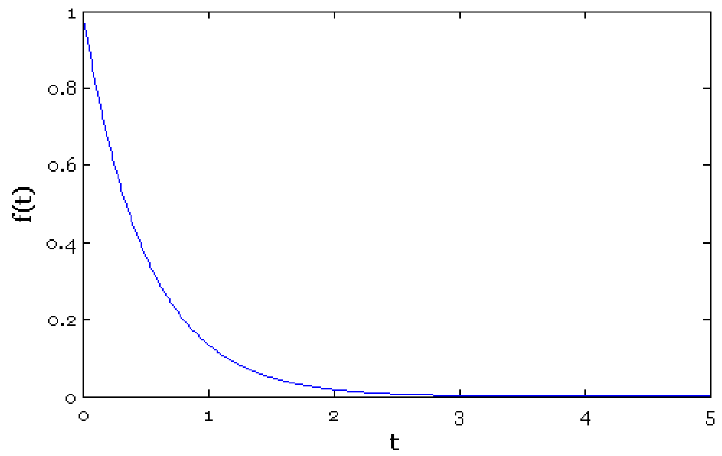
Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

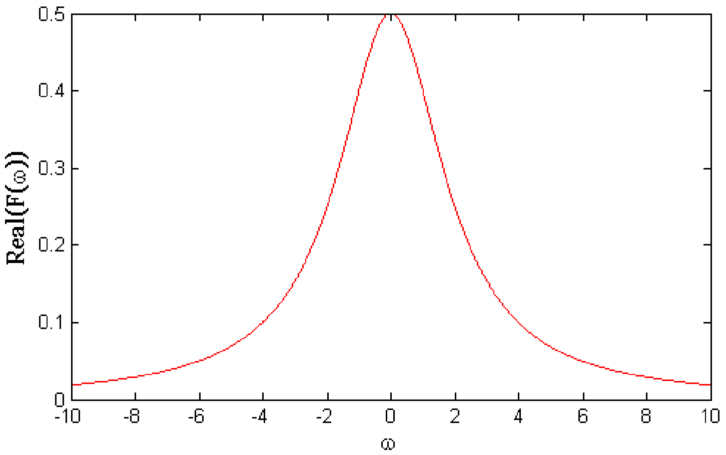
Παράδειγμα

$$f(t) = e^{-at} \quad a > 0 \quad t > 0$$

$$F(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{-\omega}{a^2 + \omega^2} i$$

α=2



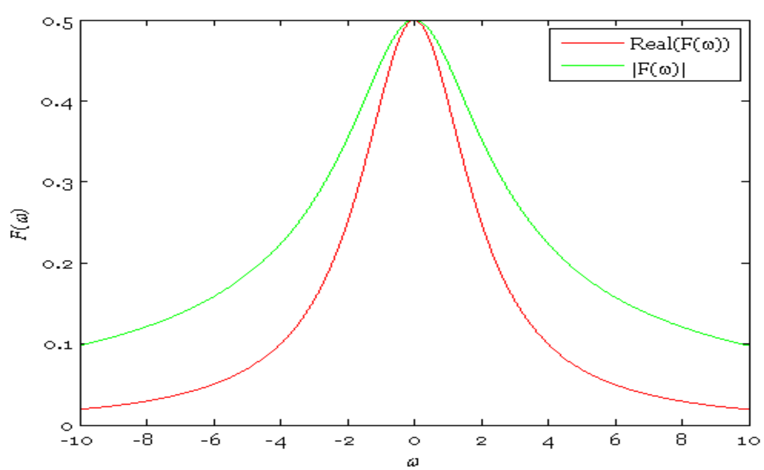


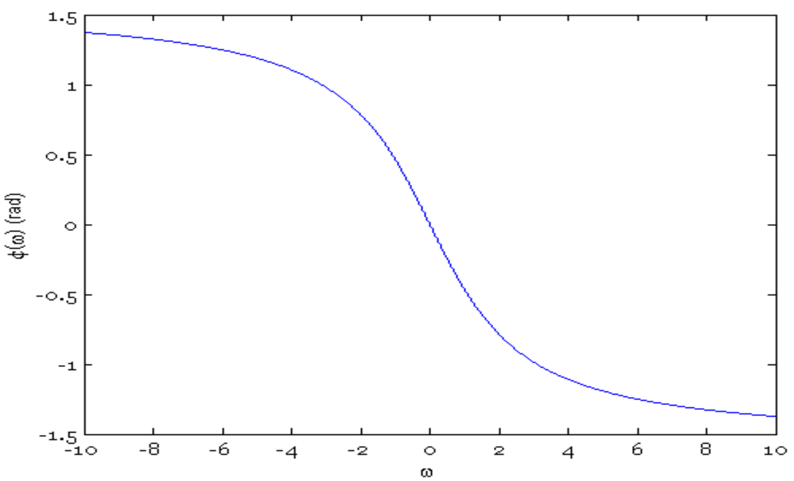
Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα

$$f(t) = e^{-at} \quad a > 0 \quad t > 0$$

$$F(\omega) = \left|F(\omega)\right| e^{i\varphi(\omega)}$$





Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός

$$f_i(t) \leftrightarrow F_i(\omega)$$

c_i αυθαίρετη πραγματική ή μιγαδική σταθερά $i=1,\ldots.n$

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) \leftrightarrow c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega) + \cdots + c_n F_n(\omega)$$

