Διάδοση σε ελαστικούς χώρους

Φαινόμενα ανάκλασης και διάθλασης

Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

Στερεά μέσα (ελαστικά και ισότροπα)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i}\right)$$ Παραμόρφωση (strain)

λ,μ Σταθερες Lamé

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$ Νόμος Hooke

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$ Ανηγμένη διόγκωση

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \mu\left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i}\right)$$

2ος Νόμος Newton $\Rightarrow$

$$\rho\frac{\partial^2 d_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Στερεά μέσα Χρήση Δυναμικών

Θεώρημα του Helmholtz

$$\vec{d} = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}$$

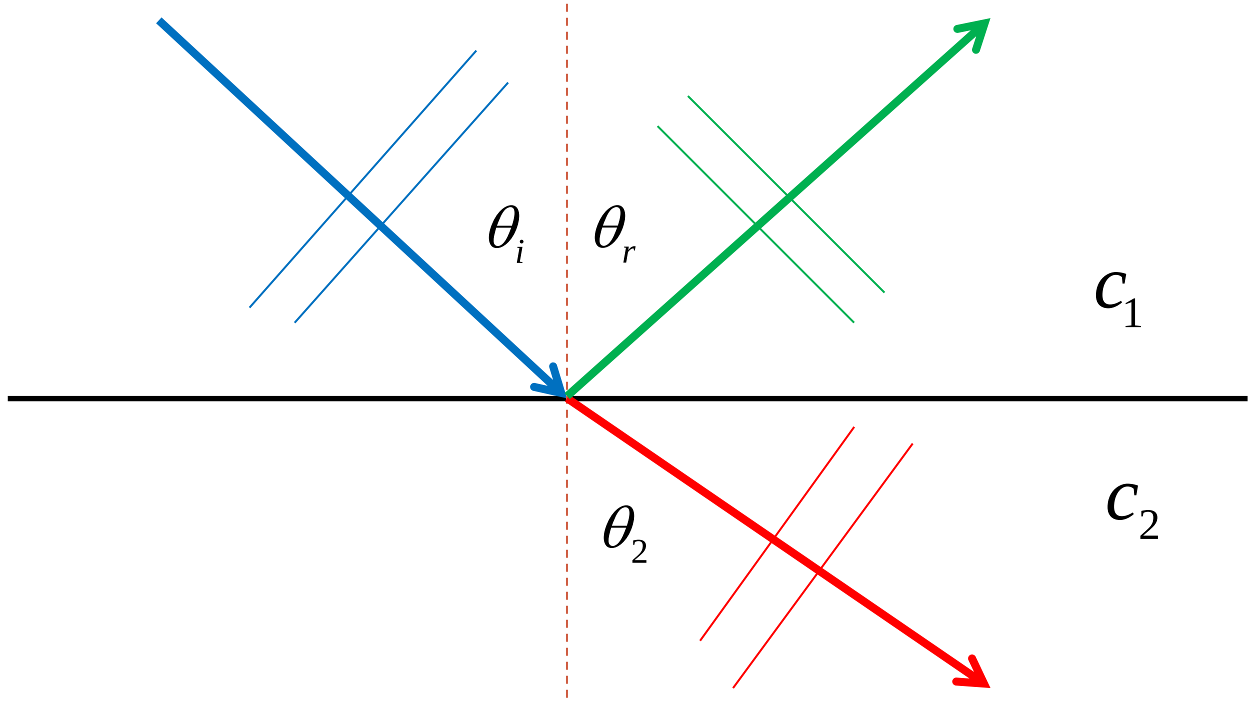
$\mathbf{\Phi}$ Αστρόβιλο Δυναμικό

$\mathbf{\Psi}$ Διανυσματικό δυναμικό μηδενικής απόκλισης $\nabla \cdot \mathbf{\Psi} = 0$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \qquad c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

$$\nabla^2 \mathbf{\Psi} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial t^2} \qquad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Φαινόμενα ανάκλασης σε διεπιφάνειες

