

Εισαγωγή στην
Επεξεργασία Σημάτων

Διακριτός
Μετασχηματισμός
Fourier

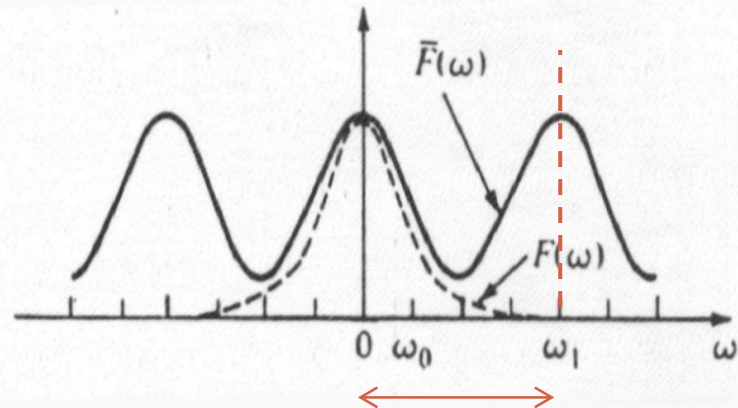
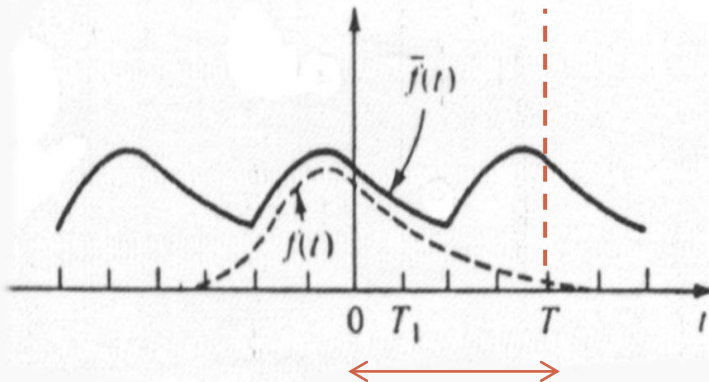
Μέρος 2^ο

Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$



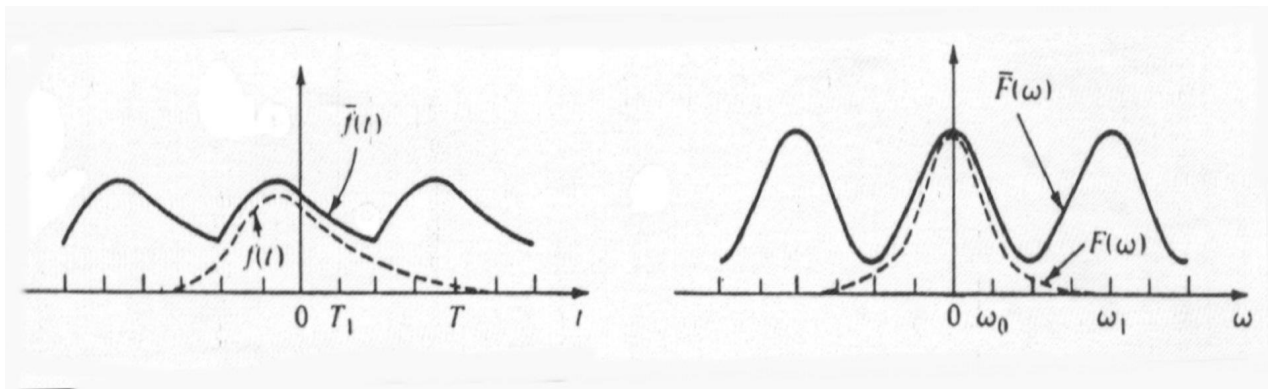
$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$

Poisson Sum Formula

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{in\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(n\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

