

Ακουστικά Κύματα

Η Ακουστική εξίσωση

Γενικές Λύσεις

## Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

Εξίσωση για την ακουστική πίεση

$$\nabla^2 p_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{c(\vec{x})^2} \frac{\partial^2 p_1(\vec{x}, t)}{\partial t^2}$$

Γραμμικοποιημένη εξίσωση

$$\rho = \rho_0(\vec{x}, t) + \varepsilon \rho_1(\vec{x}, t)$$

$$p = p_0(\vec{x}, t) + \varepsilon p_1(\vec{x}, t)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0(\vec{x}, t) + \varepsilon \vec{u}_1(\vec{x}, t)$$

$c(\vec{x})$  : Ταχύτητα διάδοσης του κύματος (ήχου)

$$\nabla^2 p_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{c(\vec{x})^2} \frac{\partial^2 p_1(\vec{x}, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{Καρτεσιανό σύστημα}$$

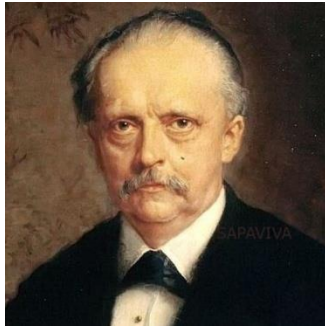
Χωρισμός μεταβλητών

$$p_1(\vec{x}, t) = \bar{p}(\vec{x})T(t)$$

$$\bar{p}(\vec{x}) \equiv p(\vec{x})$$

$$T(t)\nabla^2 p(\vec{x}) = \frac{1}{c(\vec{x})^2} p(\vec{x}) \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

$$\nabla^2 p_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{c(\vec{x})^2} \frac{\partial^2 p_1(\vec{x}, t)}{\partial t^2}$$



1821-1894

## Εξίσωση Helmholtz

$$\nabla^2 p(\vec{x}) + \frac{\omega^2}{c(\vec{x})^2} p(\vec{x}) = 0$$

$$T(t) \nabla^2 p(\vec{x}) = \frac{1}{c(\vec{x})^2} p(\vec{x}) \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

$$\frac{c(\vec{x})^2}{p(\vec{x})} \nabla^2 p(\vec{x}) = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

$$T(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad T(t) = A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)$$

Θεωρούμε χρονική εξάρτηση

$$T = e^{-i\omega t}$$

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x})T(t)$$

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

**Αρμονικά κύματα**

## Χωρισμός μεταβλητών

Καρτεσιανό σύστημα

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$p(\vec{x}) = p(x, y, z) = p_x(x) p_y(y) p_z(z)$$

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot \frac{1}{p_x} + \frac{d^2 p_y}{dy^2} \cdot \frac{1}{p_y} + \frac{d^2 p_z}{dz^2} \cdot \frac{1}{p_z} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot \frac{1}{p_x} = -k_x^2 \quad \frac{d^2 p_y}{dy^2} \cdot \frac{1}{p_y} = -k_y^2 \quad \frac{d^2 p_z}{dz^2} \cdot \frac{1}{p_z} = -k_z^2$$

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot \frac{1}{p_x} + \frac{d^2 p_y}{dy^2} \cdot \frac{1}{p_y} + \frac{d^2 p_z}{dz^2} \cdot \frac{1}{p_z} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

Αριθμός κύματος  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$

Υποθέτουμε ότι  $k_x, k_y, k_z$  σταθερά

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} + k_x^2 p_x = 0$$

$$p_x(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}$$

$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} + k_y^2 p_y = 0$$

$$p_y(y) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y}$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} + k_z^2 p_z = 0$$

$$p_z(z) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z}$$



Υποθέτουμε ότι  $k_x, k_y, k_z$  σταθερά

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} + k_x^2 p_x = 0 \quad p_x(x) = A'_1 \cos(k_x x) + A'_2 \sin(k_x x)$$

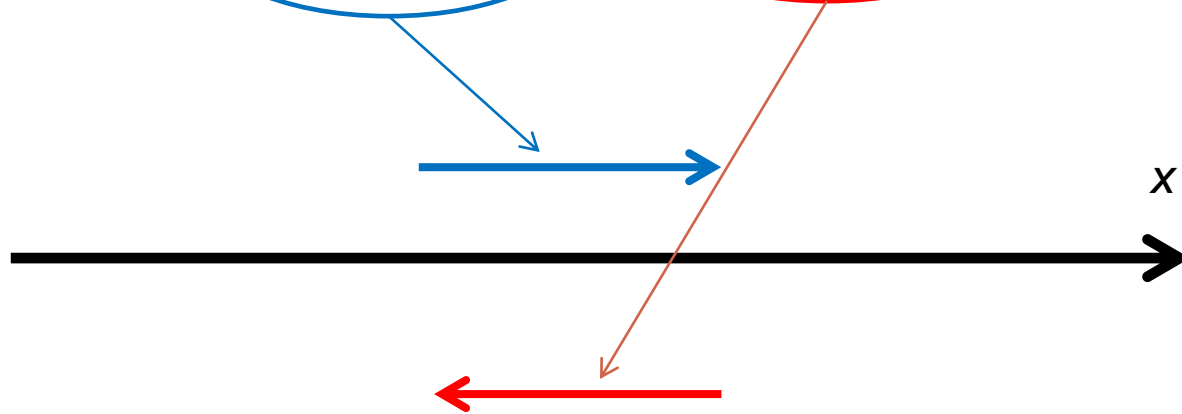
$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} + k_y^2 p_y = 0 \quad p_y(y) = B'_1 \cos(k_y y) + B'_2 \sin(k_y y)$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} + k_z^2 p_z = 0 \quad p_z(z) = C'_1 \cos(k_z z) + C'_2 \sin(k_z z)$$

