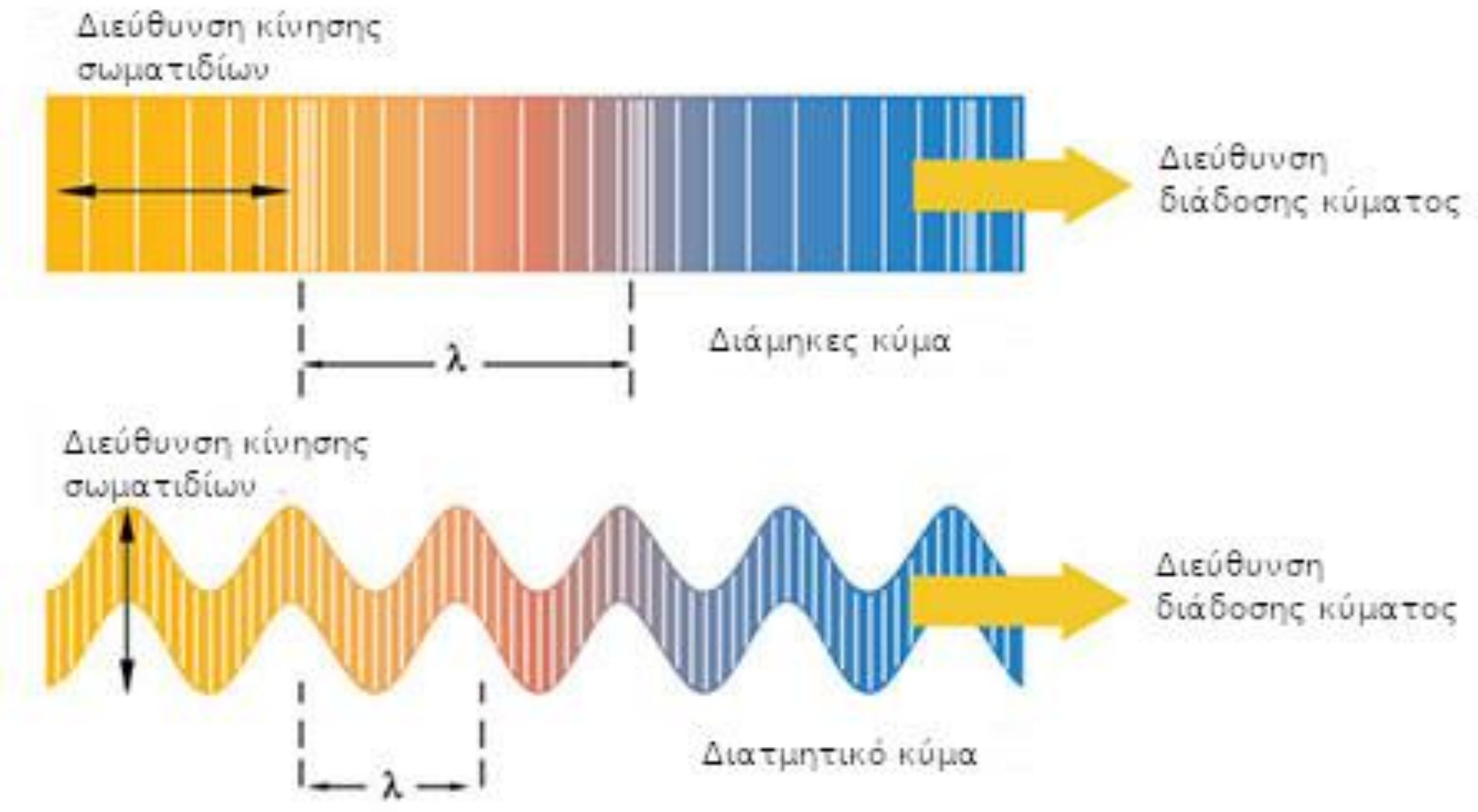
Διάδοση σε ελαστικούς χώρους

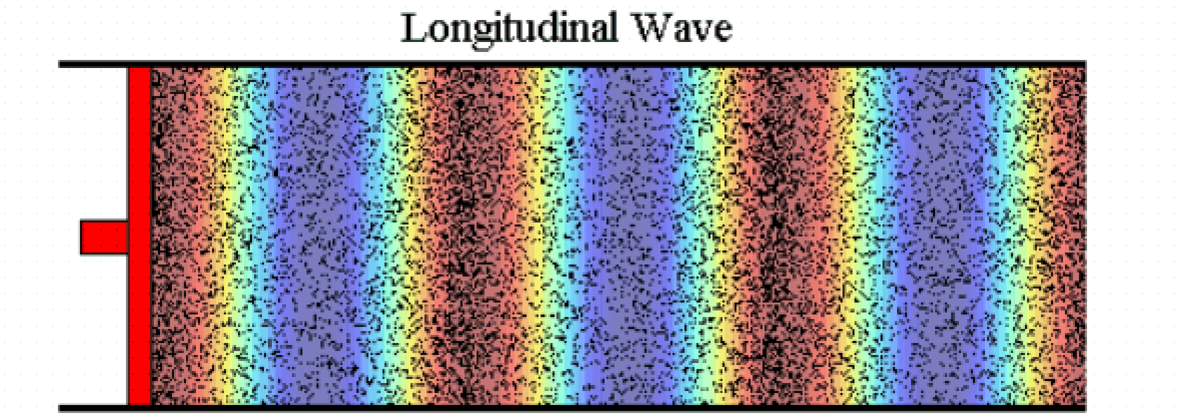
Στοιχεία από τη μηχανική του στερεού σώματος

Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

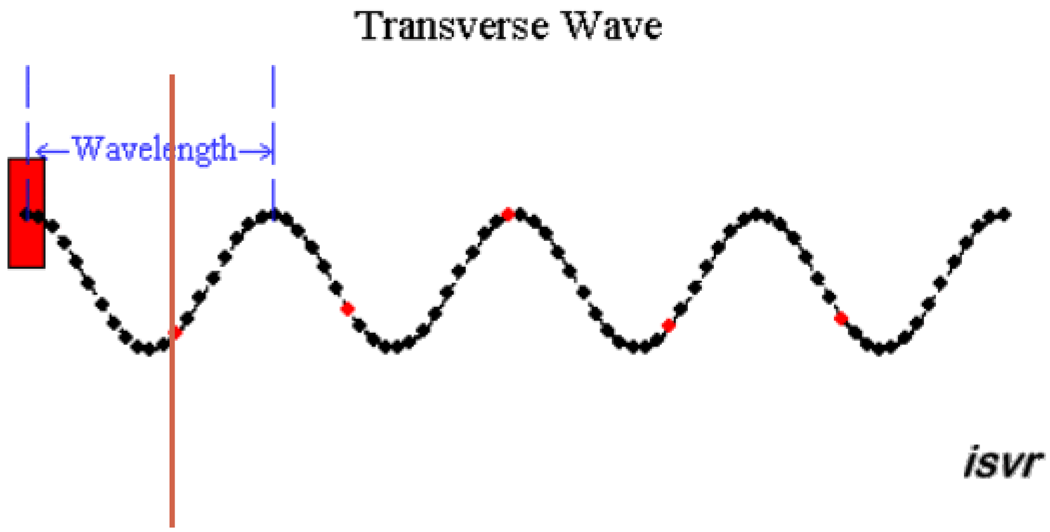
Διαμήκη και διατμητικά κύματα



Διάμηκες κύμα



Εγκάρσιο κύμα

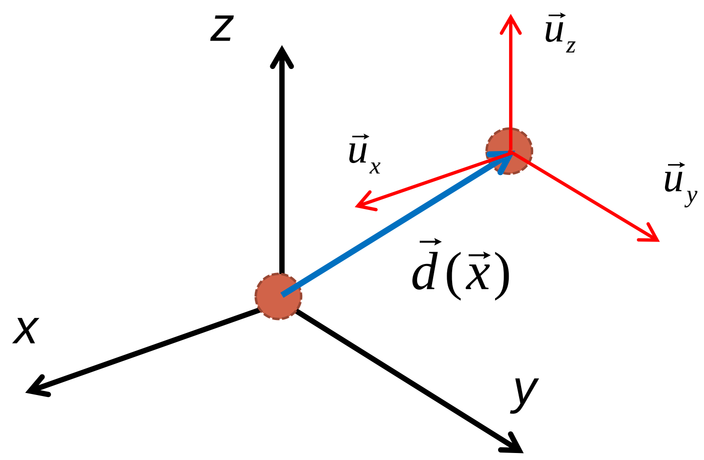


Ταχύτητα στοιχειωδών σωματιδίων και μετατόπιση

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

$$\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$$

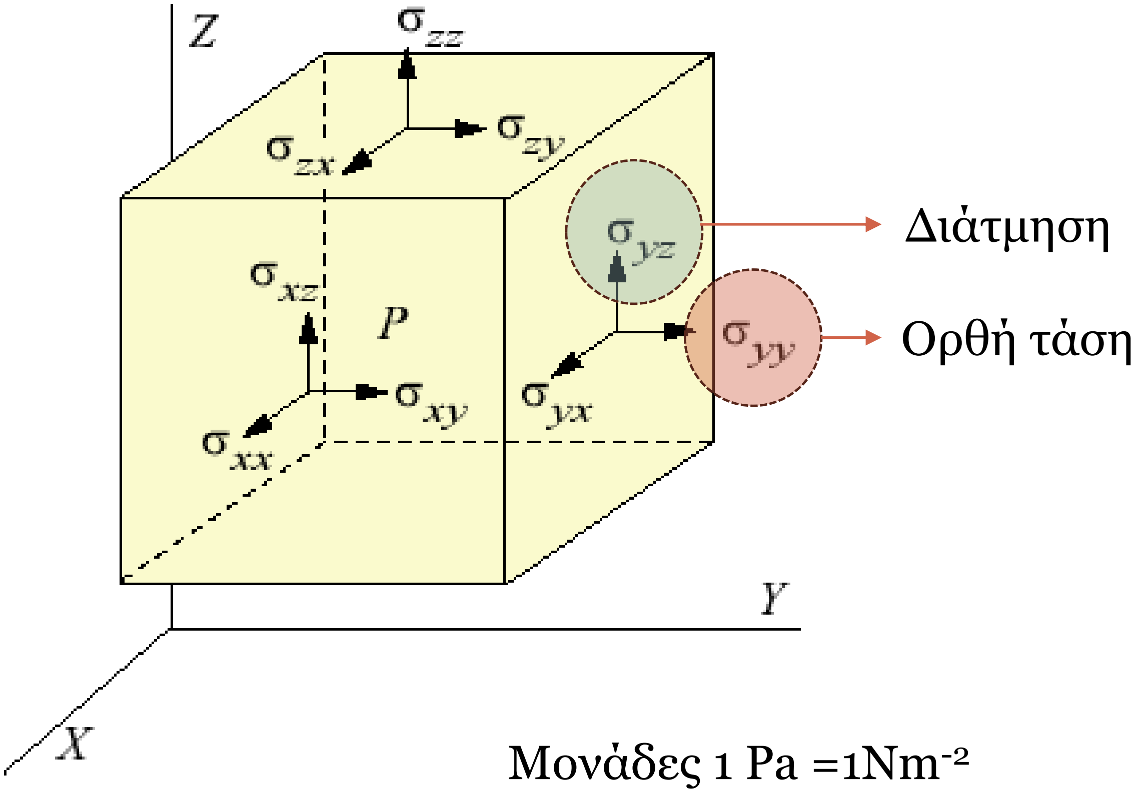
$$\vec{x} = \left(x, y, z\right)$$