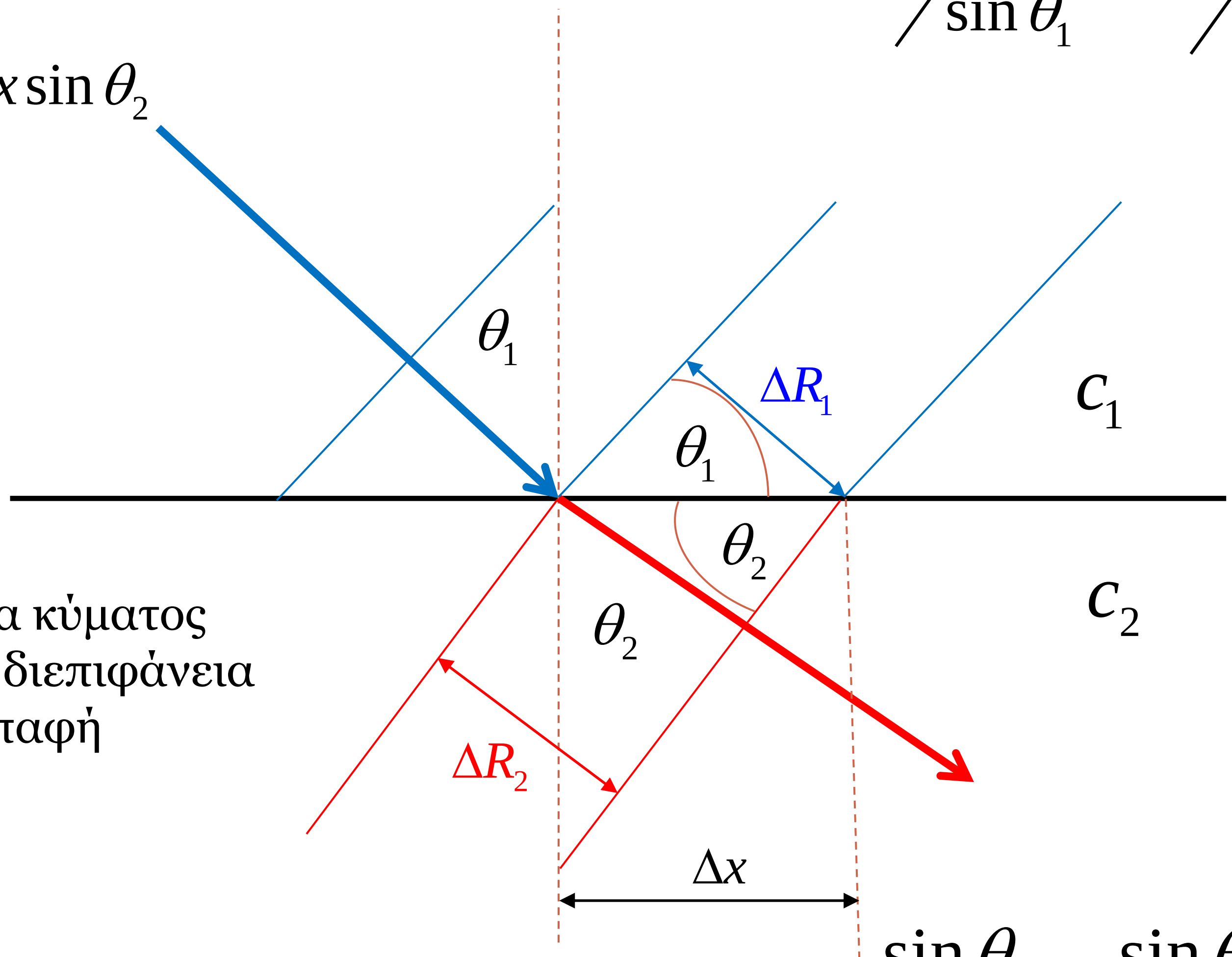


Διάδοση-ανάκλαση επίπεδου ακουστικού κύματος ανάμεσα σε δύο ρευστά μέσα

$$\Delta R_1 = \Delta x \sin\theta_1$$

$$\Delta R_2 = \Delta x \sin\theta_2$$

$$\Delta R_1 \big/ \sin\theta_1 = \Delta R_2 \big/ \sin\theta_2$$



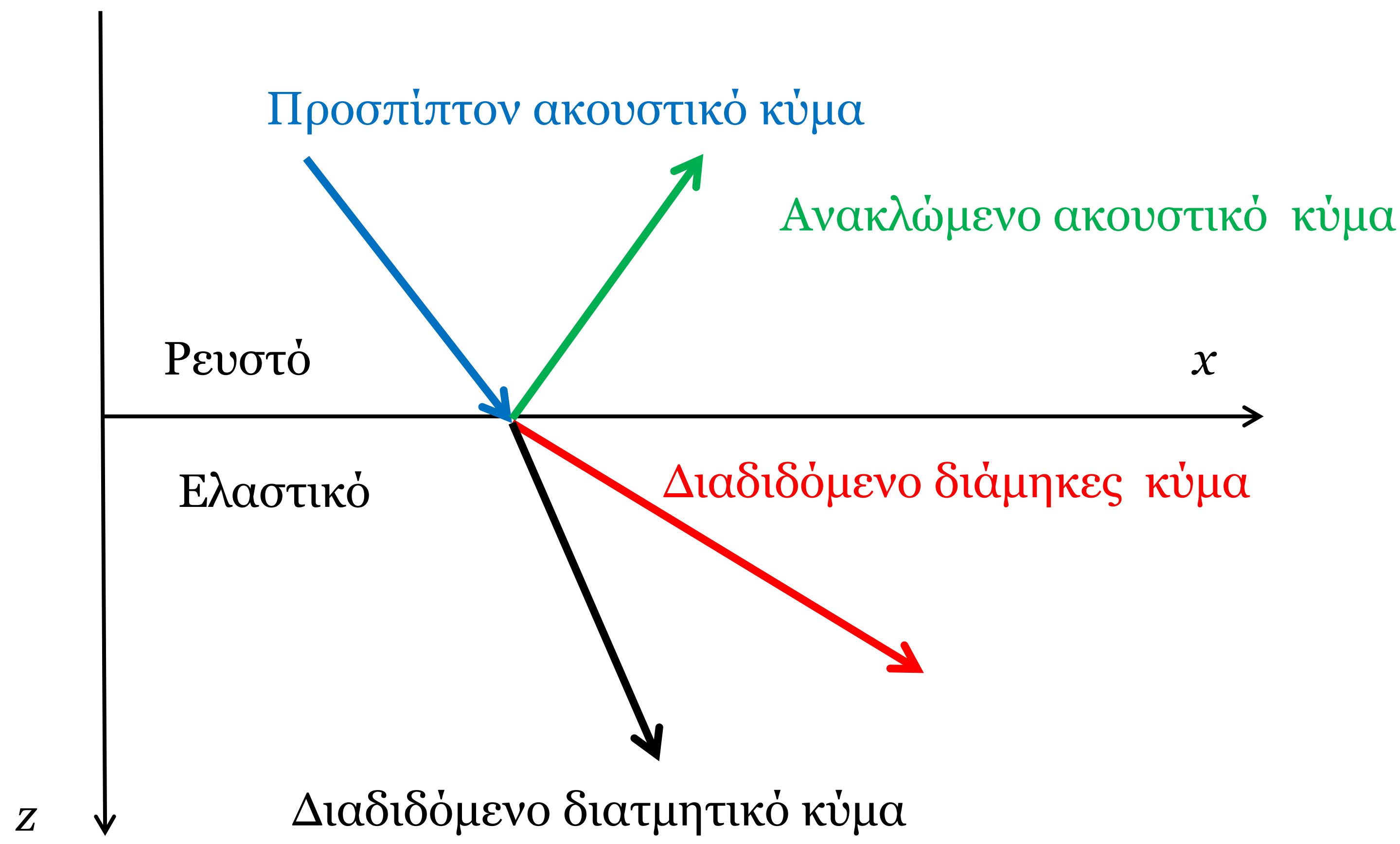
$$c_1 = \frac{\Delta R_1}{\Delta t}$$

$$c_2 = \frac{\Delta R_2}{\Delta t}$$

Τα μέτωπα κύματος πάνω στη διεπιφάνεια είναι σε επαφή

Νόμος Snell

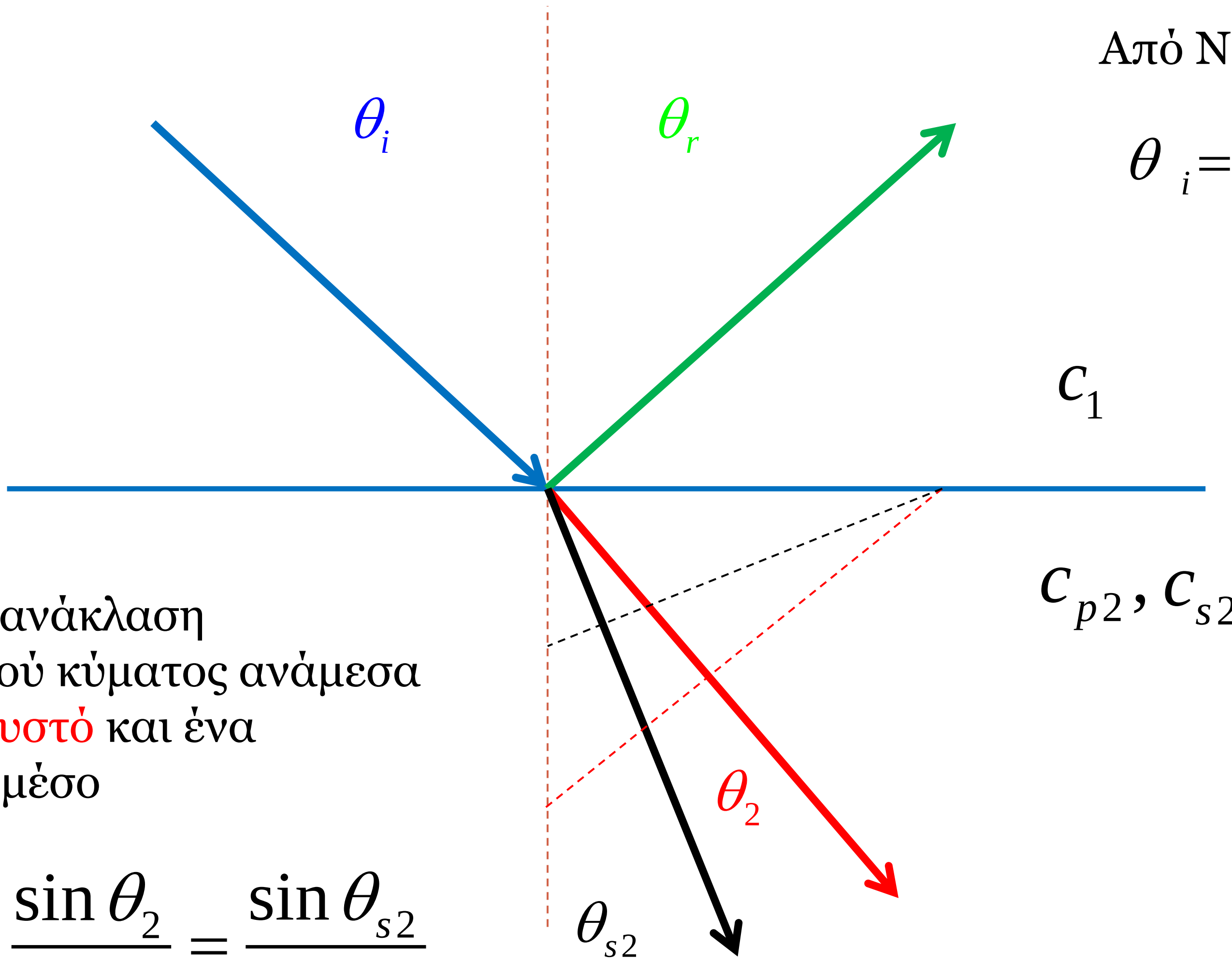