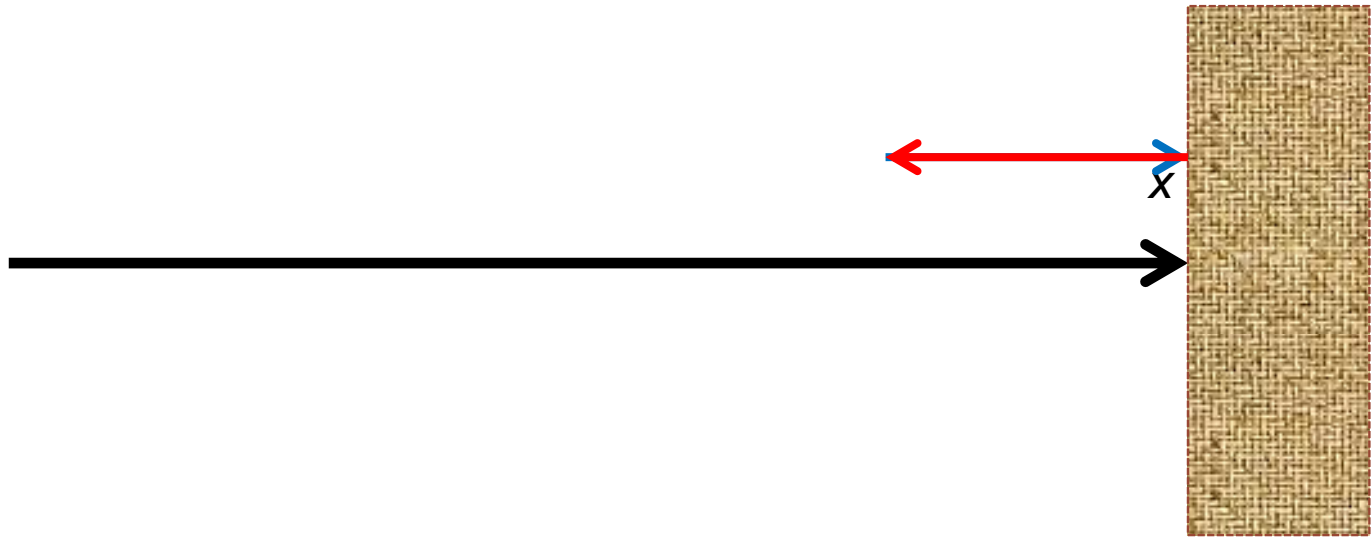
Σημασία κάθε όρου στην κυματική διάδοση

$$p_1(x, t) = p_x(x)e^{-i\omega t} = (A_1e^{ik_x x} + A_2e^{-ik_x x})e^{-i\omega t}$$

$$= A_1e^{i(k_x x - \omega t)} + A_2e^{i(-k_x x - \omega t)}$$

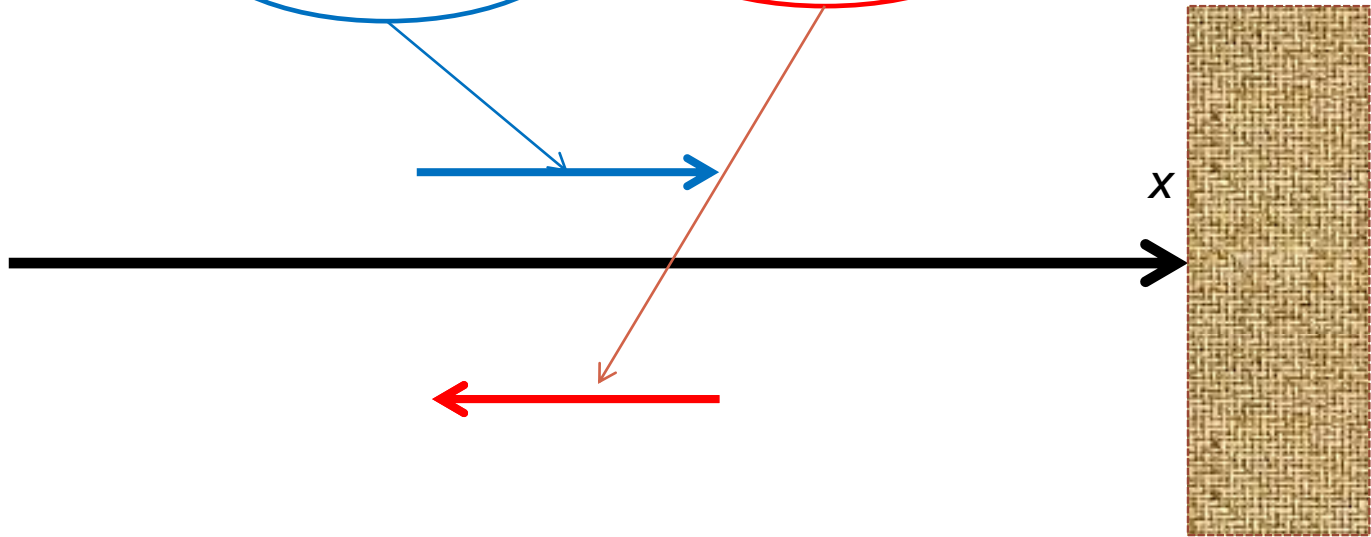


$$\begin{aligned} p_1(x,t) &= p_x(x)e^{-i\omega t} = (A_1e^{ik_x x} + A_2e^{-ik_x x})e^{-i\omega t} \\ &= A_1e^{i(k_x x - \omega t)} + A_2e^{i(-k_x x - \omega t)} \end{aligned}$$



$$p_1(x,t) = p_x(x)e^{-i\omega t} = (A_1e^{ik_x x} + A_2e^{-ik_x x})e^{-i\omega t}$$