Από τη Μηχανική των στερεών σωμάτων

Τάση (Stress) σ - παραμόρφωση (Strain) ε

Τάση = Δύναμη/Επιφάνεια



Μονάδες 1 Pa =1Nm^{-2}

Από τη Μηχανική των στερεών σωμάτων

Τάση σ - παραμόρφωση ε

Τάση = Δύναμη/Επιφάνεια

Τανυστής τάσεων (Stress tensor)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

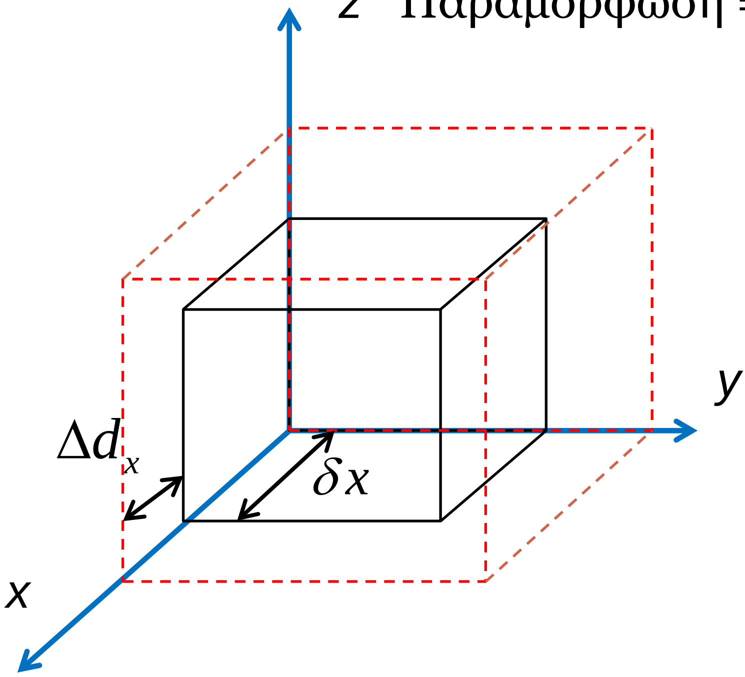
Σε ρευστά μέσα δεν υπάρχει διάτμηση $\sigma_{ij} = 0, i \neq j \quad \sigma_{ii} = -p$