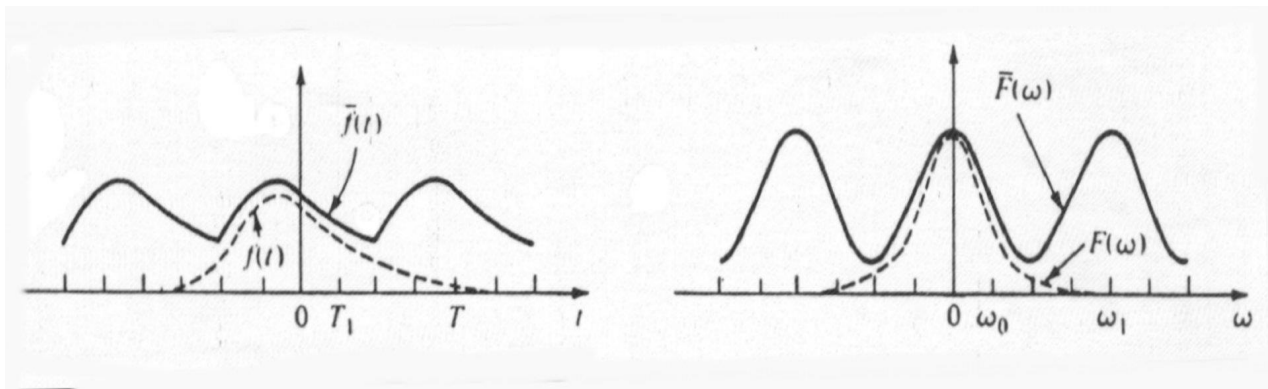
Συντελεστές Fourier της $T\bar{f}(t)$
διακριτές τιμές της συνάρτησης $F(\omega)$



$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\bar{F}(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_1) e^{-inT_1\omega} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$



$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \quad \text{Περιοδική συνάρτηση με περίοδο } T$$

Θεωρούμε διαμερισμό σε N ισάπέχοντα χρονικά διαστήματα

$$T_1 = T / N \quad \omega_0 T_1 = \omega_0 T / N = 2\pi / N$$

Τα δείγματα της περιοδικής συνάρτησης στο χρόνο T

$$y(mT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 mT_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k w_N^{km} \quad w_N = e^{i2\pi / N}$$

$$m = 0, \dots, N - 1$$

$$k = n + rN, n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad r = \dots -1, 0, 1, \dots$$

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} w_N^{(n+rN)m} = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{mn} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN}$$

$$\bar{c}_N \equiv \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN}$$

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{c}_n w_N^{mn}, \quad m = 0, \dots, N - 1$$

Οι τιμές δειγματοληψίας της $y(mT_1)$ και οι συντελεστές \bar{c}_N σχετίζονται από το ως άνω σύστημα N εξισώσεων

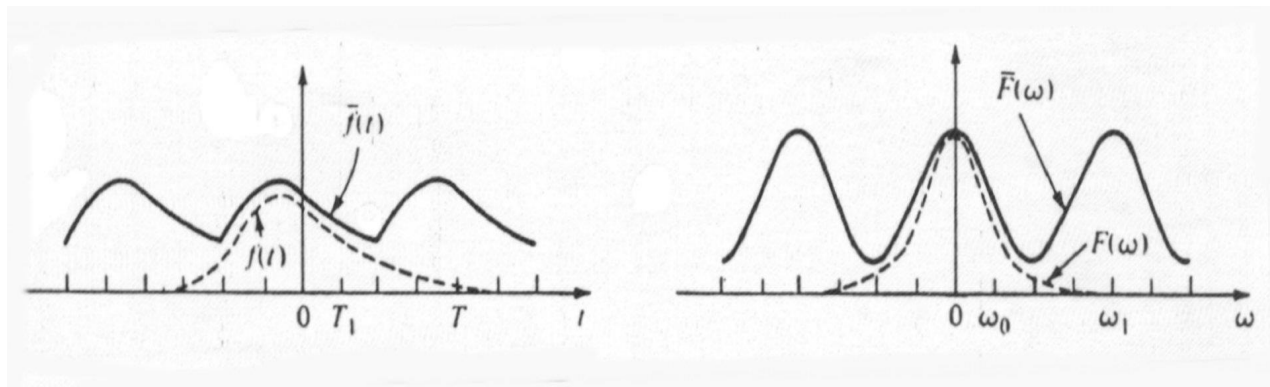
Εφαρμογή στη συνάρτηση $\bar{f}(t)$

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N^{mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N}$$

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{c}_n w_N^{mn}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

$$T_1 = T/N, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = N\omega_0$$

Σύστημα N εξισώσεων που μας δίνουν τις τιμές δειγματοληψίας $\bar{F}(n\omega_0)$



$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N^{mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N}$$

