Ακουστικά Κύματα

Η Ακουστική εξίσωση

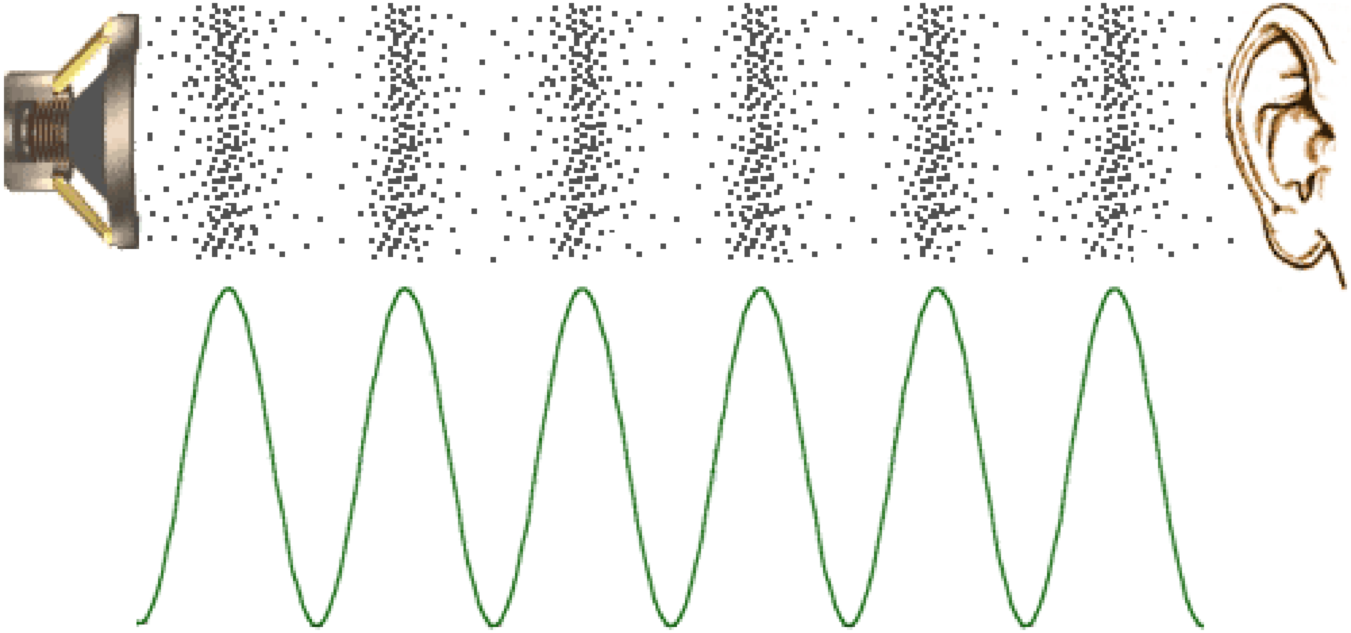
Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

Ακουστικά κύματα

Ακουστικά κύματα είναι κύματα συμπιεστότητας (compressional waves) που διαδίδονται σε ένα συμπιεστό μέσο.

Προέρχονται από μία διαταραχή της κατάστασης ισορροπίας του μέσου, που μεταβάλλει την κινηματική κατάσταση των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου.

Η διαταραχή διαδίδεται στο χώρο.



https://www.mediacollege.com/audio/01/sound-waves.html

Διατύπωση της ακουστικής εξίσωσης

$$p = p(\vec{x},t)$$ Πίεση

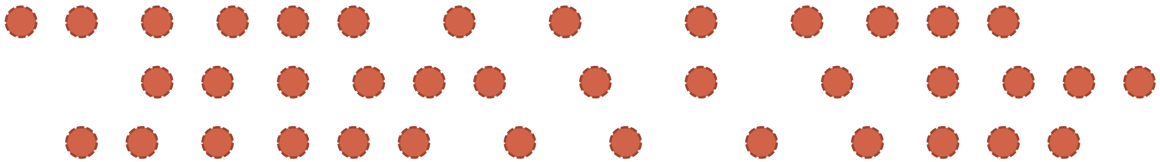
$$\rho = \rho(\vec{x},t)$$ Πυκνότητα

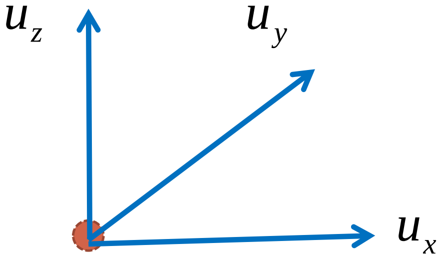
$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$$ Ταχύτητα στοιχειωδών σωματιδίων (particle velocity)

Υποθέσεις :

- Ομοιογενές και ισοτροπικό ρευστό.
- Απουσία μηχανισμών συνεκτικότητας ή μετάδοσης θερμότητας.