$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$



Προσπίπτον ακουστικό κύμα
Ανακλώμενο ακουστικό κύμα
Ρευστό
x
Ελαστικό
Διαδιδόμενο διάμηκες κύμα
z
Διαδιδόμενο διατμητικό κύμα

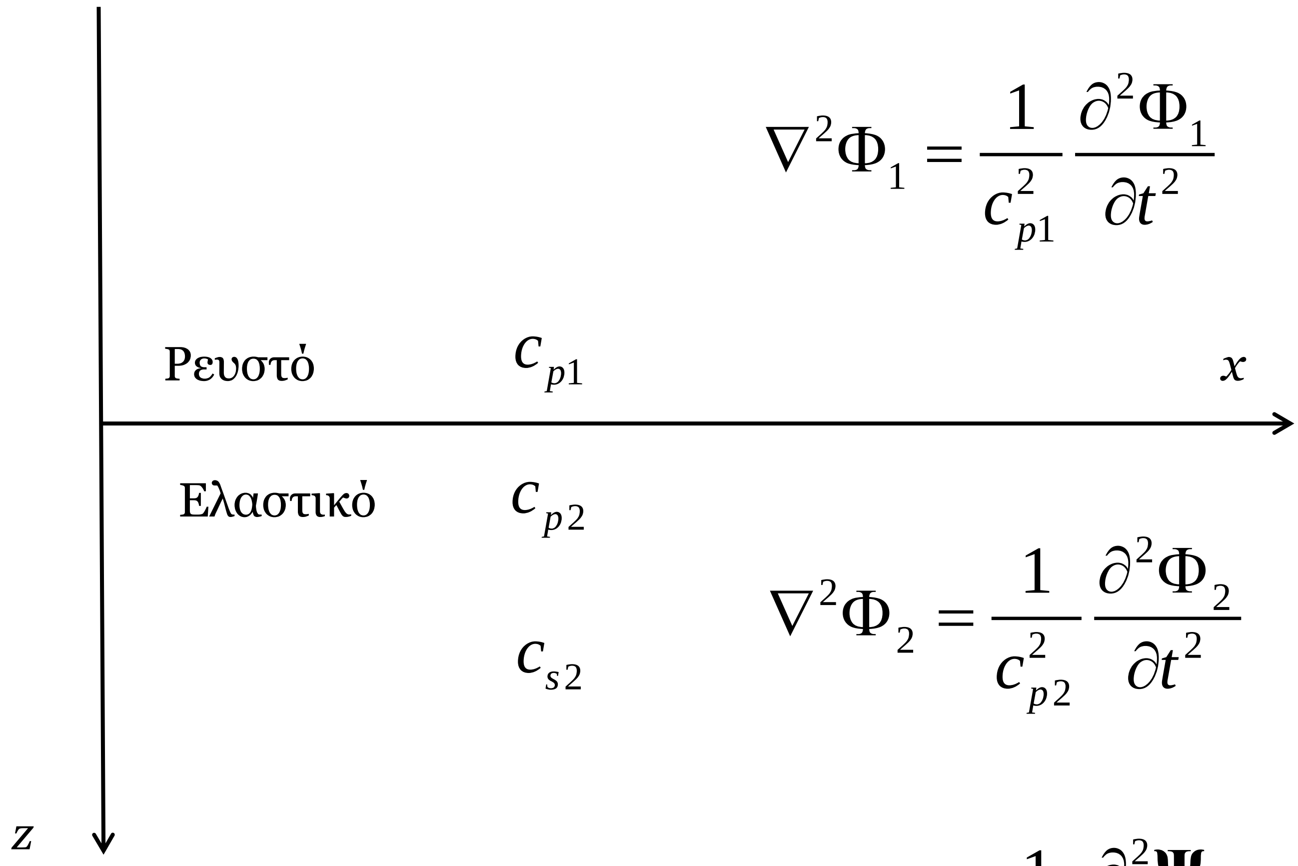
Από Νόμο Snell :

$$\theta_i = \theta_r = \theta_1$$



Διάδοση-ανάκλαση ακουστικού κύματος ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσο

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_{p2}} = \frac{\sin\theta_{s2}}{c_{s2}}$$