$$= A_1e^{i(k_x x - \omega t)} + A_2e^{i(-k_x x - \omega t)}$$

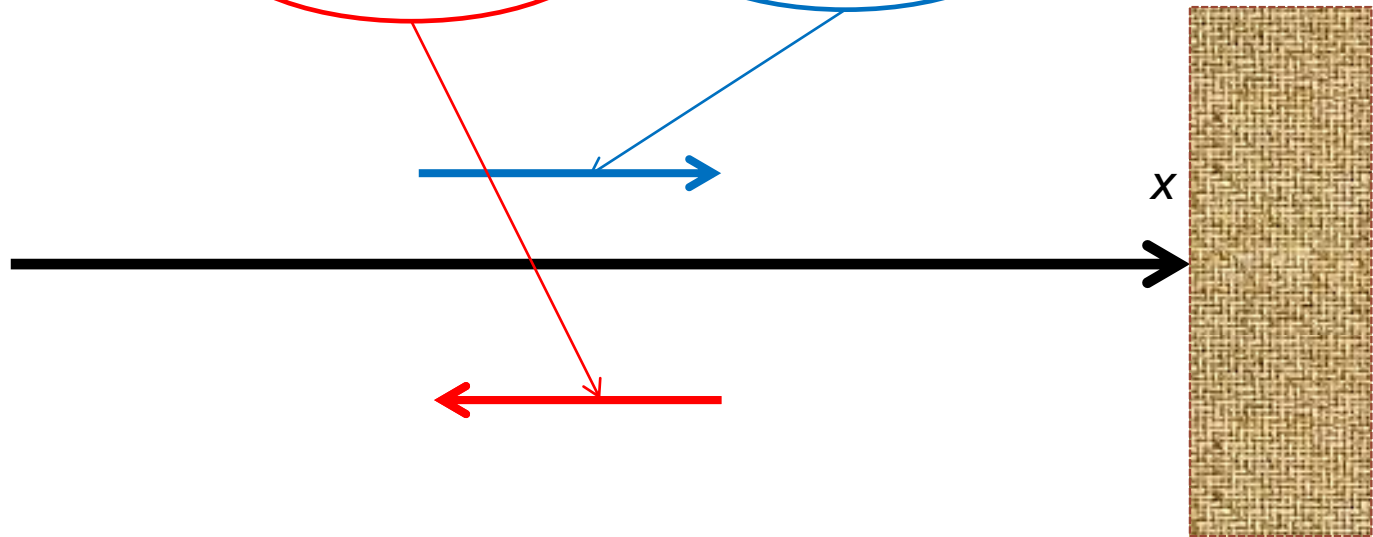


Εάν

$$T = e^{i\omega t}$$

$$p_1(x, t) = p_x(x) e^{i\omega t} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}) e^{i\omega t}$$

$$= A_1 e^{i(k_x x + \omega t)} + A_2 e^{i(-k_x x + \omega t)}$$



## Διάδοση σε τρεις διαστάσεις

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$p(x, y, z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z)$$

$$p_x(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}$$

$$p_y(y) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y}$$

$$p_z(z) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z}$$

$$p_1(x, y, z, t) = A_1 B_1 C_1 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

$$p_1(x, y, z, t) = A_1 B_1 C_1 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

Όδευση προς την κατεύθυνση των θετικών των  
αντίστοιχων αξόνων

$$\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y + \vec{k}_z = (k_x, k_y, k_z)$$

$$\vec{x} = (x, y, z)$$

$$p_1(x, y, z, t) = D e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$p_1(x, y, z, t) = De^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

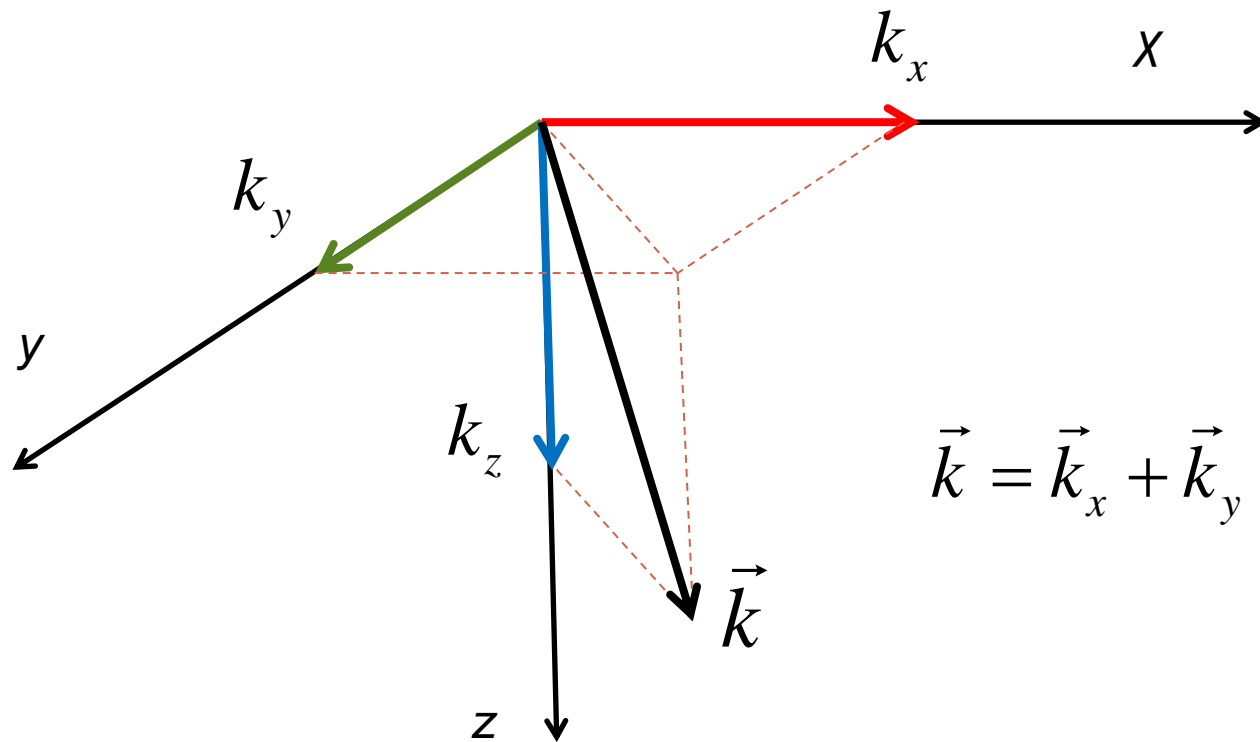
Φάση κύματος

$$p_1(x, y, z, t) = De^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi)}$$