Κίνηση στοιχειωδών σωματιδίων

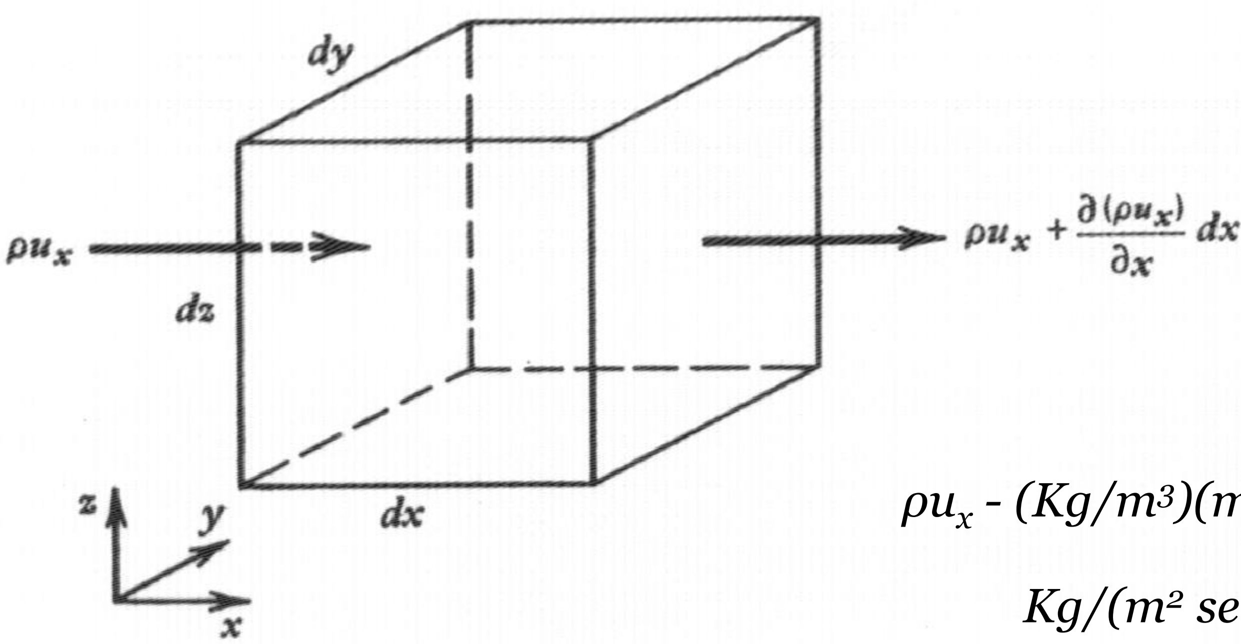




$$\vec{u} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$$

Διατύπωση της ακουστικής εξίσωσης

Ο ρυθμός ροής του υγρού δια μέσου του όγκου πρέπει να είναι ίσος με το ρυθμό αύξησης ή μείωσης της μάζας του ρευστού.

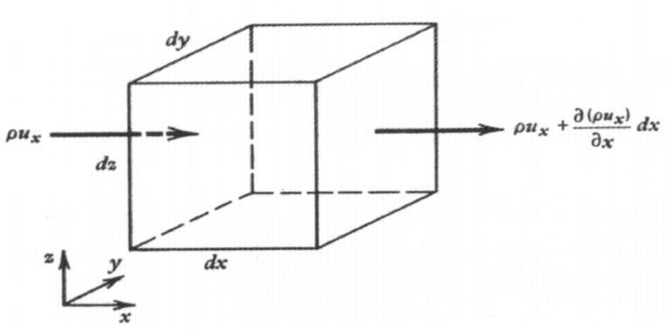


ρu_x - $(Kg/m^3)(m/sec)$

$Kg/(m^2\ sec)$

$$\{\rho u_x - [\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx]\} dy dz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV$$

$$-[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}] dV = -[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] dV$$