$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{1}{c_{p1}^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = \frac{1}{c_{p2}^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{\Psi}_2 = \frac{1}{c_{s2}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}_2}{\partial t^2}$$

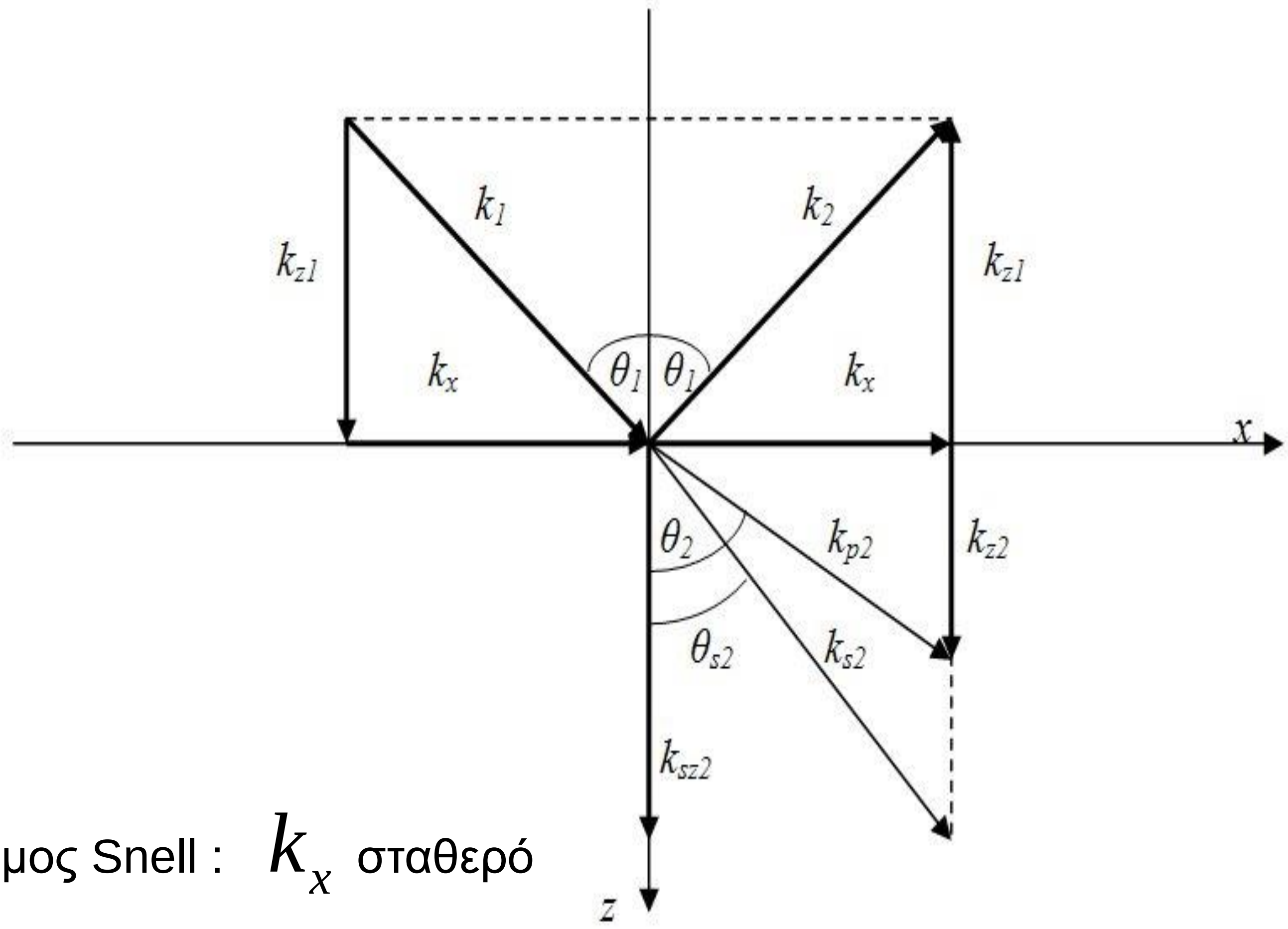
$$\nabla^2\Phi_1 = \frac{1}{c_1^{\,2}}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}$$

Θεωρούμε χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$

$$\Phi_1 = Ae^{i(k_x x + k_{z1}z - \omega t)} + Be^{i(k_x x - k_{z1}z - \omega t)}$$

$$\nabla^2\Phi_2 = \frac{1}{c_{p2}^{\;\;2}}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} \Longrightarrow \Phi_2 = T_p e^{i(k_x x + k_{z2}z - \omega t)}$$

$$\nabla^2\Psi_2 = \frac{1}{c_{s2}^2}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial t^2} \Longrightarrow \Psi_2 = T_s e^{i(k_x x + k_{sz2}z - \omega t)}$$



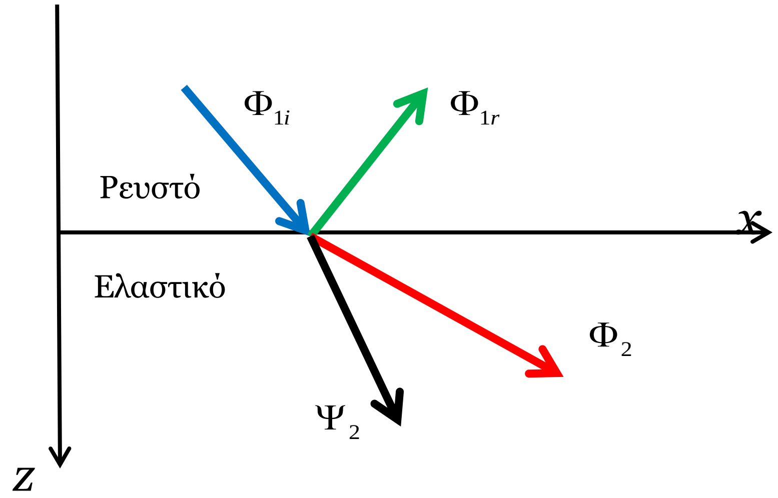
Νόμος Snell : k_x σταθερό

$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{1}{c_1^{\ 2}} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \qquad A = 1, \quad B = R_{12}$$

$$\Phi_1 = \underbrace{e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)}}_{\Phi_{1i}} + \underbrace{R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)}}_{\Phi_{1r}}$$