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{mn} \quad m = 0, \dots, N-1, \quad w_N = e^{i2\pi/N}$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{-mn} \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$A_m \rightarrow \bar{f}(mT_1)$$

$$a_n \rightarrow \frac{1}{T} \bar{F}(n\omega_0)$$

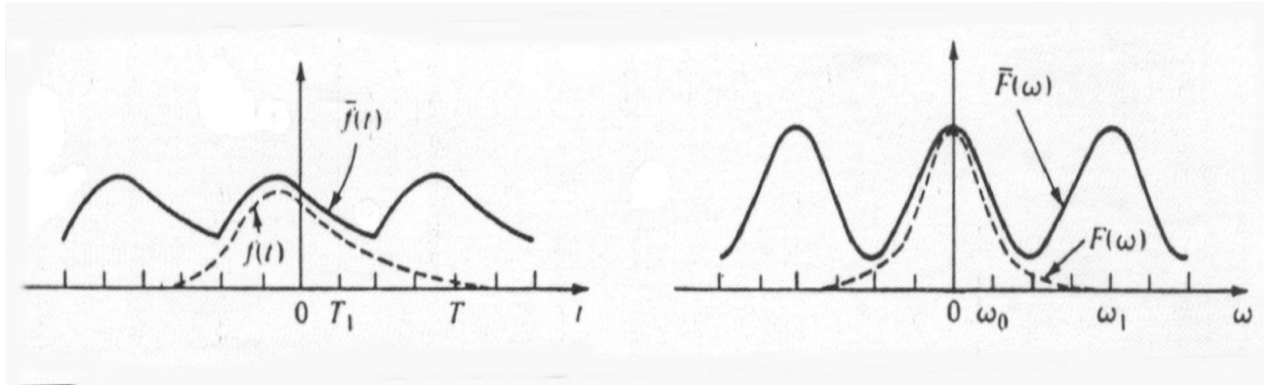
$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{mn} \quad m = 0, \dots, N-1, \quad w_N = e^{i2\pi/N}$$

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{-mn} \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$a_n \underset{N}{\longleftrightarrow} A_m$$

Διακριτή σειρά ζευγών Fourier τάξης N

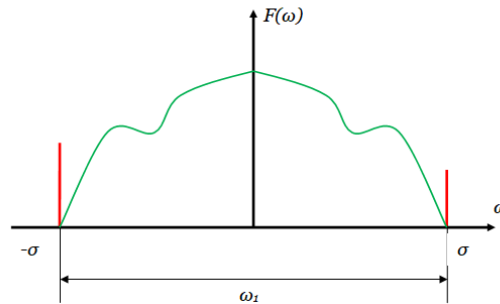
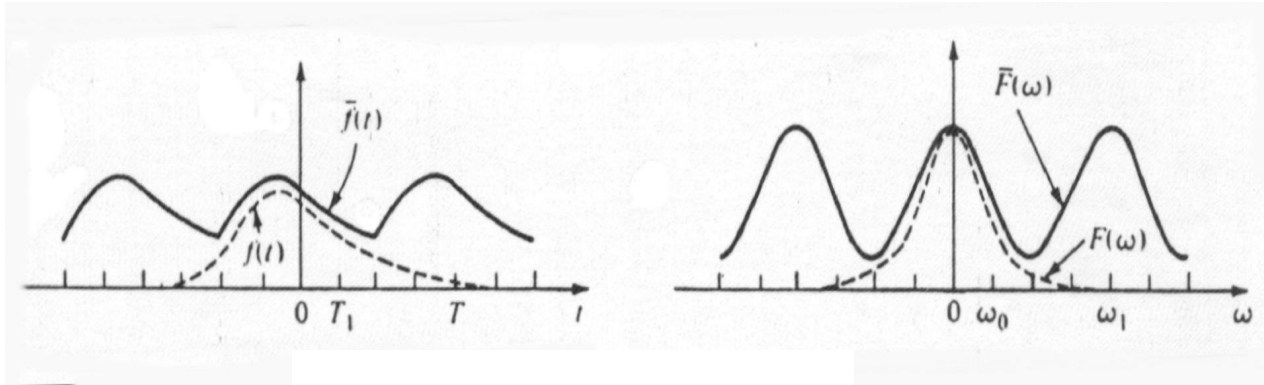
Περιοδική $A_{m+N} = A_m, \quad a_{n+N} = a_n$



