

## Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

2023-2024

Ασκήσεις 7<sup>ης</sup> Σειράς Φίλτρα, Θόρυβος, Συσχέτιση σημάτων

### Λύση Άσκησης 7.3

7.3 Να υπολογίσετε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος  $x(t) = \cos \omega t$

#### ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός συνεχούς σήματος  $x(t)$  είναι :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{\text{cov}[x, x(\tau)]}{\sigma_x^2}$$

όπου  $\text{cov}[x, x(\tau)]$  είναι η συνάρτηση συνδιακύμανσης του σήματος με τον εαυτό του. Έχουμε :

$$\sigma_x^2 \equiv \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} = \dots \frac{1}{2}$$

(για τις πράξεις θυμηθείτε ότι  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  )

$$\begin{aligned} \text{cov}[x, x(\tau)] &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega t \cdot \cos(\omega(t + \tau)) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega t \cdot [\cos \omega t \cos \omega \tau - \sin \omega t \sin \omega \tau] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \omega t \cos \omega \tau dt - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega t \sin \omega t \sin \omega \tau dt = \\ &= \frac{1}{2} \cos \omega \tau - \frac{\sin \omega \tau}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega t \sin \omega t dt = \\ &= \frac{1}{2} \cos \omega \tau - \frac{\sin \omega \tau}{T} \left[ \frac{1}{2\omega} \sin^2 \omega t \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{\cos \omega \tau}{2} \end{aligned}$$

Επομένως

$$C_{xx}(\tau) = \frac{\text{cov}[x, x(\tau)]}{\sigma_x^2} = \cos \omega\tau$$

Παρατήρηση Προσέξτε ότι :

$$C_{xx}(\tau) = 0 \text{ όταν } \tau = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$C_{xx}(\tau) = 1 \text{ όταν } \tau = 0, 2\pi, \dots, 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_{xx}(\tau) = -1 \text{ όταν } \tau = \pi, 3\pi, \dots, (2n-1)\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

Άσκηση μέσα στην άσκηση

Υπολογίστε τη συνάρτηση συσχέτισης δύο σημάτων  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  όταν

$$x_1(t) = \cos \omega_1 t, \quad x_2(t) = \cos \omega_2 t \text{ με } \omega_1 \neq \omega_2$$