Εισαγωγή στην Επεξεργασία Σημάτων

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

1ο Μέρος

Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \Im\{f(t)\}$$

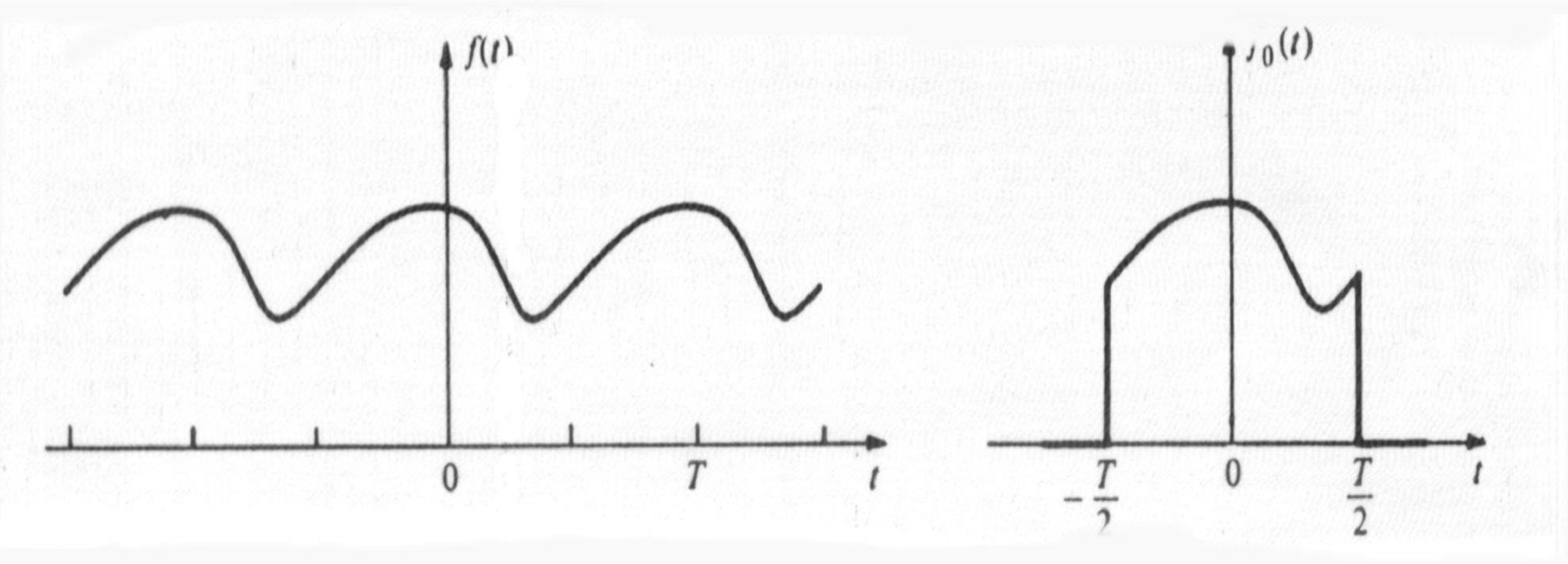
$$f(t) = \Im^{-1}\{F(\omega)\}$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

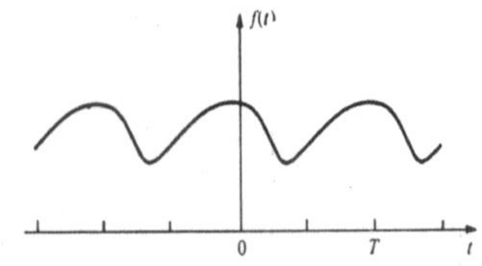
Περιοδικά Σήματα

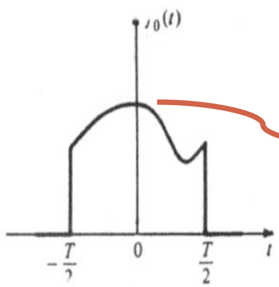
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT)$$



Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT)$$





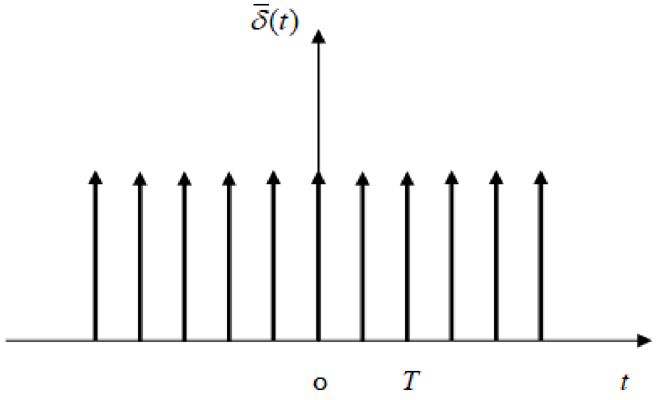
$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

$$f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega)$$

Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t+nT)$$

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



$$\bar{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+nT)$$

$$f(t) = \bar{\delta}(t) * f_0(t)$$

Περιοδικά Σήματα

Σειρές Fourier

Για μια περιοδική συνάρτηση $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Συντελεστές Fourier $$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_o t} dt$$

$$\bar{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+nT) \qquad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-in\omega_o t} dt = \frac{1}{T}$$

Αφού στο (-T/2,T/2) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+nT) = \delta(t)$$

Περιοδικά Σήματα

$$\bar{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+nT)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t}$$

Poisson sum Formula

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(n\omega_o\right) e^{in\omega_0 t}$$

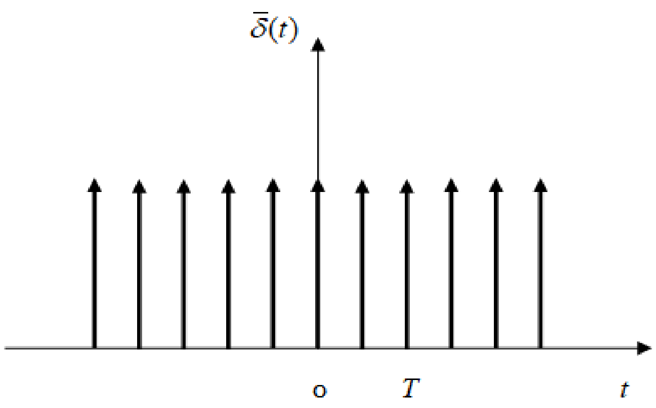
$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

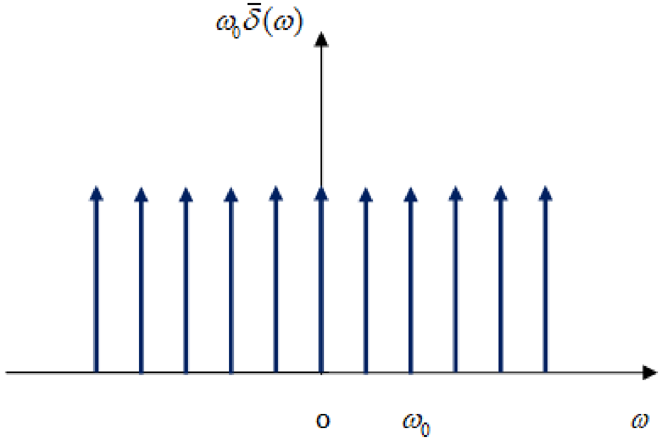
Περιοδικά Σήματα

$$\bar{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\bar{\delta}(t) \leftrightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega)$$





Περιοδικά Σήματα

$$\bar{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\bar{\delta}(t) \leftrightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega)$$

Μετασχηματισμός Fourier των δύο μερών $\quad f(t) = \bar{\delta}(t) * f_0(t)$

$$F(\omega) = \omega_0 \bar{\delta}(\omega) \cdot F_0(\omega) = \omega_0 F_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) =$$

$$= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0) \qquad f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a).$$

Περιοδικά Σήματα

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$

Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης περιόδου T, αποτελείται από μία αλληλουχία παλμών δ σε ισααποστάσεις ω_o μεταξύ τους.