Αρχική Φάση

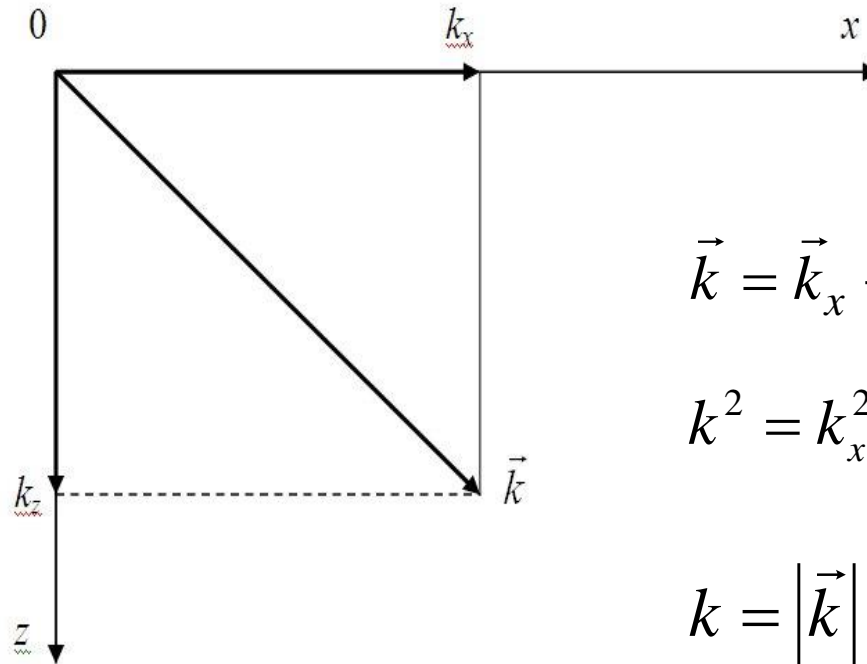


# Ο αριθμός κύματος ως διανυσματικό μέγεθος



$$\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y + \vec{k}_z$$

# Ο αριθμός κύματος ως διανυσματικό μέγεθος



$$\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$$

# Ο αριθμός κύματος ως διανυσματικό μέγεθος

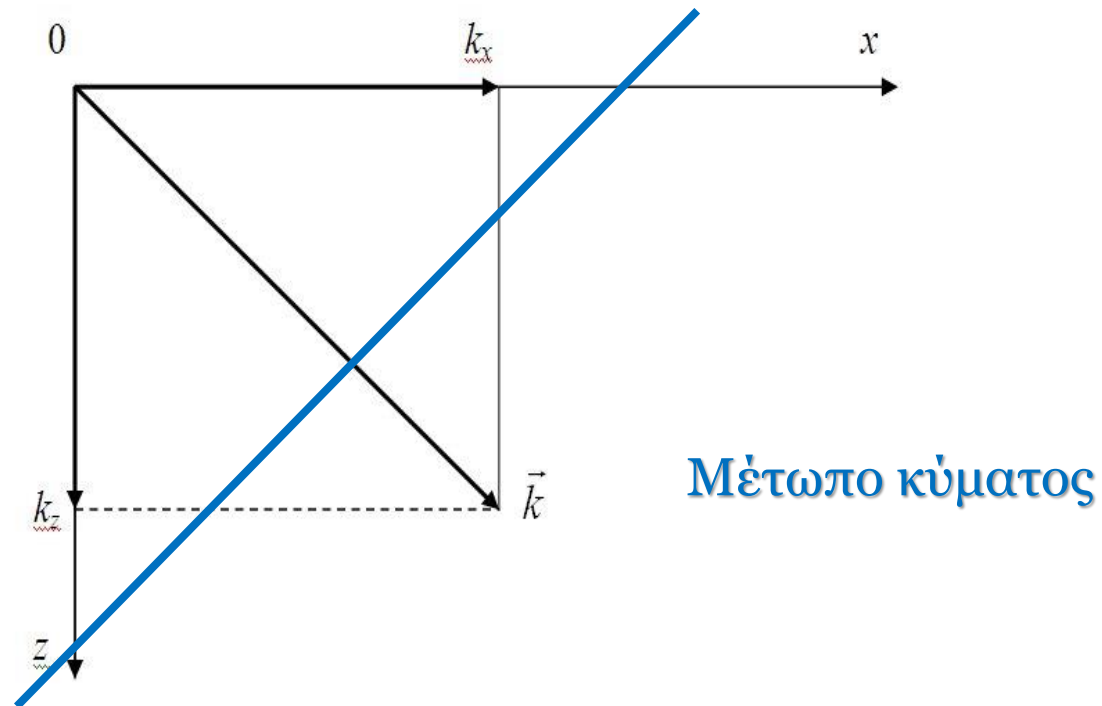
## Μέτωπο κύματος

Γεωμετρικός τόπος των σημείων σταθερής φάσης σε συγκεκριμένο χρόνο

$$p_1(x, y, z, t) = De^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Σε δύο διαστάσεις η εξίσωση  $\vec{k} \cdot \vec{x} - C = k_x x + k_y y - C = 0$  αντιπροσωπεύει ευθεία κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{k}$