$$\vec{d}\left(\vec{x}\right)=\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}=\vec{d}\left(\vec{x}_0\right)+\begin{bmatrix} \frac{\partial d_x}{\partial x} & \frac{\partial d_x}{\partial y} & \frac{\partial d_x}{\partial z} \\ \frac{\partial d_y}{\partial x} & \frac{\partial d_y}{\partial y} & \frac{\partial d_y}{\partial z} \\ \frac{\partial d_z}{\partial x} & \frac{\partial d_z}{\partial y} & \frac{\partial d_z}{\partial z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}=\vec{d}\left(\vec{x}_0\right)+\mathbf{J}\boldsymbol{\delta}$$

$$\boldsymbol{\delta}=\vec{x}-\vec{x}_0$$

Παραμόρφωση = Μεταβολή μήκους/μονάδα μήκους

Παραμόρφωση = Μεταβολή μήκους/μονάδα μήκους



$$\varepsilon_{xx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\Delta d_x}{\delta x} = \frac{\partial d_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial d_i}{\partial x_i}$$

$$i = x, y, z \quad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$$

Παραμόρφωση = Μεταβολή μήκους/μονάδα μήκους

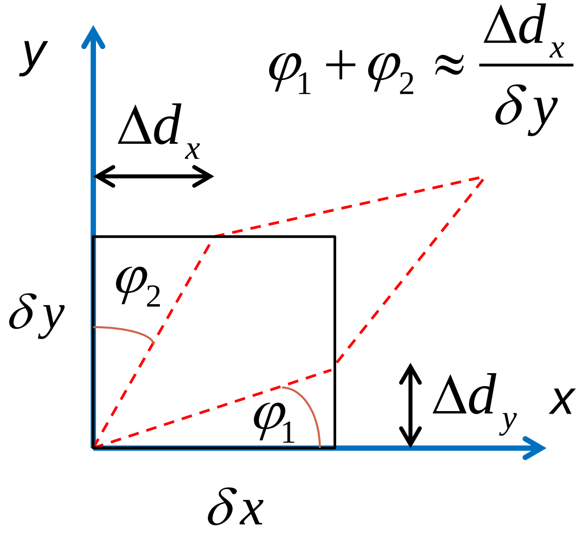
Διάτμηση

Γωνιακή παραμόρφωση ε_{xy}= ½ (φ_1 + φ_2)

Για φ_1 , φ_2 μικρές $\varphi_1 \approx \tan\varphi_1, \quad \varphi_2 \approx \tan\varphi_2$

$$\tan\varphi_1 \approx \frac{\Delta d_y}{\delta x}, \quad \tan\varphi_2 \approx \frac{\Delta d_x}{\delta y}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 \approx \frac{\Delta d_x}{\delta y} + \frac{\Delta d_y}{\delta x} \qquad \lim(\delta x, \delta y) \to 0$$



$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_y}{\partial x} + \frac{\partial d_x}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i}\right)$$

Παραμόρφωση = Μεταβολή μήκους/μονάδα μήκους

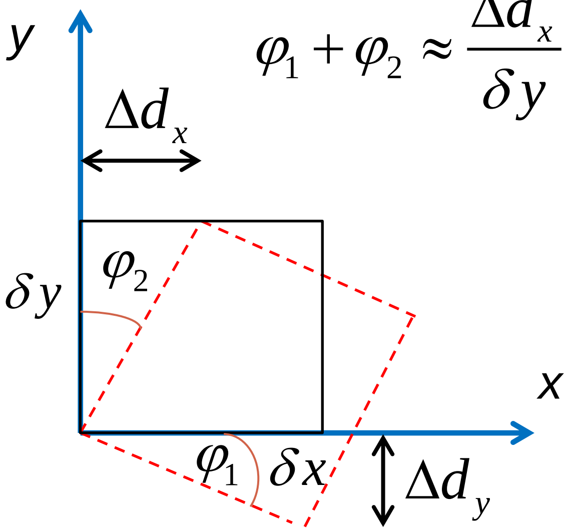
Περιστροφή

Γωνιακή παραμόρφωση (περιστροφή) $\omega_{xy} = ½ (\varphi_1 + \varphi_2)$

Για φ_1, φ_2 μικρές $\quad \varphi_1 \approx \tan\varphi_1, \quad \varphi_2 \approx \tan\varphi_2$

$$\tan\varphi_1 \approx -\frac{\Delta d_y}{\delta x}, \quad \tan\varphi_2 \approx \frac{\Delta d_x}{\delta y}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 \approx \frac{\Delta d_x}{\delta y} - \frac{\Delta d_y}{\delta x} \qquad \lim(\delta x, \delta y) \to 0$$