$$\Phi_2 = T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)}$$

$$\Psi_2 = T_s e^{i(k_x x + k_{sz2} z - \omega t)}$$



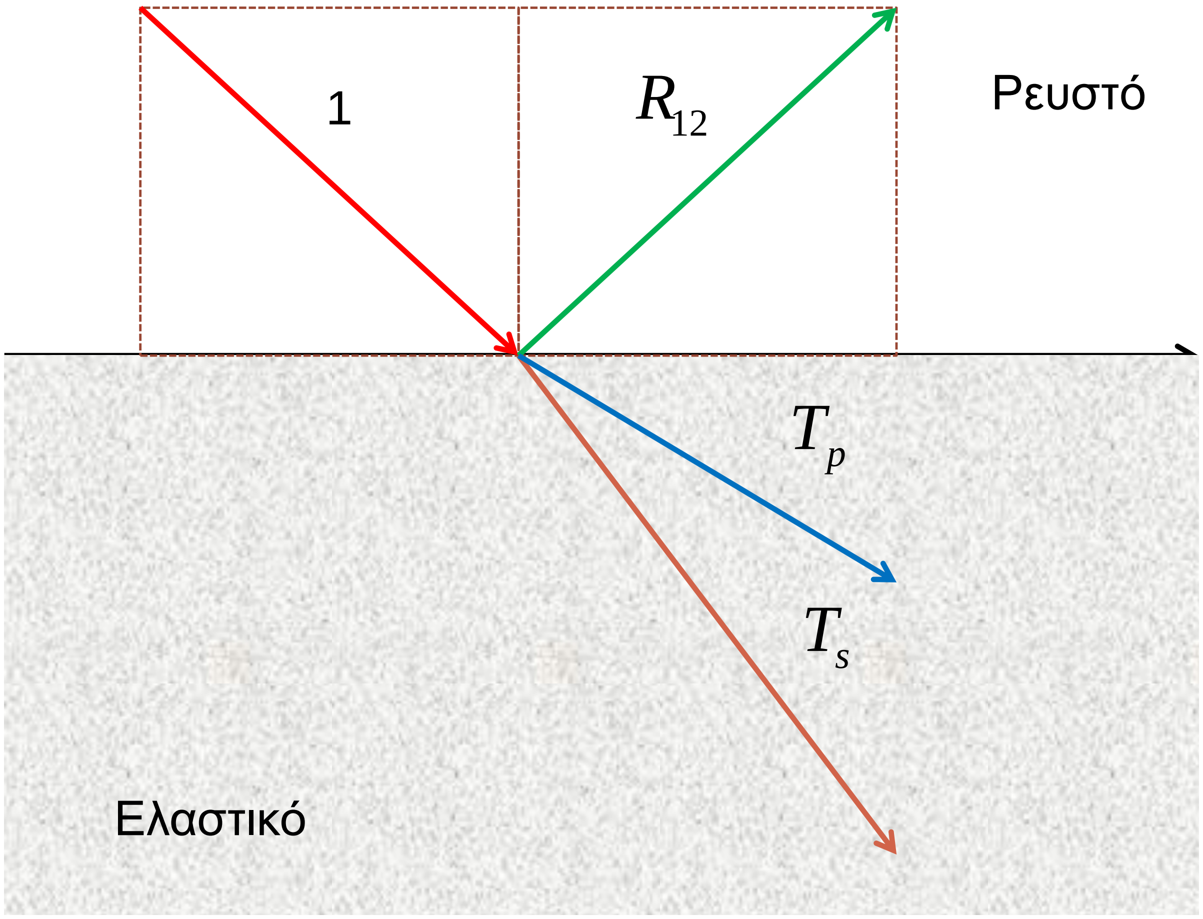
Φ_{1i} Δυναμικό προσπίπτοντος ακουστικού κύματος

Φ_{1r} Δυναμικό ανακλώμενου ακουστικού κύματος

$\left.\begin{matrix} \Phi_{1i} \\ \Phi_{1r} \end{matrix}\right\} \Phi_1$

Φ_2 Δυναμικό διαδιδόμενου ακουστικού κύματος

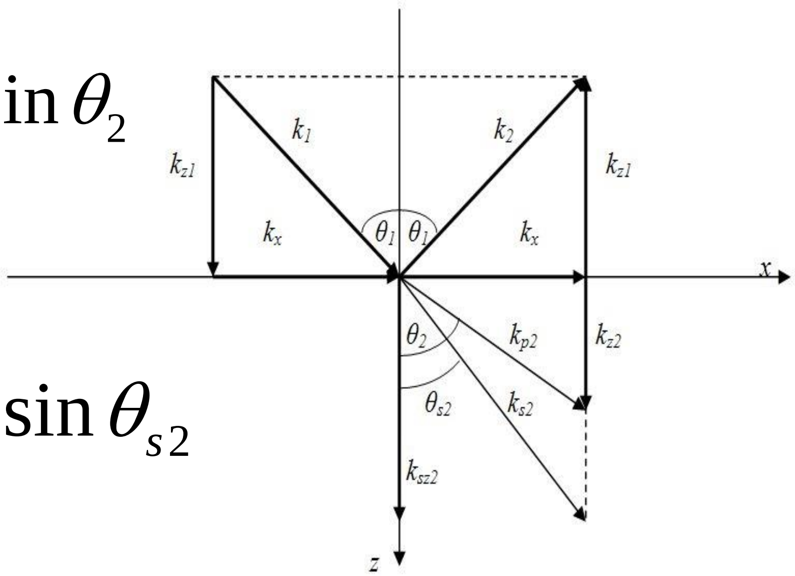
Ψ_2 Δυναμικό διαδιδόμενου διατμητικού κύματος


1
R_{12}
Ρευστό
T_p
T_s
Ελαστικό

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} \qquad k_x = \frac{\omega}{c_1}\sin\theta_1$$

$$k_{p2} = \frac{\omega}{c_{p2}} \qquad k_{z2} = \frac{\omega}{c_{p2}}\sin\theta_2$$

$$k_{s2} = \frac{\omega}{c_{s2}} \qquad k_{sz2} = \frac{\omega}{c_{s2}}\sin\theta_{s2}$$