# Ο αριθμός κύματος ως διανυσματικό μέγεθος

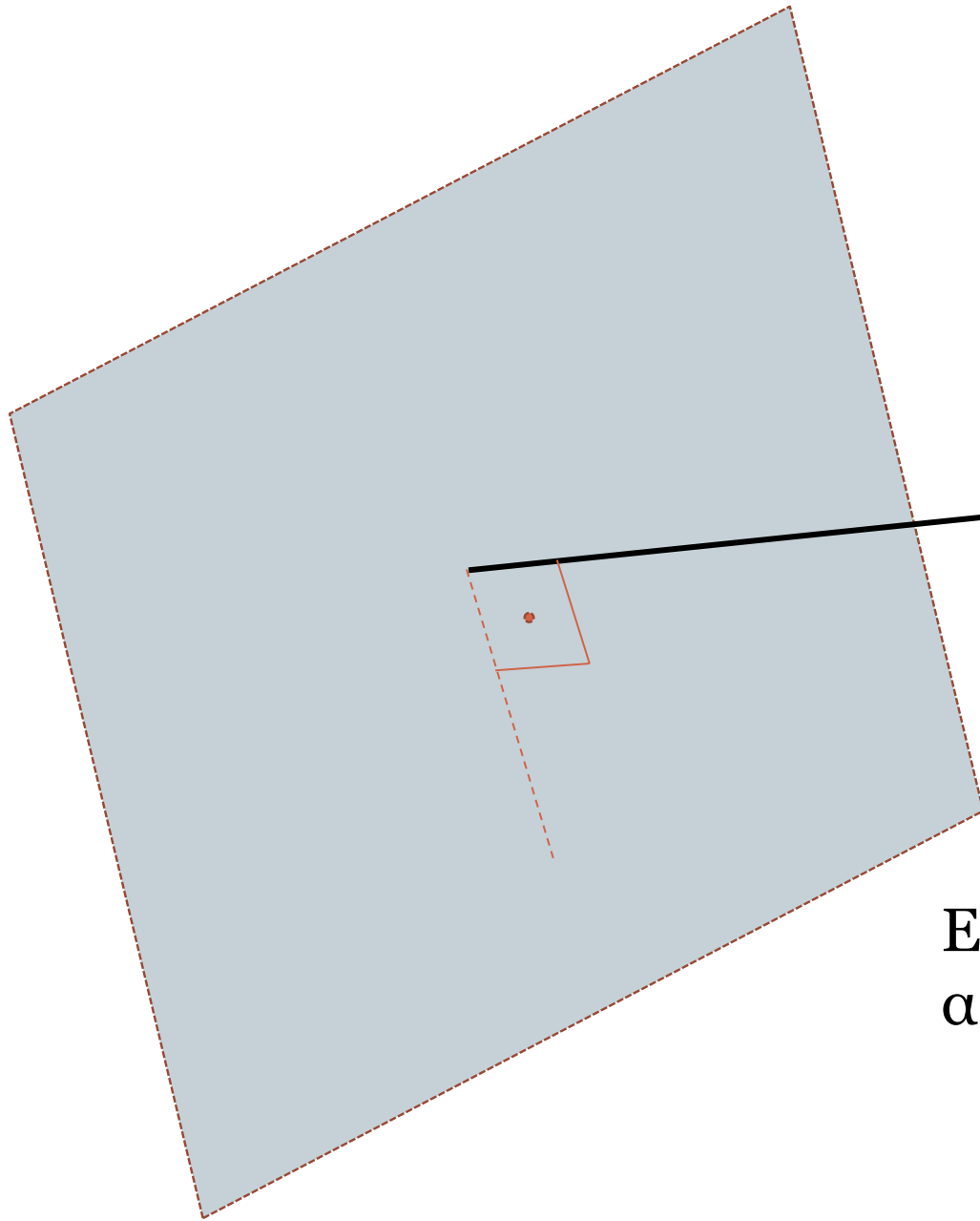


Στο χώρο

$$p_1(x, y, z, t) = D e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Σε τρεις διαστάσεις η εξίσωση  $\vec{k} \cdot \vec{x} - C = k_x x + k_y y + k_z z - C = 0$  αντιπροσωπεύει επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{k}$

Επίπεδο Κύμα



Στο χώρο

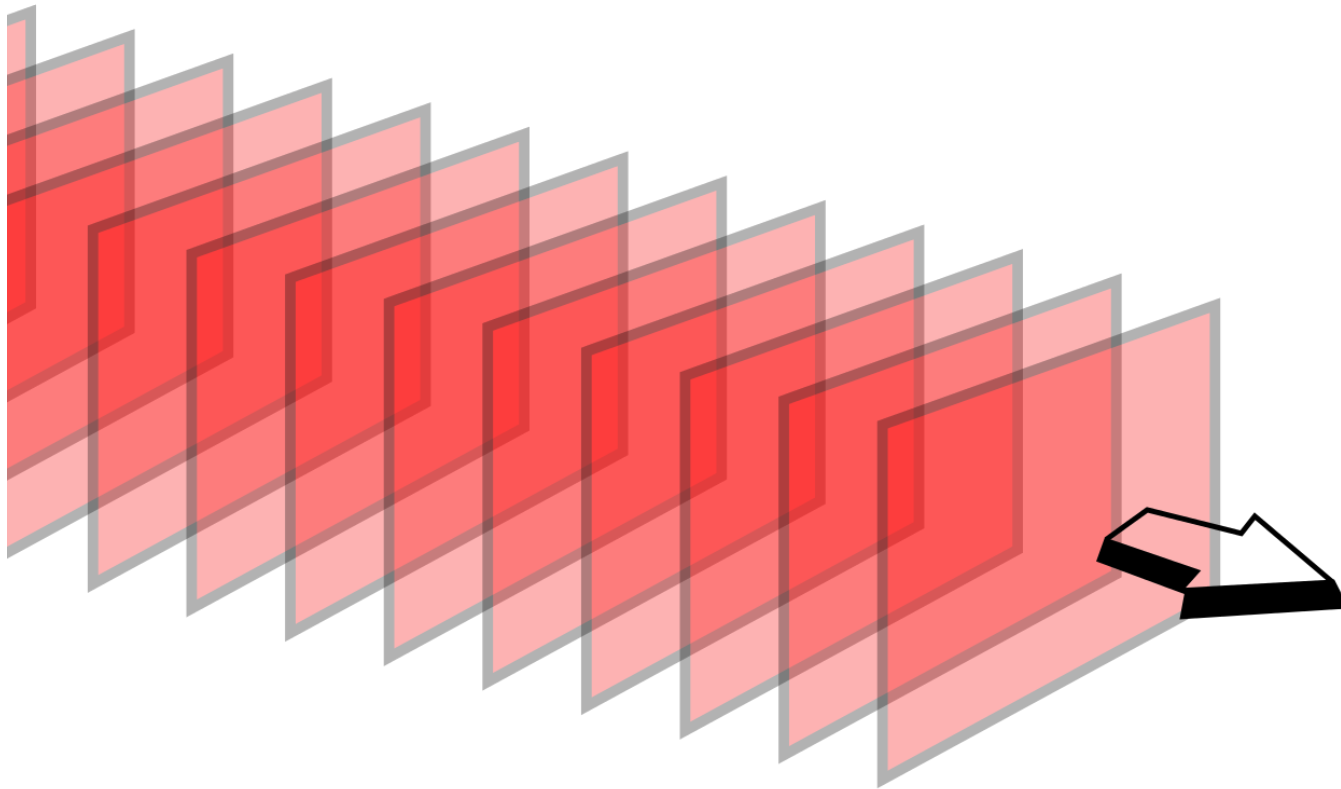
$$p_1(x, y, z, t) = De^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$\vec{k}$