$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_x}{\partial y} - \frac{\partial d_y}{\partial x}\right)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} - \frac{\partial d_j}{\partial x_i}\right)$$

Τανυστής παραμορφώσεων (strain tensor)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας είναι συμμετρικός : $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

Τανυστής περιστροφής (rotation tensor)

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_{xx} & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & \omega_{yy} & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & \omega_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας είναι αντισυμμετρικός : $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$

$$\mathbf{J} = \mathbf{e} + \mathbf{\Omega}$$

Από τη Μηχανική των σωμάτων

Τάση σ - παραμόρφωση ε

$$\mathrm{E} \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Μέτρα ελαστικότητας

$$K = -V\,\frac{\partial p}{\partial V}$$

Μέτρο διόγκωσης

$$K = \rho\,\frac{\partial p}{\partial \rho}$$

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Ταχύτητα ήχου στα ρευστά

Ρευστά μέσα

$$\nabla \times \vec{u} = 0$$

Η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων είναι «αστρόβιλο» μέγεθος.

$$\vec{u} = \nabla \Phi_u$$

Επομένως μπορεί να εκφραστεί μέσω μιας βαθμωτής συνάρτησης Φ_u (Lagrange)

Το ίδιο ισχύει και για τις λοιπές παραμέτρους που εξαρτώνται από την ταχύτητα, όπως π.χ την μετατόπιση.

$$\vec{d} = \nabla \Phi$$ Δυναμικό μετατόπισης

Ρευστά μέσα

$$\vec{d} = \nabla \Phi$$

$$p_1 = -K \nabla \cdot \vec{d}$$

Νόμος Hooke

$$p_1 = -K \nabla^2 \Phi$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Ρευστά μέσα

$$p_1 = -K\nabla \cdot \vec{d} = -K\nabla^2 \Phi$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

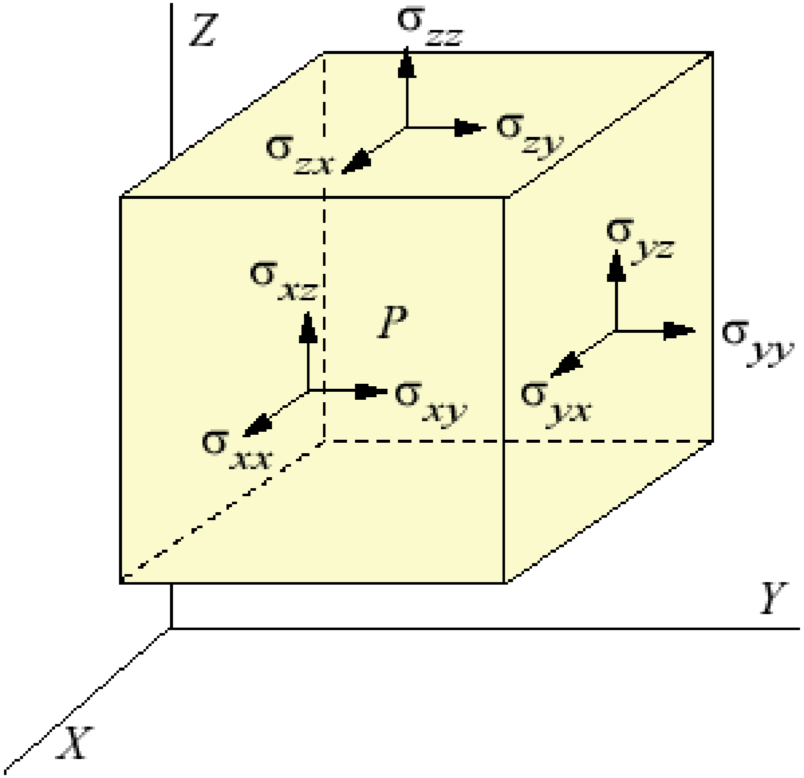
$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad K = \rho c^2$$

$$\boxed{p_1 = -\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}$$

Στερεά μέσα

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Στερεά μέσα

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i}\right)$$

Παραμόρφωση (strain)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Νόμος Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}$:

Τανυστής ακαμψίας
(Stifness Tensor)

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} c_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Στερεά μέσα

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Νόμος Hooke

$\mathbf{C}$:

Τανυστής ακαμψίας
(Stifness Tensor)

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} c_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Ο τανυστής ακαμψίας είναι τέταρτης τάξης και έχει $81 = 3^4$ στοιχεία

Λόγω συμμετρίας των τανυστών τάσεων και παραμορφώσεων τα ανεξάρτητα στοιχεία είναι 21.