Να υπολογίσουμε τους συντελεστές των δυναμικών

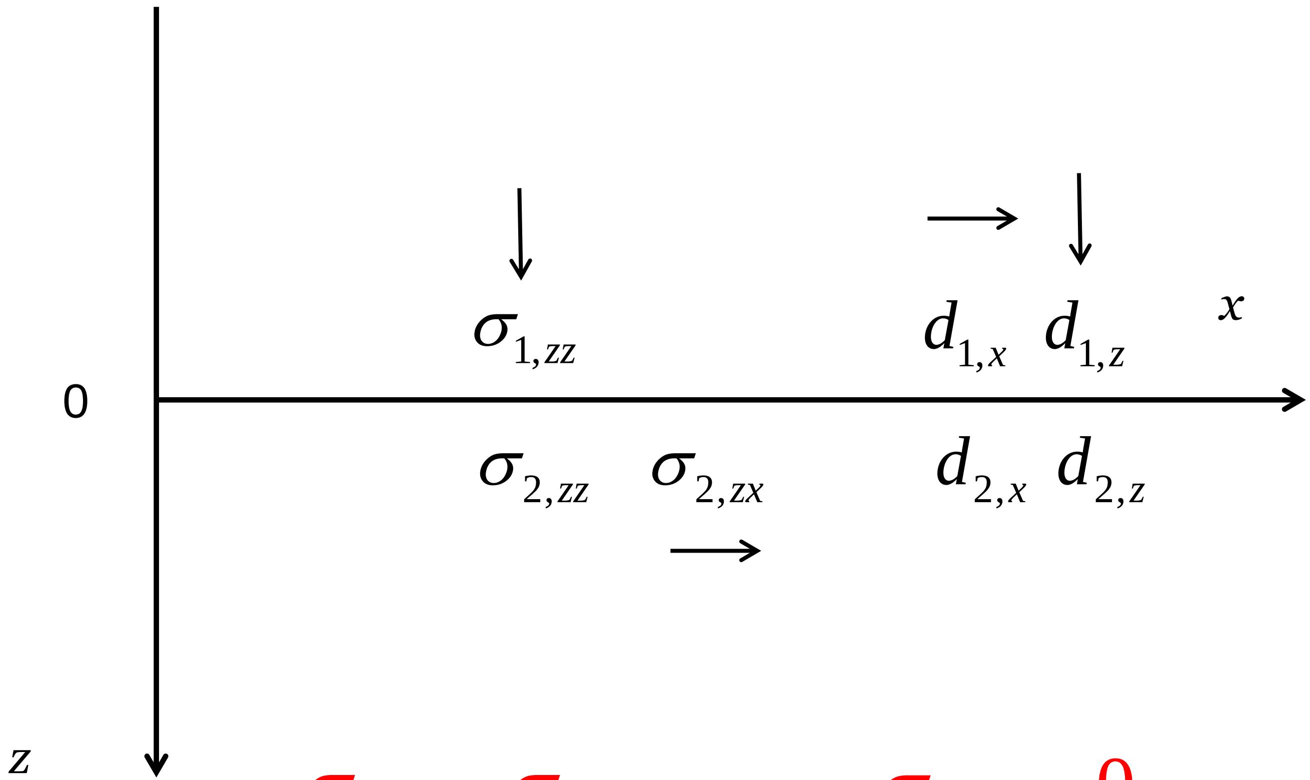
Χρειαζόμαστε συνοριακές συνθήκες

Τα δύο σώματα βρίσκονται πάντα σε επαφή

Συνέχεια των τάσεων στη διαχωριστική επιφάνεια

Συνέχεια των κάθετων μετατοπίσεων

Οριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια z=0



$$\sigma_{1,zz} = \sigma_{2,zz} \qquad \sigma_{2,zx} = 0$$

$$d_{1,z} = d_{2,z}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$ Νόμος Hooke

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\vec{d} = \nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{\Psi}$$

Για διάδοση μόνο σε δύο διαστάσεις *x,z*

$$\mathbf{\Psi} \rightarrow \Psi_y \rightarrow \Psi$$

$$d_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

$$d_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{\kappa\kappa} = \frac{\partial d_x}{\partial x} + \frac{\partial d_z}{\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \nabla^2\Phi$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$ Νόμος Hooke

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\vec{d} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial d_z}{\partial z} \qquad d_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad e_{zz} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}\right)$$

$$\sigma_{zx} = \mu\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}\right)$$

$$\vec{d} = \nabla\Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}$$

$$\nabla^2\Phi_1 = \frac{1}{{c_1}^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} \qquad \lambda_1\nabla^2\Phi_1 = \frac{\lambda_1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} = \rho_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\Phi_2 = \frac{1}{{c_{p2}}^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} \qquad \lambda_2\nabla^2\Phi_2 = \frac{\lambda_2}{c_{p2}^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}$$

$$\lambda_2 \equiv \lambda, \quad \mu_2 \equiv \mu$$

$$\sigma_{1,zz} = \sigma_{2,zz}$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = \frac{\lambda}{c_{p2}^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z \partial x}\right)$$

$$\sigma_{2,zx} = 0$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z \partial x}\right) = 0$$

$$d_{1z} = d_{2z}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}$$

$$\Phi_1 = \Phi_{1i} + \Phi_{1r}$$

Αντικαθιστώντας

$$\Phi_1 = e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} + R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)}$$