$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$

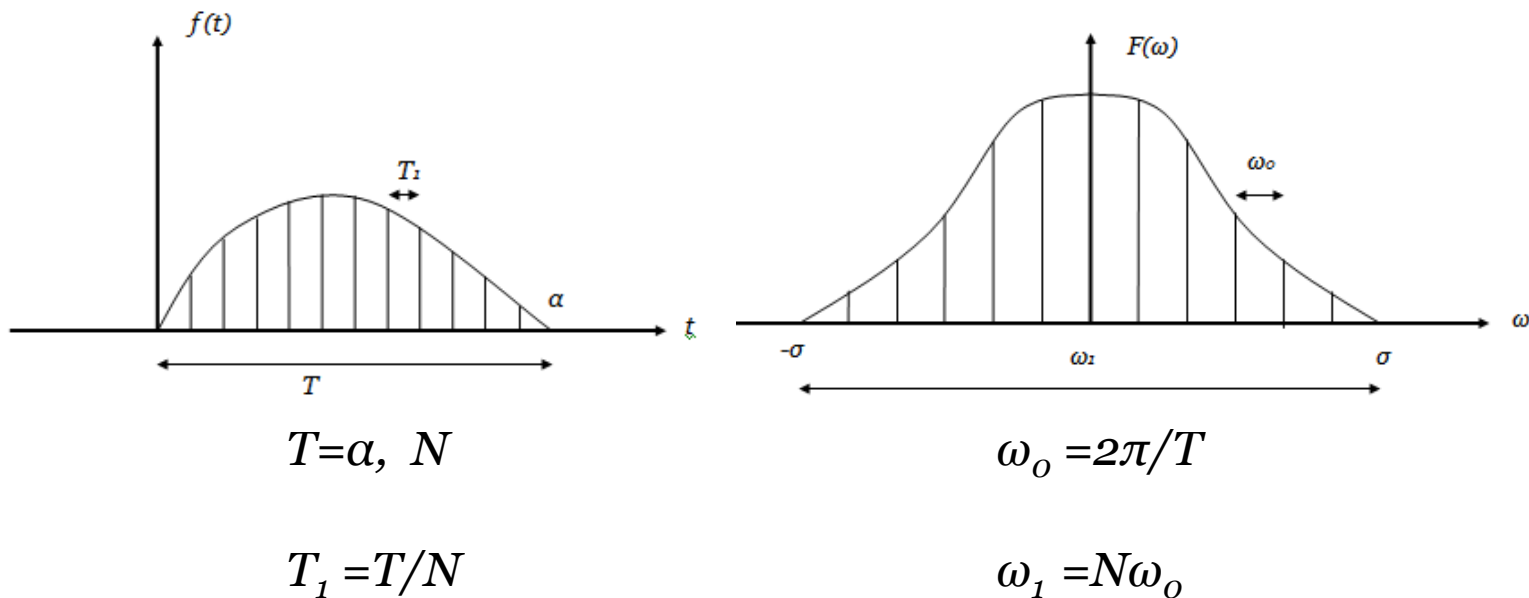
$$\frac{1}{T} \bar{F}(n\omega_0) \leftrightarrow \bar{f}(mT_1)$$

$$\bar{F}(n\omega_0) = T_1 \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}(mT_1) w_N^{-mn} \quad w_N = e^{i2\pi/N}$$



Εάν $F(\omega) = 0$ για $|\omega| > \sigma$ και $\omega_1 > 2\sigma$

$F(\omega) = \bar{F}(\omega)$ για $|\omega| < \sigma$



Αφού $\omega_1 = 2\sigma$ τα δείγματα της $F(\omega)$ αναπαράγονται αυτούσια από τα δείγματα της $f(t)$.

Υπενθυμίζεται ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ επαναλαμβάνονται με περιόδους αντίστοιχα T και ω_1 ορίζοντας τις $f(t)$ και $F(\omega)$