Για ισοτροπικά υλικά οι ιδιότητες παραμένουν οι ίδιες σε όλες τις διευθύνσεις ο τανυστής ακαμψίας δεν εξαρτάται από περιστροφή.

Στερεά μέσα (ελαστικά και ισότροπα)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i}\right)$$ Παραμόρφωση (strain)

λ,μ Σταθερες Lamé $$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$ Νόμος Hooke

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$ Ανηγμένη διόγκωση

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \mu\left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i}\right)$$

2ος Νόμος Newton $\Longrightarrow$ $$\rho\frac{\partial^2 d_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Υπενθύμιση της γραμμ. εξίσωσης Euler σε ρευστά $$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}$$

Στερεά μέσα (ελαστικά και ισότροπα)

$$\rho \frac{\partial^2 d_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \mu \left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = \nabla \lambda \left(\nabla \cdot \vec{d} \right) + \nabla \mu \cdot \left[\nabla \vec{d} + \left(\nabla \vec{d} \right)^T \right] + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{d}) + \mu \nabla^2 \vec{d}$$

Χρήση της $\nabla^2 \vec{d} = \nabla \nabla \vec{d} - \nabla \times \nabla \times \vec{d}$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = \nabla \lambda \left(\nabla \cdot \vec{d} \right) + \nabla \mu \cdot \left[\nabla \vec{d} + \left(\nabla \vec{d} \right)^T \right] + (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{d}) - \mu \nabla \times \nabla \times \vec{d}$$

Στερεά μέσα (ελαστικά και ισότροπα)

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = \nabla\lambda\left(\nabla\cdot\vec{d}\right) + \nabla\mu\cdot\left[\nabla\vec{d} + \left(\nabla\vec{d}\right)^T\right] + (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{d}) - \mu\nabla\times\nabla\times\vec{d}$$

Σε ομογενή μέσα οι σταθερές Lame παραμένουν σταθερές

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{d}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\vec{d})}$$

Σεισμική εξίσωση σε ομογενή μέσα

Στερεά μέσα

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{d}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{d})$$

Περιστροφή :

$$\nabla^2 (\nabla \times \vec{d}) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 (\nabla \times \vec{d})}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Σεισμική εξίσωση για S waves

Απόκλιση :

$$\nabla^2 (\nabla \cdot \vec{d}) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \vec{d})}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