$$\Phi_2 = T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)}$$

$$\Psi_2 = T_s e^{i(k_x x + k_{sz2} z - \omega t)}$$

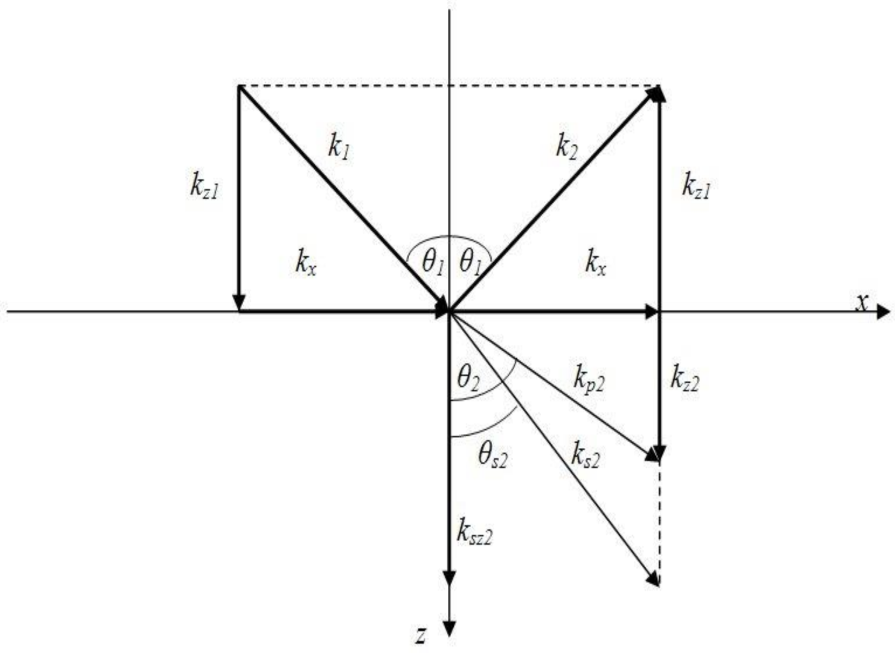
Για z=0

Σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους R_{12}, T_p, T_s

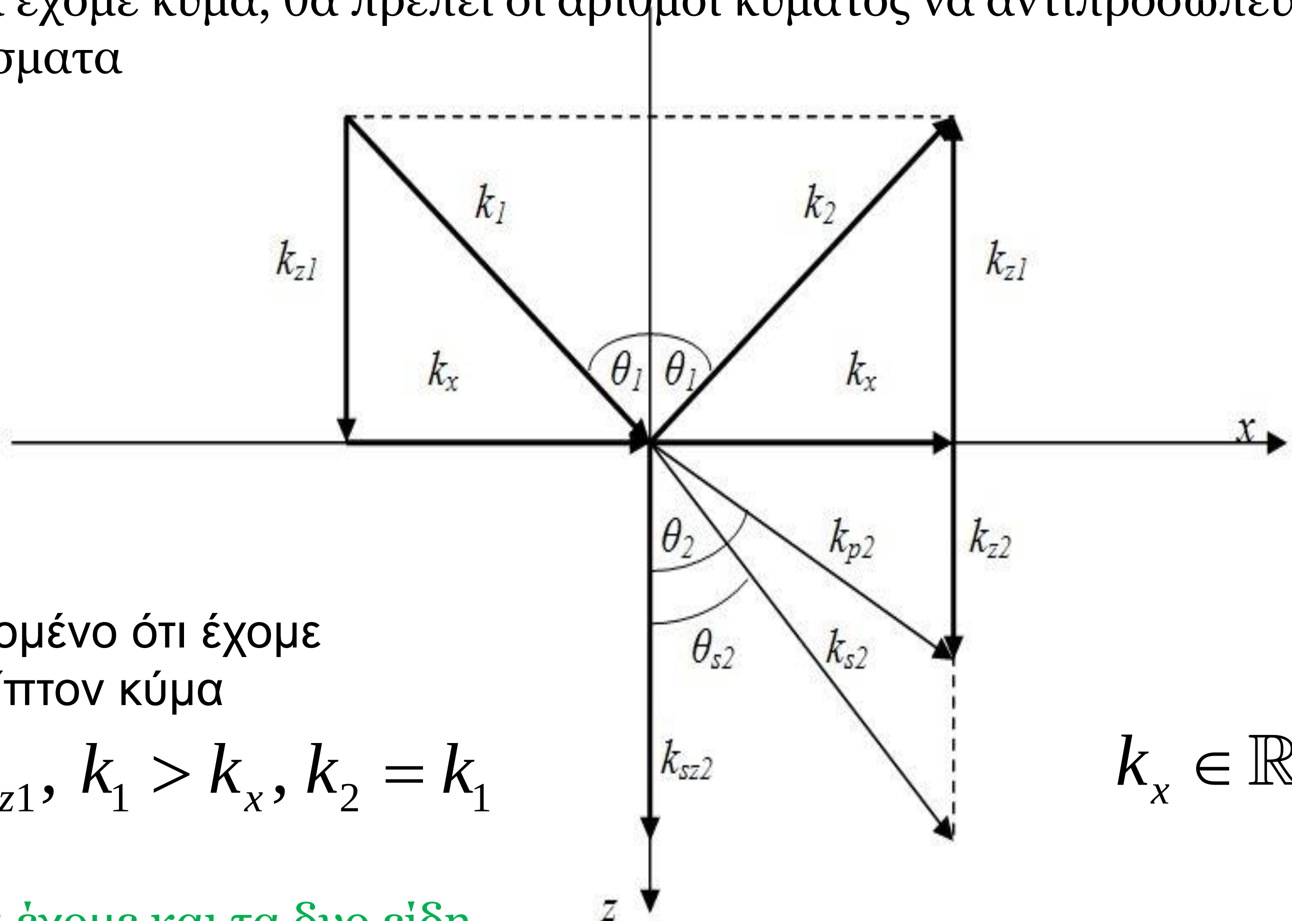
$$R_{12} = \frac{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 - (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 + (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}$$

Συντελεστής ανάκλασης επίπεδου ακουστικού κύματος στη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό στρώμα ημιάπειρου πάχους

$$R_{12} = \frac{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 - (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 + (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}$$



Για να έχομε κύμα, θα πρέπει οι αριθμοί κύματος να αντιπροσωπεύουν διανύσματα



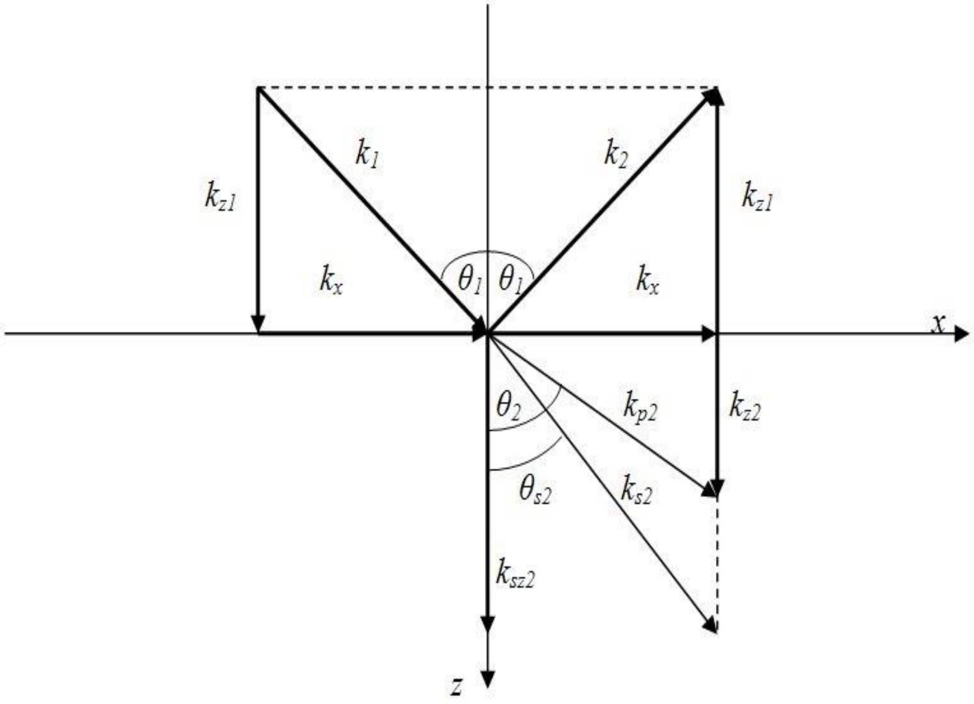
Με δεδομένο ότι έχομε προσπίπτον κύμα

$$k_1 > k_{z1},\ k_1 > k_x,\ k_2 = k_1$$

$$k_x \in \mathbb{R}$$

Για να έχομε και τα δυο είδη κυμάτων στο δεύτερο μέσο

$$k_{p2} > k_{z2},\ k_{p2} > k_x,\ \ k_{s2} > k_{sz2},\ k_{s2} > k_x$$



$$\Phi_2 = T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)}$$

$$k_x \in \mathbb{R}$$

Εάν $k_{z2} = i\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}$

$$\Phi_2 = T_p e^{-\kappa z} e^{i(k_x x - \omega t)}$$

δεν έχομε κυματική λύση στο δεύτερο μέσο. Η λύση δηλώνει εκθετικά αποσβενύμενη συνάρτηση που περιγράφει την ως προς *z* συνιστώσα του δυναμικού.