Μέτωπο κύματος

Επίπεδο κάθετο στον  
αριθμό κύματος

Επίπεδο Κύμα



Επίπεδο Κύμα

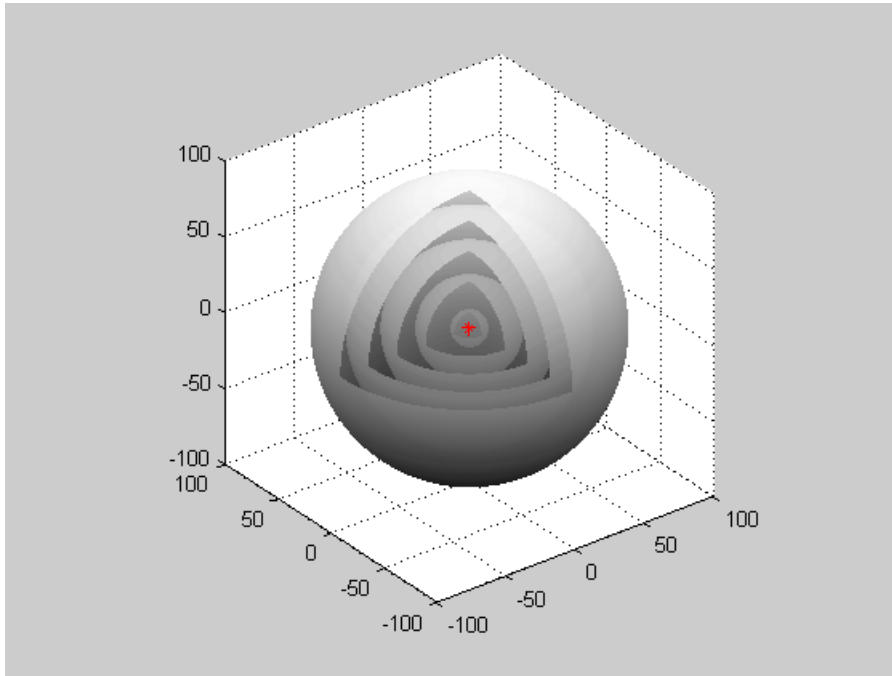
$$\nabla^2 p_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{c(\vec{x})^2} \frac{\partial^2 p_1(\vec{x}, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

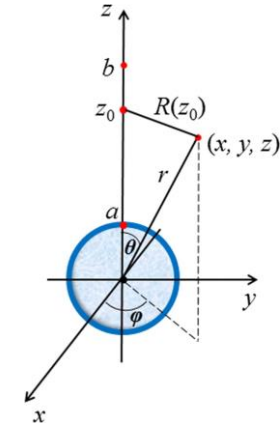
Σφαιρική συμμετρία

$$\frac{\partial^2 p_1(r, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1(r, t)}{\partial t^2}$$

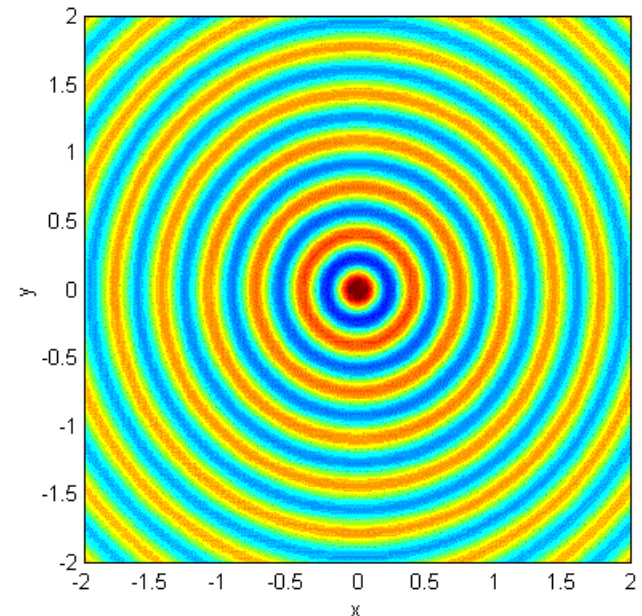




## Σφαιρικό Κύμα



$$\frac{\partial^2 p(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(r,t)}{\partial t^2}$$