Σεισμική εξίσωση για P waves

Τα διαμήκη κύματα έχουν μεγαλύτερη ταχύτητα διάδοσης

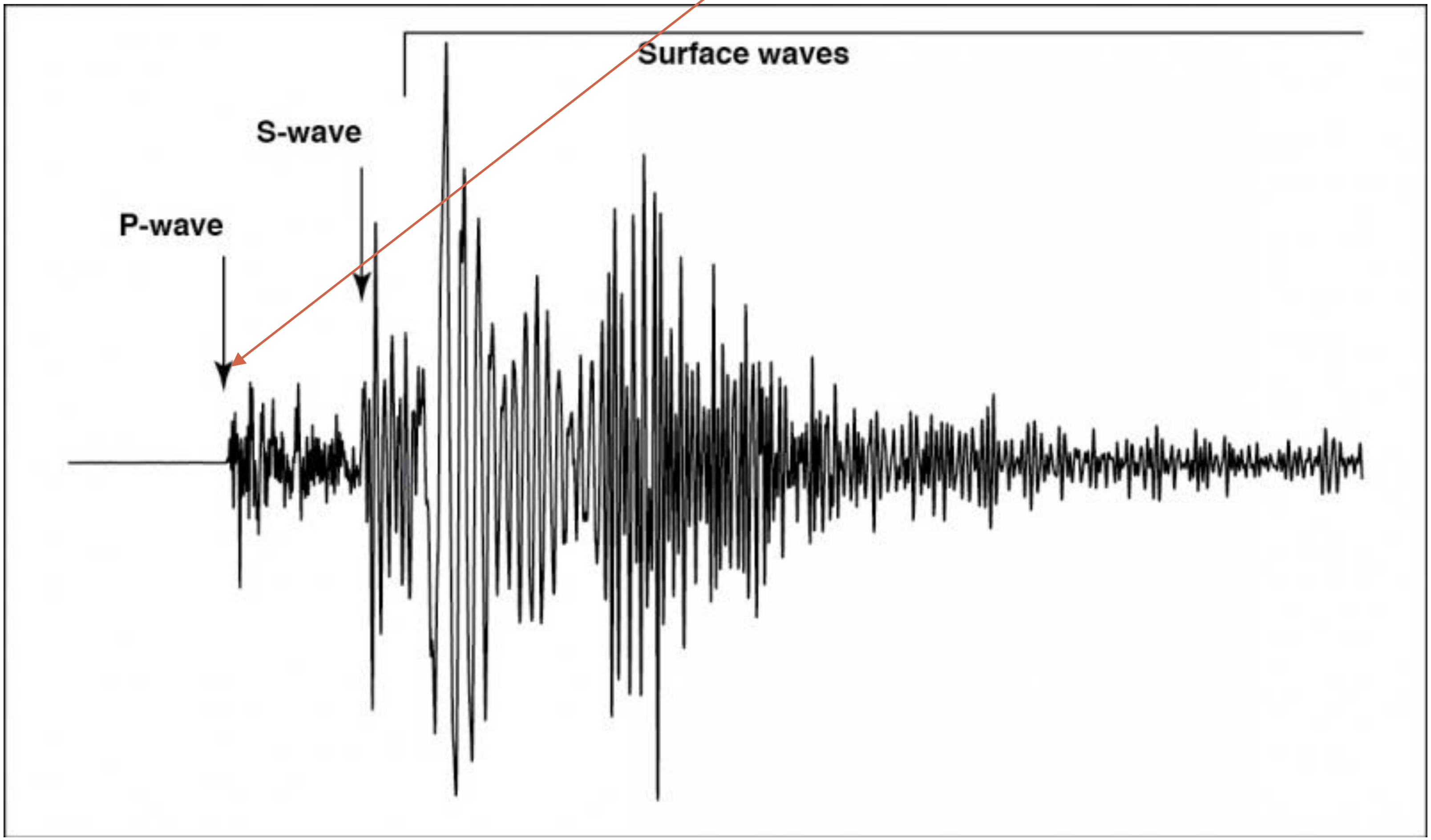


Image from Michigan Tech

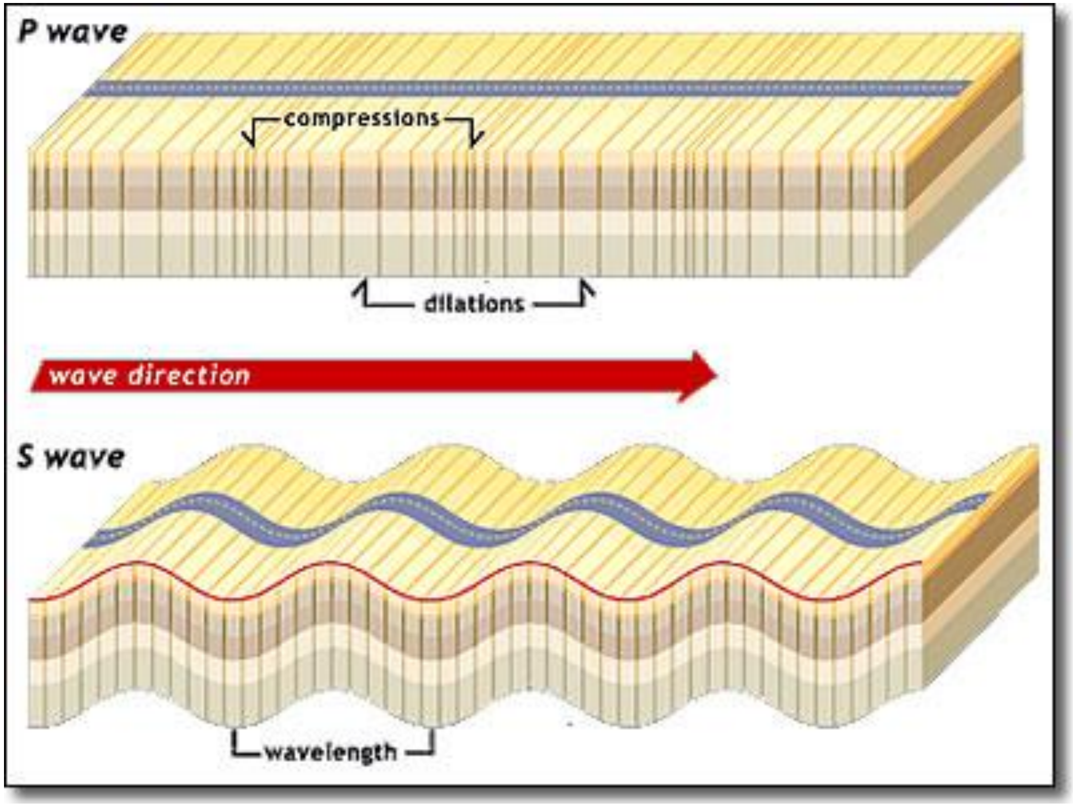


Image from SMS tsunami warning

Στερεά μέσα

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{d}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{d})$$