Περιοδικά Σήματα

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

$$e^{iat} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \alpha)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{iat} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - a)$$

$$e^{in\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

Περιοδικά Σήματα

$$\Im^{-1}(F(\omega)) = \Im^{-1}[\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)]$$

$$f(t) = \Im^{-1}(F(\omega)) = \Im^{-1}[\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)] =$$

$$= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\frac{1}{2\pi}e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\frac{1}{T}e^{in\omega_0 t}$$

$$a_n = \frac{1}{T}F_0(n\omega_0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt$$

Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t}$$

Περιοδικά Σήματα

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0) =$$

$$= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Περιοδικά Σήματα

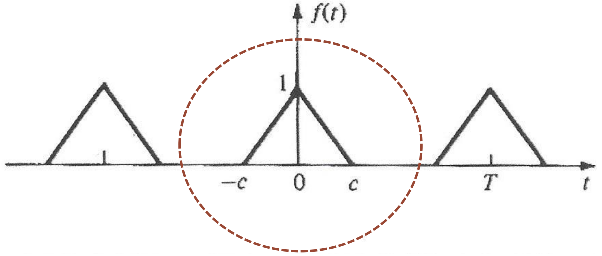
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t+nT)$$

$$f_0(t) = q_c(t)$$

$$q_c(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{c} & |t| < c \\ 0 & |t| > c \end{cases}$$

$$q_c(t) \leftrightarrow F_0(\omega) = \frac{4\sin^2(c\omega/2)}{c\omega^2}$$

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$$

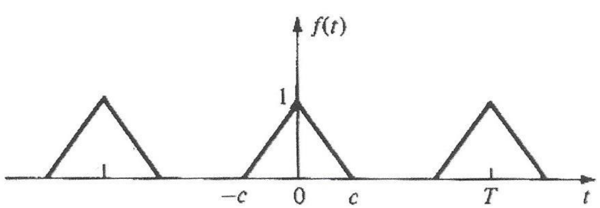


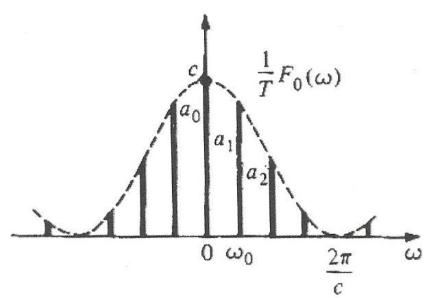
Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t+nT) \qquad f_0(t) = q_c(t)$$

$$q_c(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{c} & |t| < c \\ 0 & |t| > c \end{cases} \qquad q_c(t) \leftrightarrow F_0(\omega) = \frac{4\sin^2(c\omega/2)}{c\omega^2}$$

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \qquad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_0)$$





Περιοδικά Σήματα

Θεώρημα Συνέλιξης

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \qquad f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n e^{in\omega_0 t}$$