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) \qquad F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)\cos\omega t + f_2(t)\sin\omega t]dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t)\cos\omega t - f_1(t)\sin\omega t]dt$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega)\cos\omega t - X(\omega)\sin\omega t]d\omega$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega)\sin\omega t + X(\omega)\cos\omega t]d\omega$$

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$f(t) \in R, \qquad f_1(t) = f(t), \qquad f_2(t) = 0$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt \qquad X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

$$R(-\omega) = R(\omega) \qquad X(-\omega) = -X(\omega)$$

$$F^*(\omega) = F(-\omega)$$

$$f(-t) = f(t) \longrightarrow X(\omega) = 0$$

$$f(-t) = -f(t) \longrightarrow R(\omega) = 0$$

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

Βασικές Ιδιότητες

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$ Συμμετρία (Δυϊκότητα)

$$\left.\begin{aligned} f^*(t) &\leftrightarrow F^*(-\omega) \\ f^*(-t) &\leftrightarrow F^*(\omega) \end{aligned}\right\} \text{Συζυγία}$$

$$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$$ Αντιστροφή χρόνου

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

Βασικές Ιδιότητες

$$\left.\begin{array}{l} f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right) \\[2em] \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{t}{a}\right) \leftrightarrow F(a\omega) \end{array}\right\} \text{Αλλαγή κλίμακας}$$

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

Βασικές Ιδιότητες

$$f(t-a) \leftrightarrow e^{-ia\omega} F(\omega)$$ Μετατόπιση χρόνου

$$e^{iat} f(t) \leftrightarrow F(\omega-\alpha)$$ Μετατόπιση συχνότητας

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$ Διαμόρφωση

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

Συνέλιξη

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

$$(f_1 * f_2)(t) \qquad\qquad t = \tau + x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+x)} f_2(x) dx d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

Συνέλιξη

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \qquad\qquad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)}$$

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

Ο Παλμός δ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

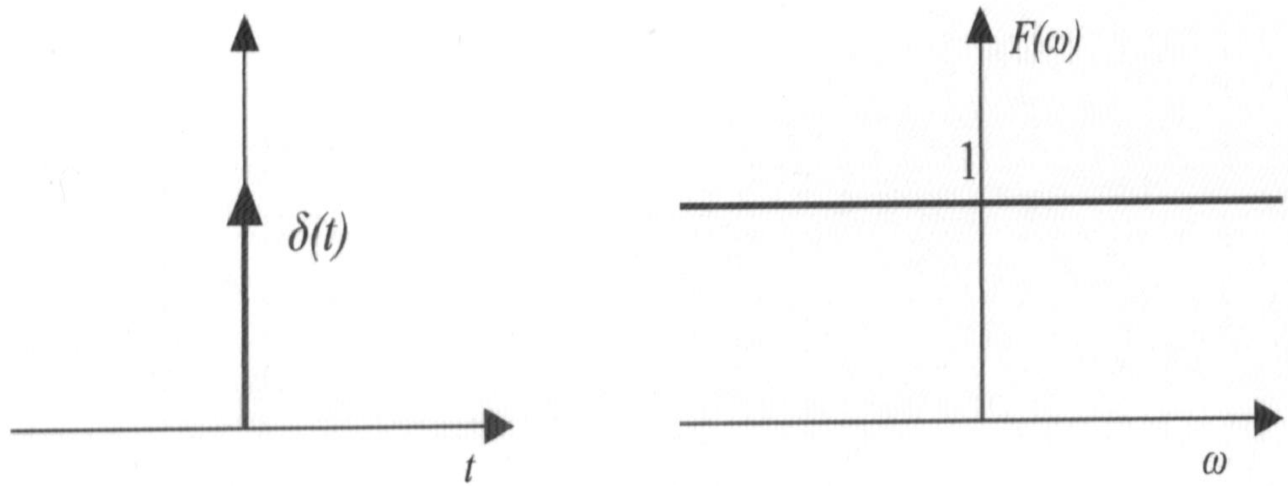
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = 1$$

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega$$

Ο Παλμός δ

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$



Ο Παλμός δ

$$f(t) = 1$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

Θεώρημα Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega$$

$$f_1(t) = f_2(t) = f(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$