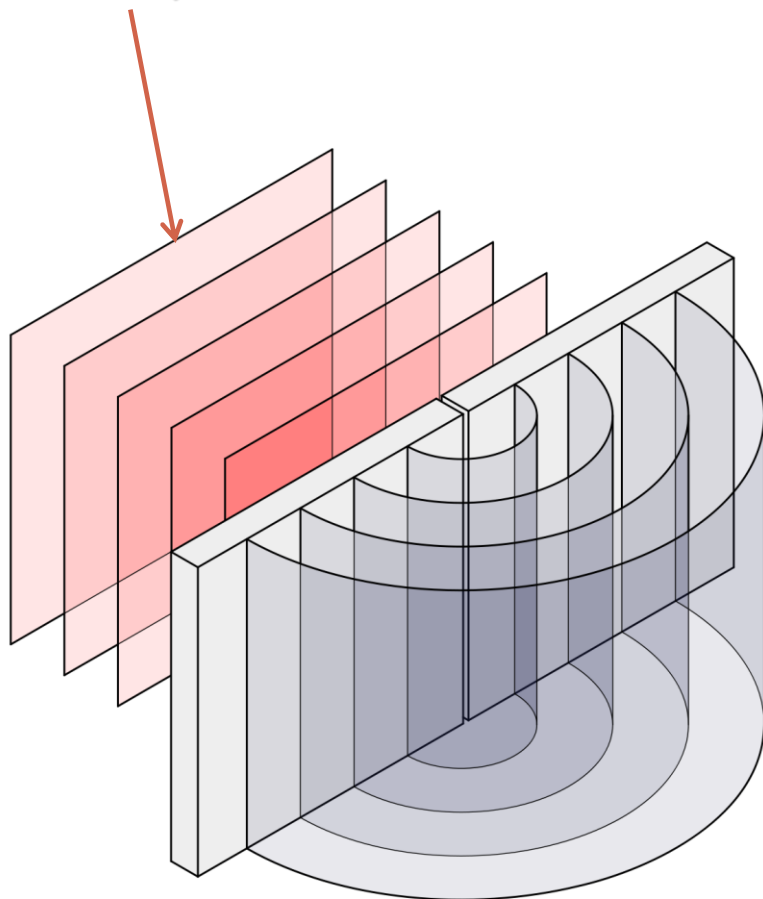
$$\nabla^2 p_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{c(\vec{x})^2} \frac{\partial^2 p_1(\vec{x}, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

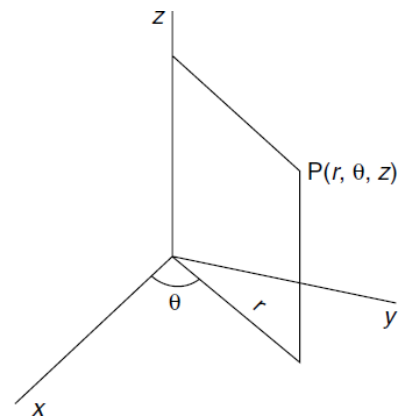
Αξονική συμμετρία

$$\frac{\partial^2 p_1(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_1(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 p_1(r, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1(r, z, t)}{\partial t^2}$$

Επίπεδο Κύμα



Κυλινδρικό Κύμα



$$\frac{\partial^2 p(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 p(r, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(r, z, t)}{\partial t^2}$$

Διάδοση σε μία διεύθυνση ( $x$ )

$$p_1(x, t) = A_1 e^{i(k_x x - \omega t)}$$

Πραγματική πίεση

$$\text{Re}(p_1(x, t)) = \text{Re}(A_1 e^{i(k_x x - \omega t)})$$

$$\tilde{p}_1(x, t) = A_1 \cos(k_x x - \omega t)$$

Με διαφορά φάσης  $T(t) = e^{-i(\omega t - \Delta\varphi)}$

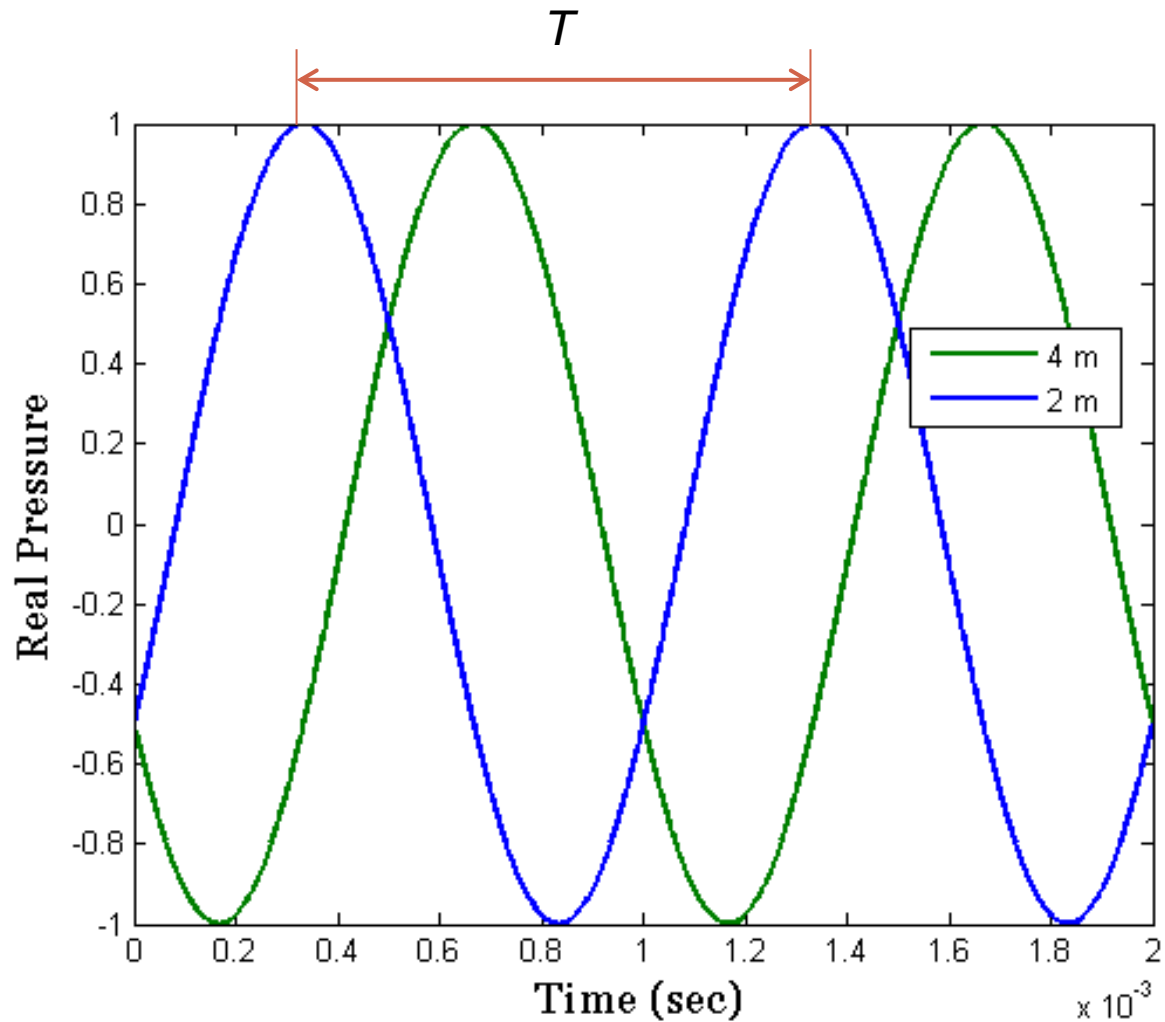
$$\tilde{p}_1(x, t) = A_1 \cos(k_x x - \omega t + \Delta\varphi)$$