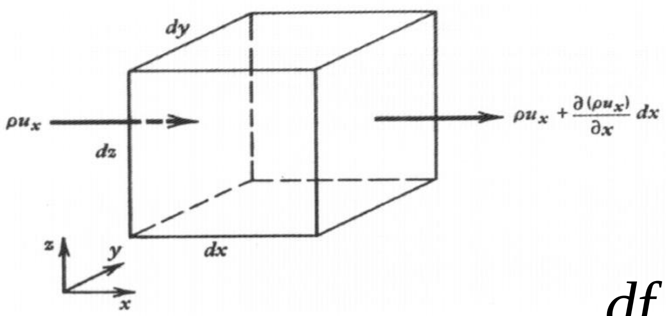


$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Μεταβολή μάζας στη μονάδα του χρόνου

$$\boxed{-[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] = \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Εξίσωση συνέχειας



$$d\vec{f} = \vec{a}dm$$

2ος Νόμος Newton

$$df_x = [p - (p + \frac{\partial p}{\partial x}dx)]dydz = -\frac{\partial p}{\partial x}dV$$

$$d\vec{f} = -\nabla p dV \longrightarrow \vec{a}dm = -\nabla p dV$$

$$\vec{a}(x,y,z,t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{u}(x+u_x dt, y+u_y dt, z+u_z dt, t+dt) - \vec{u}(x,y,z,t)}{dt}$$

$$\vec{u} = (x+u_x dt, y+u_y dt, z+u_z dt, t+dt) \approx$$

Ανάπτυγμα Taylor

$$\vec{u}(x,y,z,t) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}u_x dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}u_y dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}u_z dt$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$$

$$\vec{a}\,dm = -\nabla p\,dV \qquad dm = \rho\,dV$$

$$\boxed{-\nabla p = \rho\{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\}}$$

Εξίσωση Euler

Σχέση πίεσης πυκνότητας και εντροπίας

Θεωρώντας αδιαβατικές μεταβολές στο ρευστό, η καταστατική εξίσωση δεν περιλαμβάνει όρο που να σχετίζεται με την εντροπία και εκφράζεται μέσω της γενικής σχέσης

$$\boxed{p = g(\rho)}$$

Χαρακτηριστική για κάθε ρευστό

Καταστατική Εξίσωση

$$\rho = \rho_0(\vec{x},t) + \varepsilon\rho_1(\vec{x},t)$$

$$p = p_0(\vec{x},t) + \varepsilon\, p_1(\vec{x},t)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0(\vec{x},t) + \varepsilon\vec{u}_1(\vec{x},t)$$

Μικρές διαταραχές

Εξίσωση Συνέχειας

$$\frac{\partial(\rho_0 + \varepsilon\rho_1)}{\partial t} + \nabla\cdot\{(\rho_0 + \varepsilon\rho_1)(\vec{u}_0 + \varepsilon\vec{u}_1)\} = 0$$

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \nabla\cdot\{\rho_0\vec{u}_0\} = 0$$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \nabla\cdot\{\rho_0\vec{u}_1 + \rho_1\vec{u}_0\} = 0$$

Εξισ. Συνέχειας $$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) = 0$$

Εξίσωση Euler $$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}$$

Καταστατική $$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho_1$$

Υποθέτουμε ότι $\vec{u}_0 = 0$ $$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho_0 \vec{u}_0\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

$$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) = 0$$

Απόκλιση

Παραγώγιση

$$-\nabla^2 p_1 = \nabla \cdot (\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t})$$

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \nabla \cdot (\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}) = 0$$

$$\boxed{-\nabla^2 p_1 = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}}$$

Υποθέτουμε ότι $\vec{u}_0 = 0$

Καταστατική

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \rho_1 \Rightarrow \rho_1 = p_1 \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0}$$

$$-\nabla^2 p_1 = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \equiv c^2$$

Θερμοδυναμικός Ορισμός Ταχύτητας

$$\boxed{\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}}$$

Κυματική Εξίσωση

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

Ακουστική εξίσωση με πηγή και με
μεταβολή της πυκνότητας ισορροπίας
με τις χωρικές μεταβολές

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{\rho_0}\nabla\rho_0 \cdot \nabla p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial Q_1}{\partial t}$$