Σεισμική εξίσωση

$$\nabla \cdot \vec{d} \equiv \Theta$$

$$\nabla^2 \Theta - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0$$

Θ: Κυβική διαστολή (Cubic dilatation)

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

$$\nabla \times \vec{d} \equiv \mathbf{R}$$

R: Περιστροφική διαταραχή (Rotational component of the displacement)

$$\nabla^2 \mathbf{R} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = 0$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Στερεά μέσα

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{d}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \vec{d})$$

Σεισμική εξίσωση

$$\nabla^2 \Theta - \frac{1}{c_p^2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0$$

Διαμήκη κύματα (P waves)

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

$$\nabla^2 \mathbf{R} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = 0$$

Διατμητικά κύματα (S waves)

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Στερεά μέσα Χρήση Δυναμικών

Θεώρημα του Helmholtz

$$\vec{d} = \nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{\Psi}$$

$\mathbf{\Phi}$ Αστρόβιλο Δυναμικό

$$\nabla\cdot\mathbf{\Psi} = 0$$

$\mathbf{\Psi}$ Διανυσματικό δυναμικό

$$\nabla\cdot\vec{d} = \nabla^2\Phi$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{d} &= \nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi} \\ &= \nabla\nabla\cdot\mathbf{\Psi} - \nabla^2\mathbf{\Psi} \\ &= -\nabla^2\mathbf{\Psi}\end{aligned}$$

Στερεά μέσα Χρήση Δυναμικών

Θεώρημα του Helmholtz $\vec{d} = \nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{\Psi}$

$\mathbf{\Phi}$ Αστρόβιλο Δυναμικό

$\mathbf{\Psi}$ Διανυσματικό δυναμικό μηδενικής απόκλισης $\nabla\cdot\mathbf{\Psi} = 0$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{c_p^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \qquad c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

$$\nabla^2\mathbf{\Psi} = \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Psi}}{\partial t^2} \qquad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Στερεά μέσα Χρήση Δυναμικών

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \Theta - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{\Psi} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{R} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = 0$$

Στερεά μέσα

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$\mu \equiv G$$

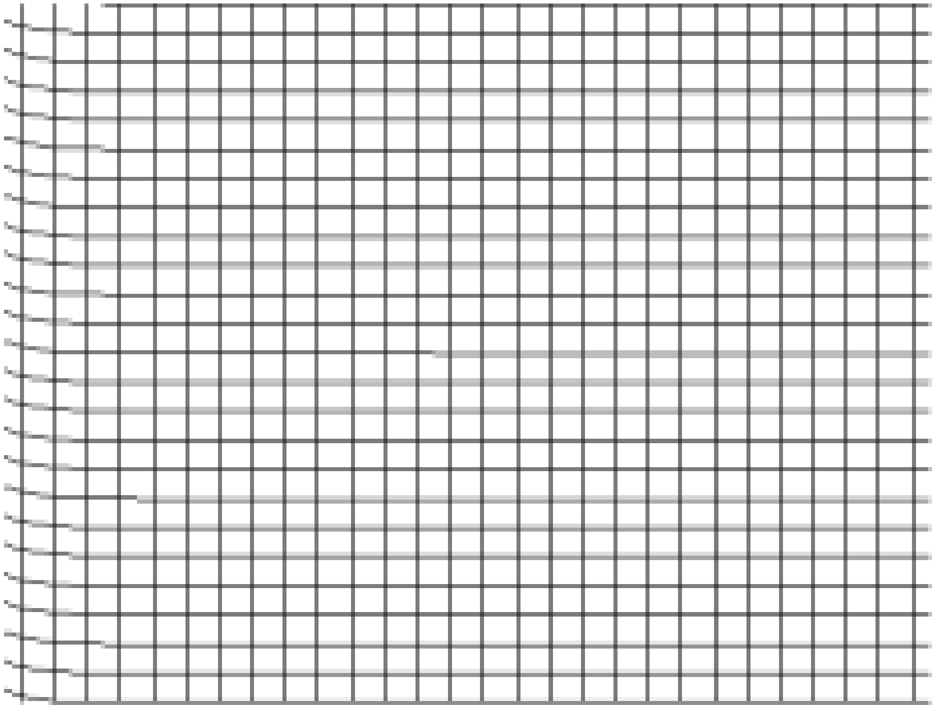
Μέτρο ελαστικότητας (shear modulus)

$$K = \lambda + (2/3)\mu$$

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Ρευστά μέσα $\quad \mu = 0, \quad K = \lambda, \quad c_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$

Διάδοση επίπεδου διατμητικού κύματος



Προβολή διάδοσης σφαιρικού διατμητικού κύματος στο επίπεδο