$$c_{p2} > c_1 \qquad c_{s2} > c_1$$

$$\sin\theta_2 = \frac{c_{p2}}{c_1}\sin\theta_1 \qquad \sin\theta_{s2} = \frac{c_{s2}}{c_1}\sin\theta_1$$

Δύο κρίσιμες γωνίες $\theta_{pcr} = \sin^{-1}\dfrac{c_1}{c_{p2}}$ $\theta_{scr} = \sin^{-1}\dfrac{c_1}{c_{s2}}$

Για $\theta_1 > \theta_{pcr}$ και $\theta_1 > \theta_{scr}$ $\sin\theta_2 > 1,\quad \sin\theta_{s2} > 1$

$$\theta_2, \theta_{s2} \in \mathbb{C}$$

$$\Downarrow$$

$$k_{z2} = ig_2\,,\quad k_{sz2} = iq_2 \qquad g_2, q_2 \in \mathbb{R}$$

$$k_{z2} = ig_2 \ , \quad k_{sz2} = iq_2$$

$$\Phi_2 = T_p e^{-g_2 z} e^{i(k_x x - \omega t)} \qquad \Psi_2 = T_s e^{-q_2 z} e^{i(k_x x - \omega t)}$$

Δεν υπάρχει διάδοση κύματος κατά τον άξονα των z στο δεύτερο μέσον

Δεν υπάρχει διάδοση κύματος στο δεύτερο μέσον

Ολική ανάκλαση

$$R_{12}=\frac{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2+(k_{sz2}^2-k_x^2)^2-(\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2+(k_{sz2}^2-k_x^2)^2+(\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}$$

$$R_{12}=-e^{i2n}$$

$$n=Arc\tan\{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\kappa_{z1}}{g_2}\frac{c_{s2}^{\;4}}{\omega^4}[-4g_2q_2k_x^{\;2}+(q_2^{\;2}+k_x^{\;2})^2]\}$$

$$\left|R_{12}\right|=1$$

Ολική ανάκλαση

$$\Phi_1 = e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} + R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)}$$

$$\Phi_1 = e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} - e^{i(2n + k_x x - k_{z1} z - \omega t)}$$

$$\Phi_2 = T_p e^{-g_2 z} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad \Psi_2 = T_s e^{-q_2 z} e^{i(k_x x - \omega t)}$$

Η ακουστική ενέργεια ανακλάται ολόκληρη στο πρώτο μέσον

Εάν $c_{s2} < c_1$ δεν υπάρχει ολική ανάκλαση.

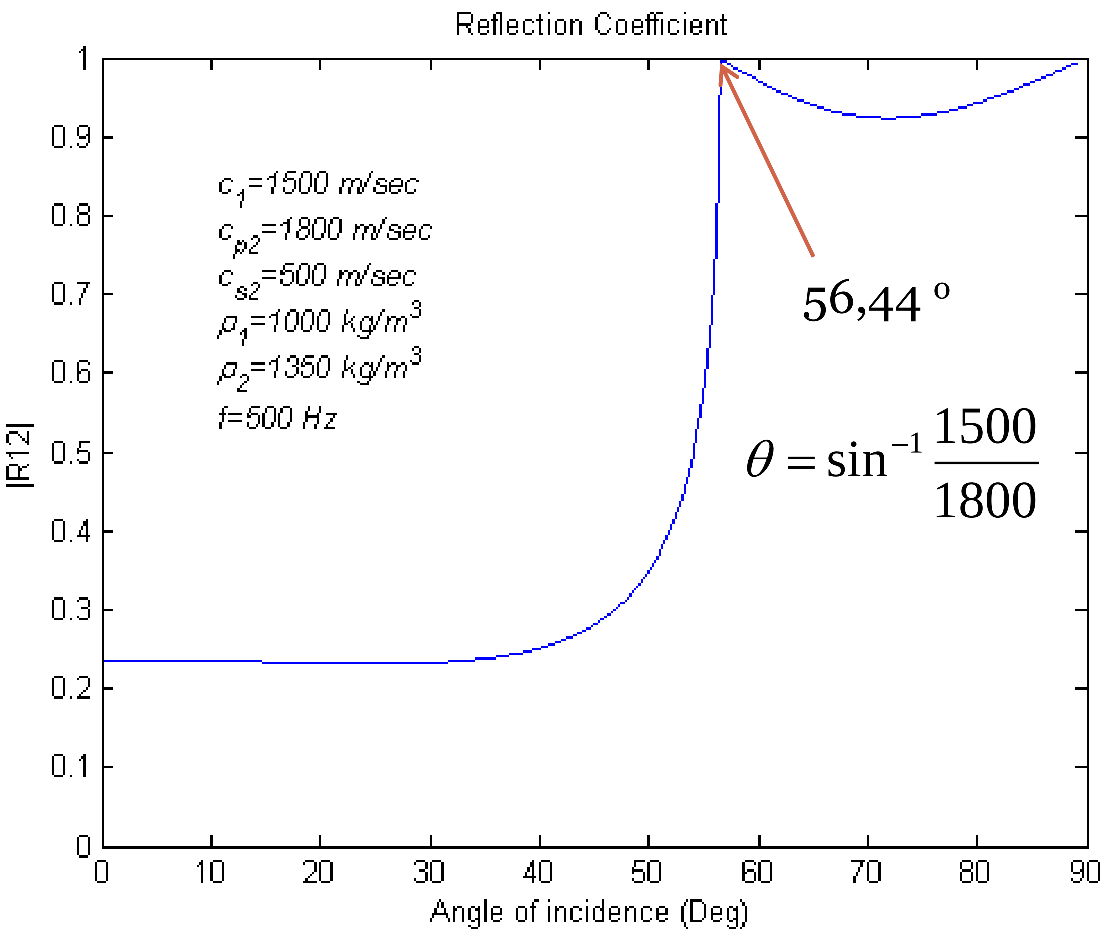
$$k_{sz2} \in \mathbb{R}$$

Εάν $c_{p2} > c_1$ υπάρχει γωνία πρόσπτωσης μετά την οποία δεν διαδίδεται ακουστικό κύμα στο δεύτερο μέσο.

$$R_{12} = \frac{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 - (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 + (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}$$

$$k_{z2} = ig_2 \qquad\qquad k_{sz2} \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα υπολογισμού του R_{12} ως συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης



$$R_{12} = R_{12}(\theta_1)$$