Περιοδικά Σήματα

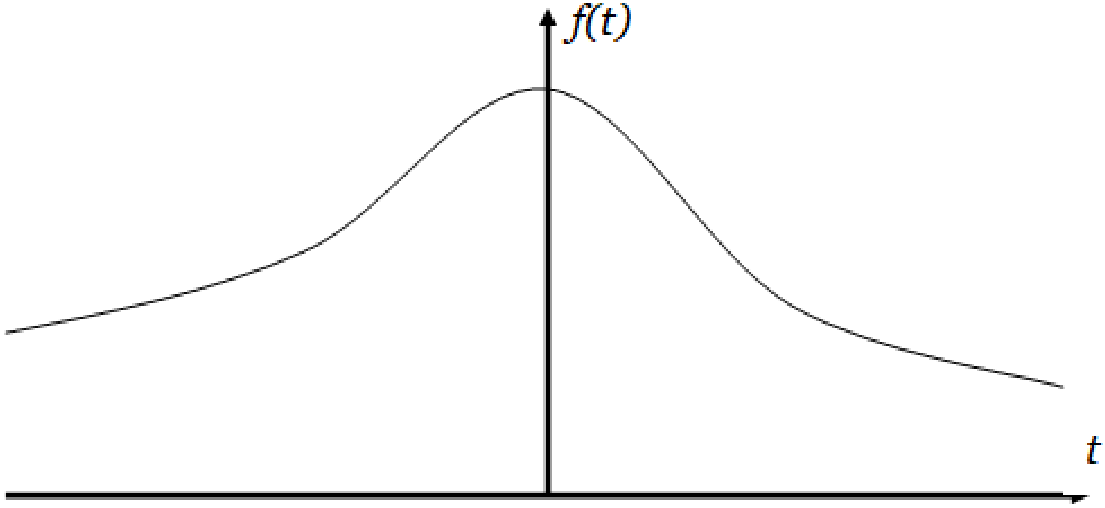
$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i2\pi n f_0 t} \qquad X_n = \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$$

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

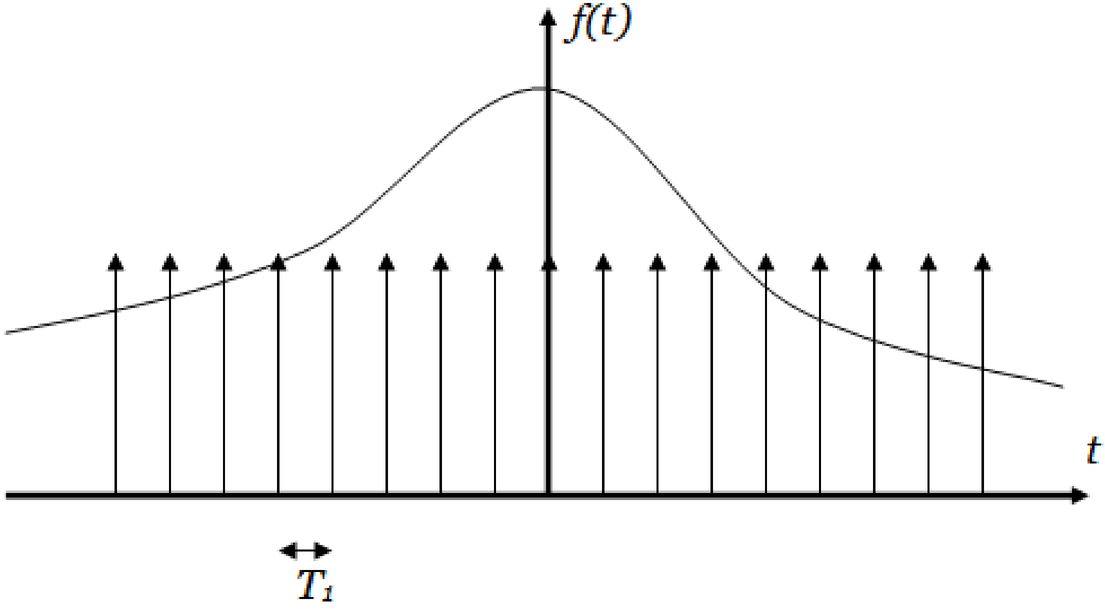
Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα



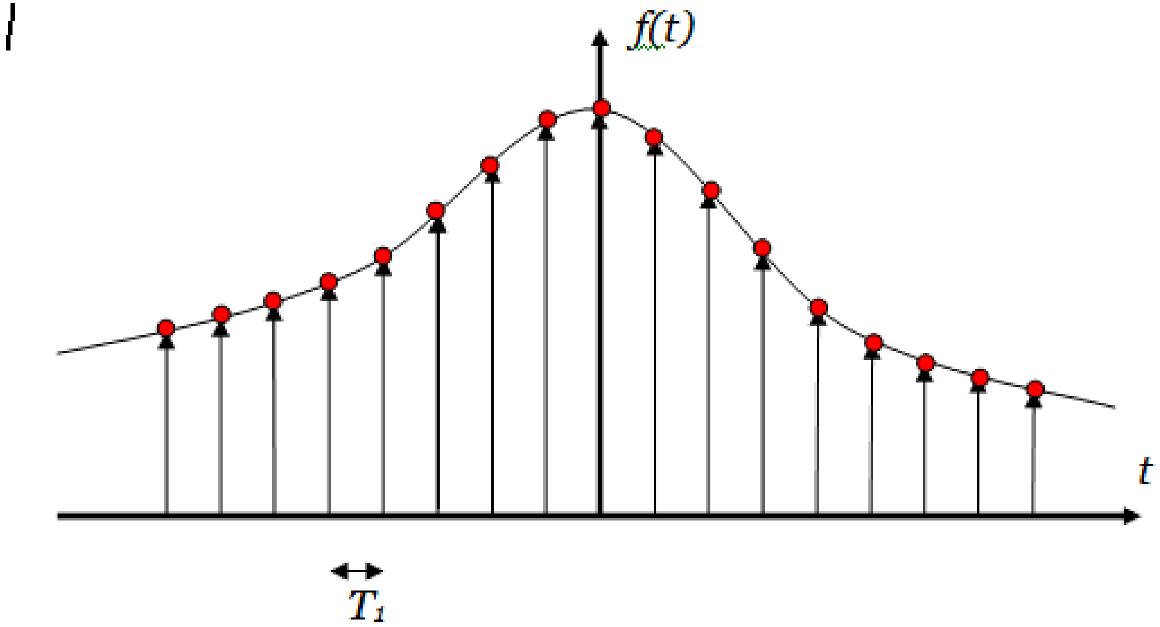
Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα



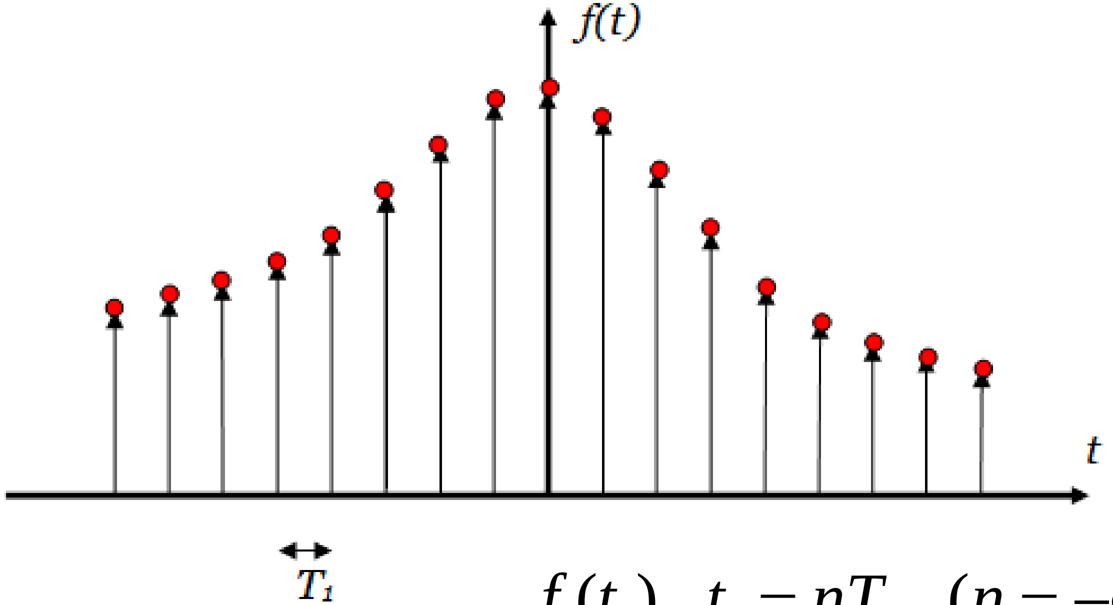
Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα



Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

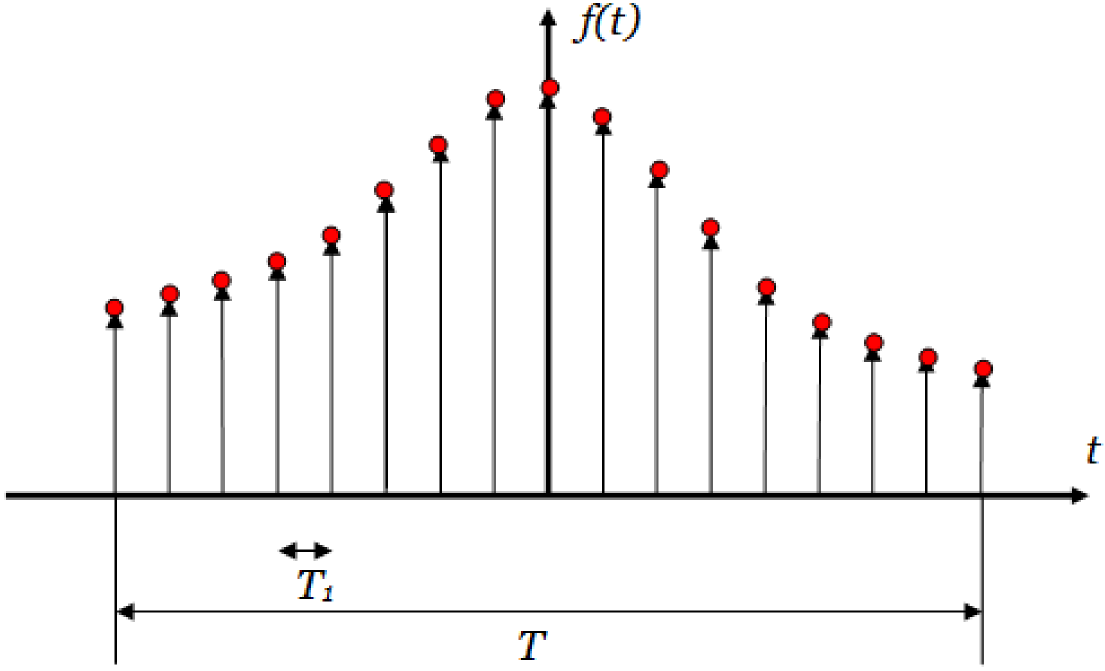
Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα



$$f(t_i),\ \ t_i = nT_1,\ \ (n = -\infty, \ldots 0, \ldots \infty)$$

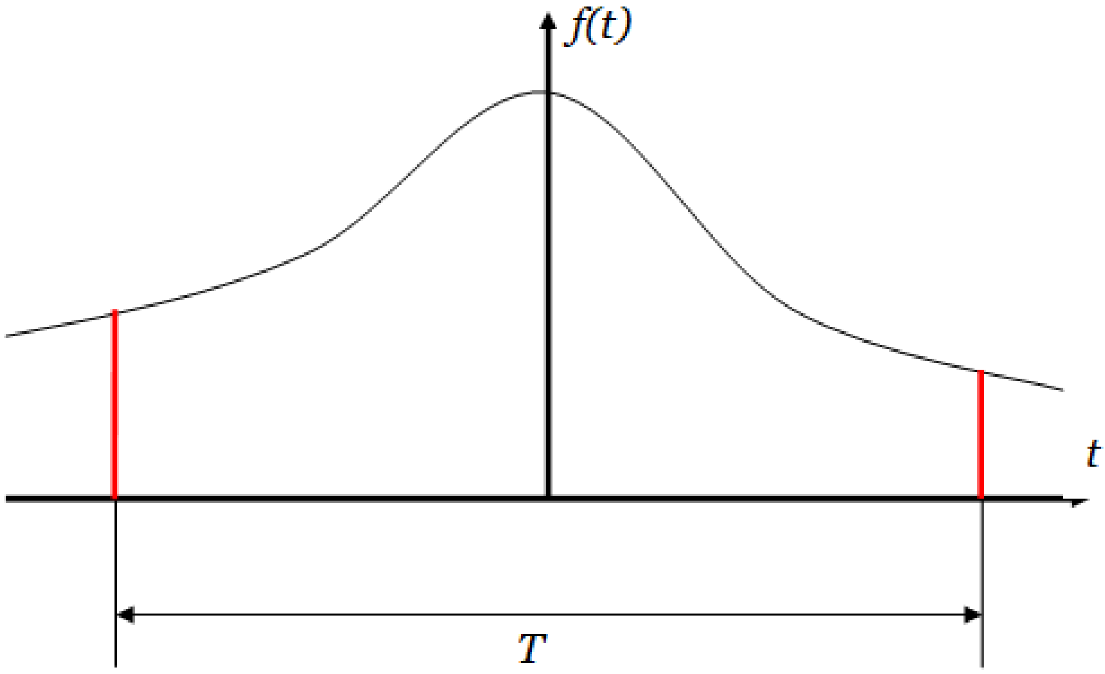
Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα



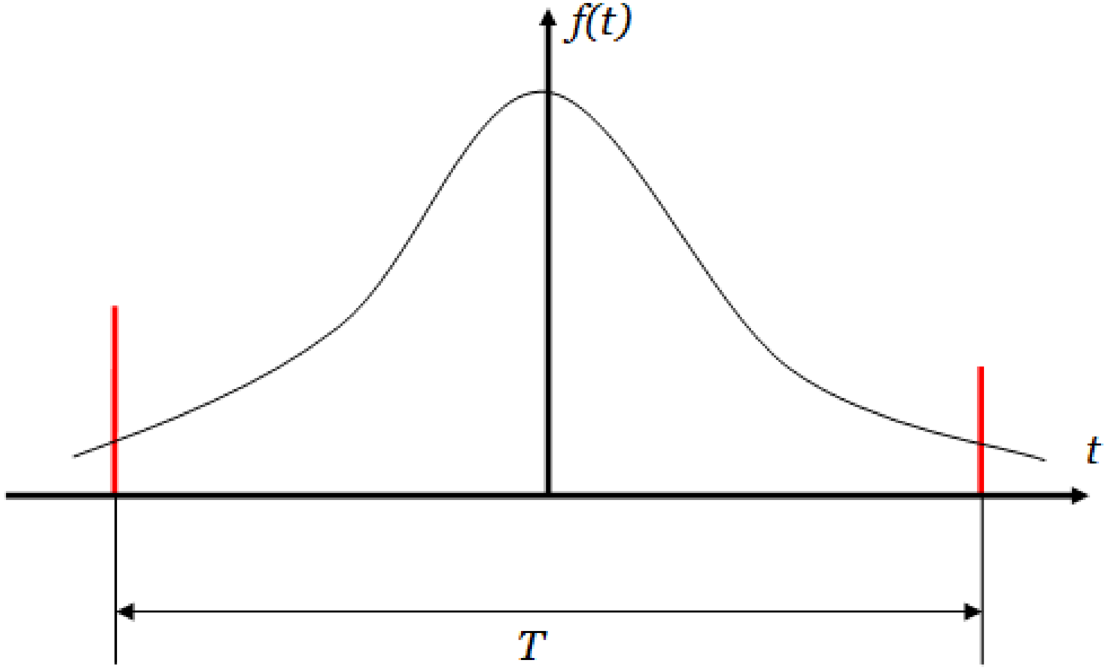
Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα



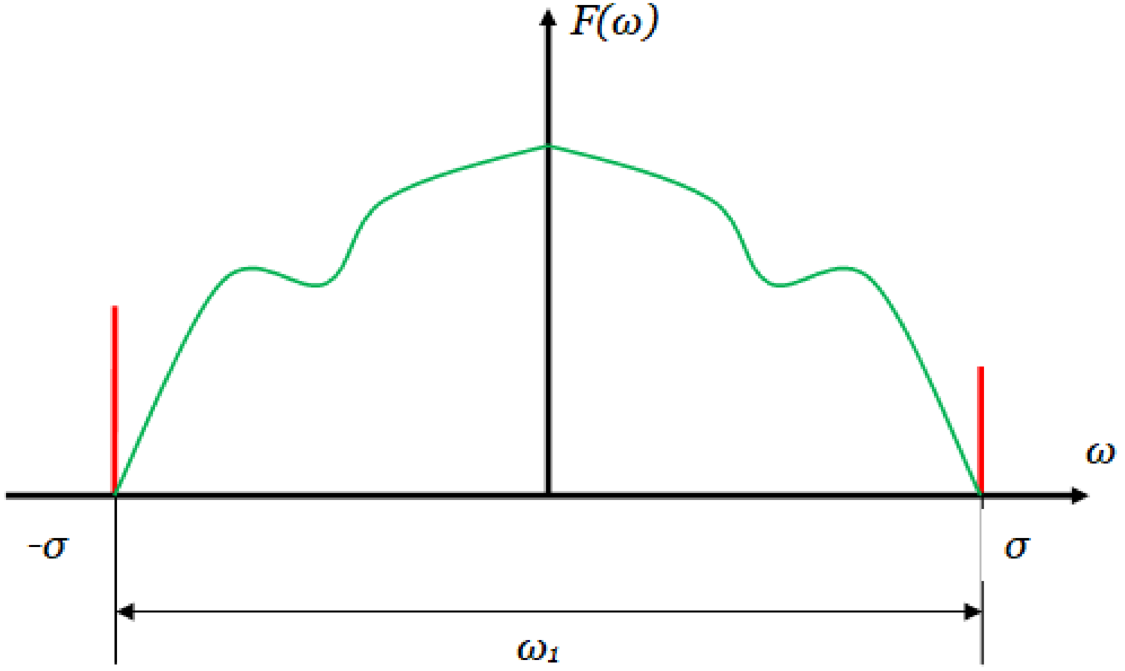
Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα



Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα

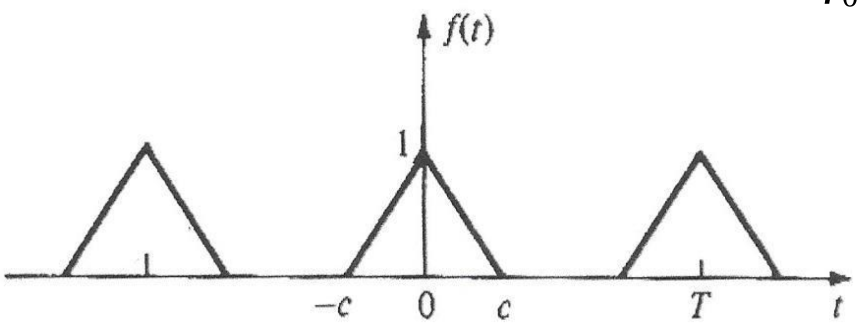


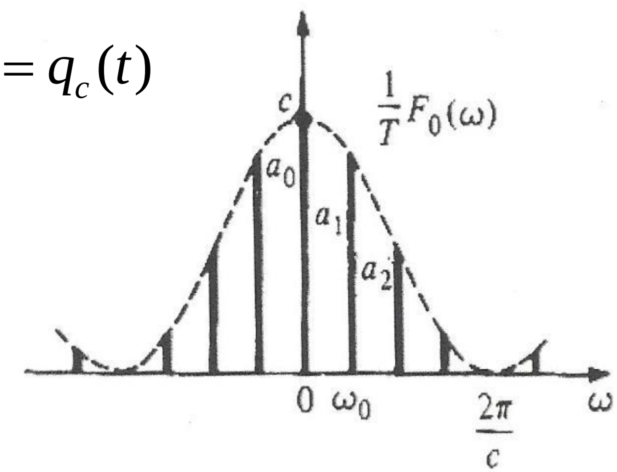
Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \qquad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

$$f_0(t) = q_c(t)$$





T $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad$ $-\sigma$ $\qquad \omega_1 \qquad$ σ