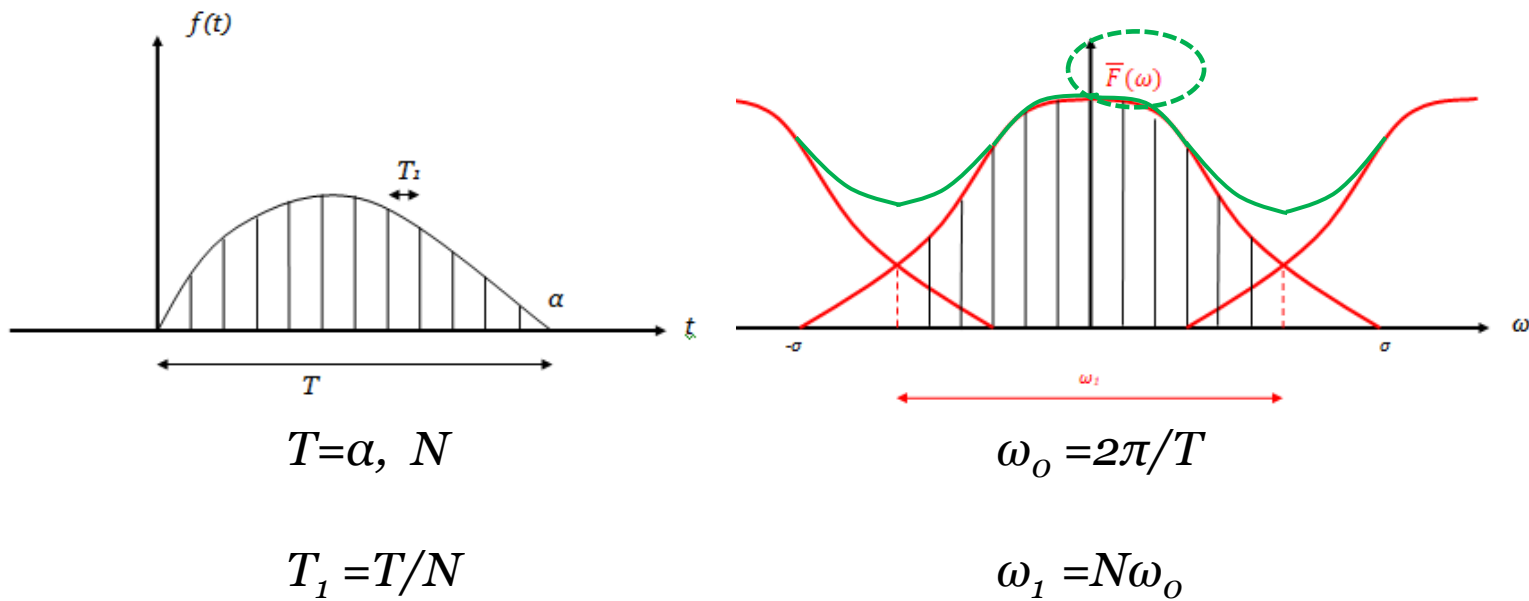
$$F(\omega) = 0 \quad |\omega| > \sigma \quad \omega_1 > 2\sigma$$

$$F(\omega) = \bar{F}(\omega) \quad |\omega| < \sigma$$

$$F(n\omega_0) = \begin{cases} \bar{F}(n\omega_0) & \text{για } |n| \leq \frac{N}{2} \\ 0 & \text{για } |n| < \frac{N}{2} \end{cases}$$

Λόγω περιοδικότητας

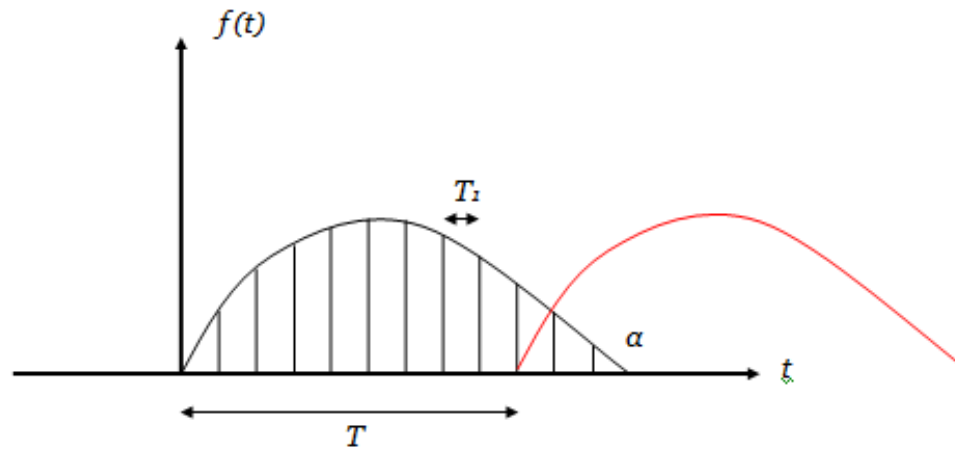
$$F(n\omega_0) = \begin{cases} \bar{F}(n\omega_0) & \text{για } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ \bar{F}(N\omega_0 + n\omega_0) & \text{για } |n| < \frac{N}{2} \end{cases}$$