## Διάδοση σε μία διεύθυνση

$$\omega = 2\pi f \quad f: \text{συχνότητα σε Hz}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad T: \text{περίοδος κύματος}$$

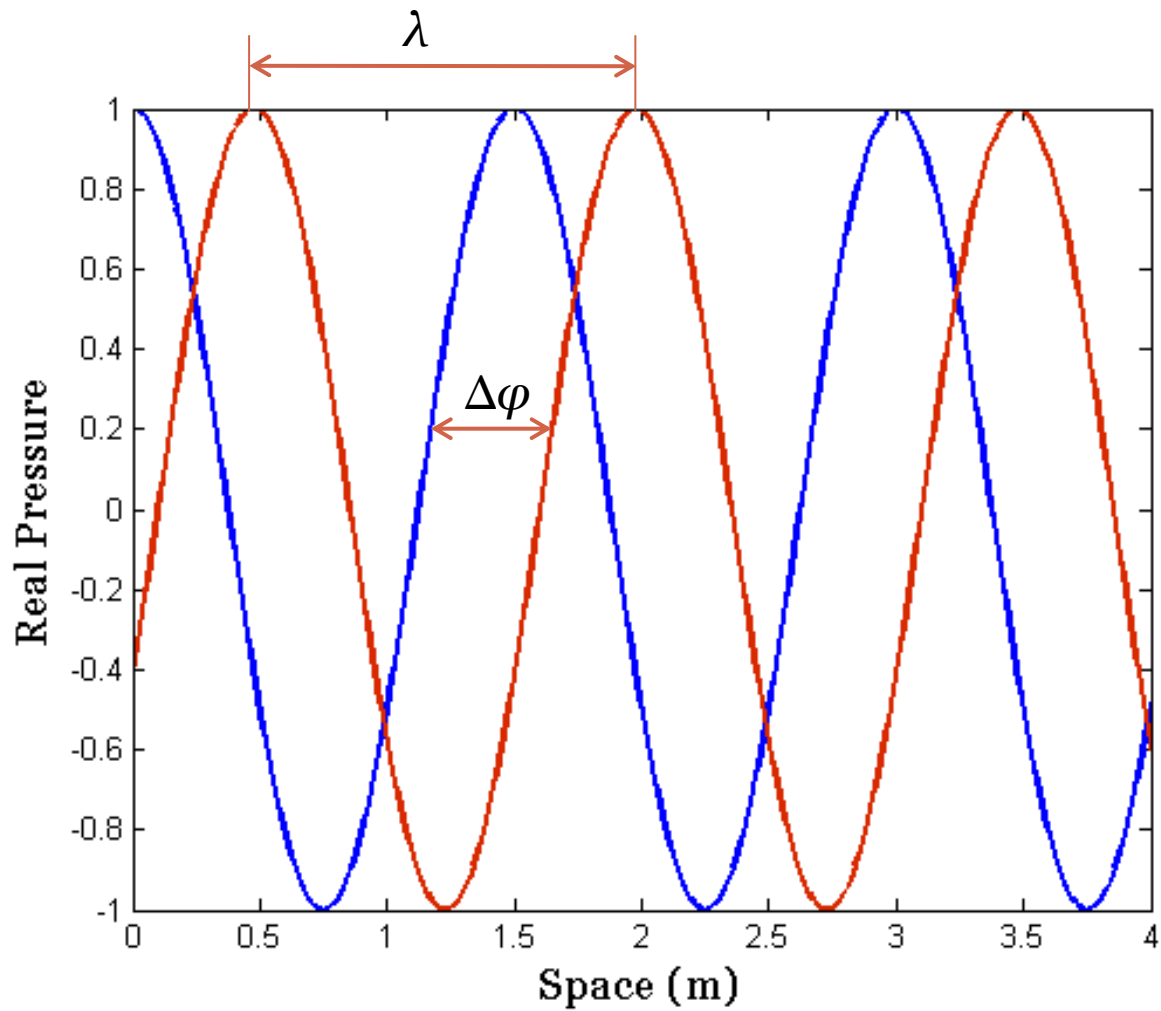
$$\lambda = cT \quad \lambda: \text{μήκος κύματος}$$



$$f=1000 \text{ Hz}, c=1500 \text{ m/sec}, A_1 = 1$$

$$T=0,001 \text{ sec}$$

$$\tilde{p}_1(x,t) = A_1 \cos(k_x x - \omega t)$$



$$f=1000 \text{ Hz}, c=1500 \text{ m/sec}, t=1 \text{ sec}, A_1=1$$

$$\lambda=1,5 \text{ m}$$

$$\tilde{p}_1(x,t) = A_1 \cos(k_x x - \omega t + \Delta\varphi)$$