Εάν για τις δεδομένες επιλογές $\omega_1 < 2\sigma$ τότε έχουμε λάθος στον υπολογισμό των δειγμάτων της $F(\omega)$ από αυτά της $\bar{F}(\omega)$

Aliasing error $F(\omega) - \bar{F}(\omega)$

Για δεδομένο N η αύξηση του ω_1 συνεπάγεται μείωση του T
 αφού $\omega_1 = N\omega_0$ και $\omega_0 = 2\pi/T$



Για $T < a$ $\bar{f}(nT_1)$ υπολογίζονται ακριβώς, αλλά όχι τα $f(nT_1)$
 και συνεπώς παραμένει λάθος προσέγγιση

Επί πλέον έχουμε κακή ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων (μεγάλο ω_0)

Αύξηση του T με σταθερό το N σημαίνει μείωση του ω_o (θετικό για καλή ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων) αλλά ταυτόχρονα μείωση του ω_1 που σημαίνει επαναφορά του Aliasing error και μείωση της ανάλυσης στο πεδίο του χρόνου αφού αυξάνει το T_1 ($T_1 = T/N$)

Το θεώρημα της δειγματοληψίας των Shannon- Nyquist ορίζει ότι όταν το εύρος συχνοτήτων ενός σήματος έχει μέγιστη συχνότητα f_σ (αντίστοιχη κυκλική συχνότητα σ), η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος όπως ορίζεται ο χρόνος T_1 θα πρέπει να είναι

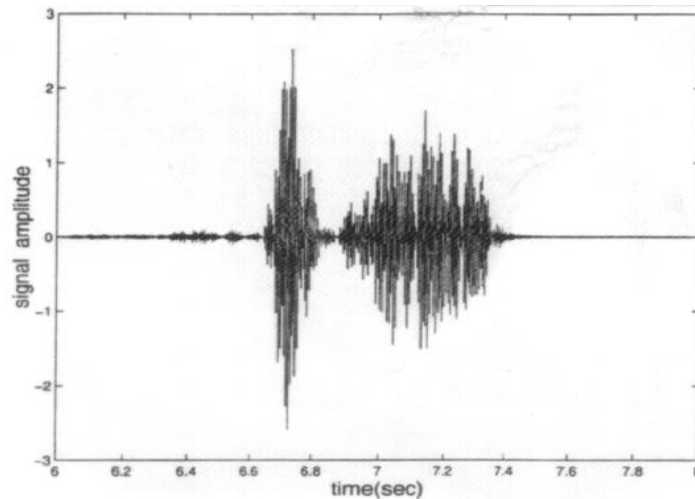
$$T_1 = \frac{1}{2f_\sigma} = \frac{\pi}{\sigma}$$

για μια ορθή αναπαραγωγή του σήματος στο πεδίο του χρόνου.

Παράδειγμα :

Σε εφαρμογή τομογραφίας εκπέμπεται σήμα που έχει ενεργό φάσμα ανάμεσα στα 50 και 200 Hz.

Ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας προκειμένου το σήμα να αναπαραχθεί σωστά από το μετρούμενο φάσμα του ;



Παράδειγμα :

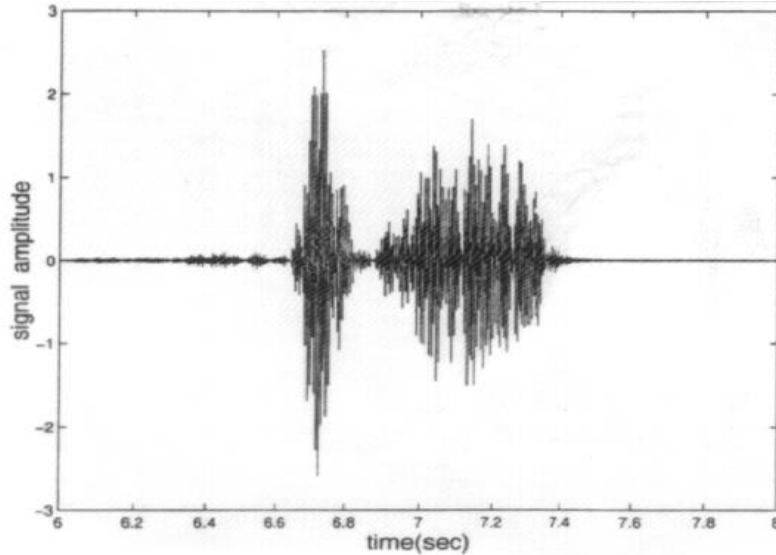
Σε εφαρμογή τομογραφίας εκπέμπεται σήμα που έχει ενεργό φάσμα ανάμεσα στα 50 και 200 Hz.

Ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας προκειμένου το σήμα να αναπαραχθεί σωστά από το μετρούμενο φάσμα του ;

$$T_1 = \frac{1}{2f_\sigma} = \frac{1}{400} = 0.0025 \text{ sec}$$

Συχνοτικό εύρος $f_1 = \frac{1}{T_1} = 400 \text{ Hz}$

Περίοδος ισοδύναμου περιοδικού σήματος : $T = \frac{N}{400}$



$$T_1 = \frac{1}{400} = 0.0025 \text{ sec}$$

Συχνοτικό εύρος

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = 400 \text{ Hz}$$

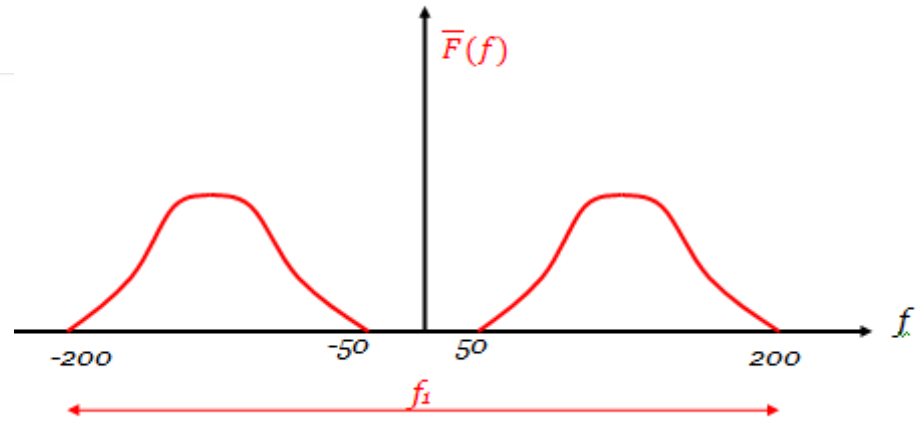
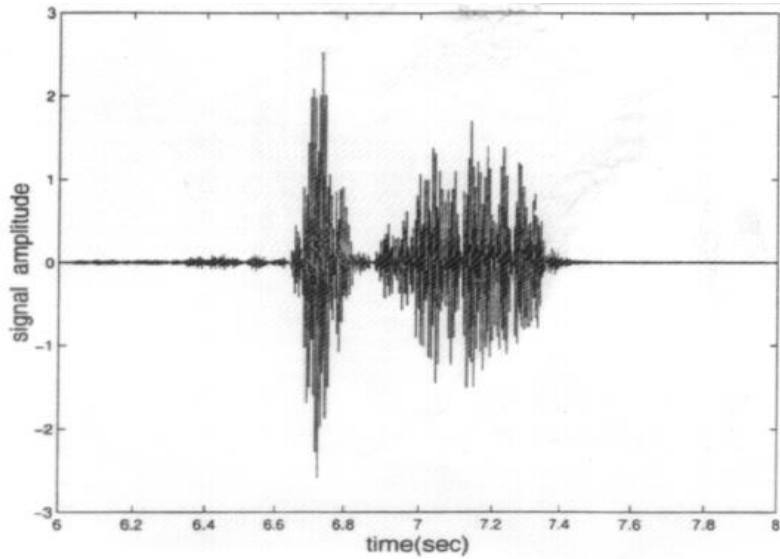
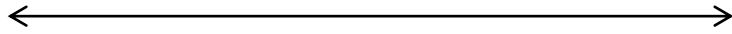
Περίοδος ισοδύναμου περιοδικού σήματος :

$$T = \frac{N}{400}$$

Για $N=800$ παίρνουμε $T = 2 \text{ sec}$

$$f_0 = \frac{f_1}{N} = 0,5 \text{ Hz}$$

$T=2\text{sec}$



$$f_1 = \frac{1}{T_1} = 400 \text{ Hz}$$

Under Sampling

