Πανεπιστήμιο Κρήτης

Τμήμα Μαθηματικών

Διακριτά Αντίστροφα Προβλήματα

Σημειώσεις του Μαθήματος

βασισμένες κυρίως στο Βιβλίο :

Geophysical Data Analysis : Discrete Inverse Theory

του William Menke

Μιχάλης Ταρουδάκης

Καθηγητής

Εαρινό εξάμηνο 2012-2013

Πρόλογος

Το παρόν τεύχος των σημειώσεων έχει ως στόχο να βοηθήσει τους φοιτητές του μαθήματος «Διακριτά Αντίστροφα Προβλήματα», να το παρακολουθήσουν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Βασίζονται στο Βιβλίο: Geophysical Data Analysis : Discrete Inverse Theory, του William Menke το οποίο αποτελεί και το κύριο διδακτικό βιβλίο του μαθήματος.

Οι σημειώσεις στην παρούσα φάση είναι πρόχειρες και περιληπτικές. Θα συμπληρωθούν στο μέλλον για να αποτελέσουν αυτοτελές εγχειρίδιο για τους φοιτητές που ενδιαφέρονται να παρακολουθήσουν το εν λόγω μάθημα.

Για την προσωρινή και περιληπτική τους μορφή ζητώ την κατανόηση των φοιτητών.

Ηράκλειο, Φεβρουάριος 2013.

Περιεχόμενα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

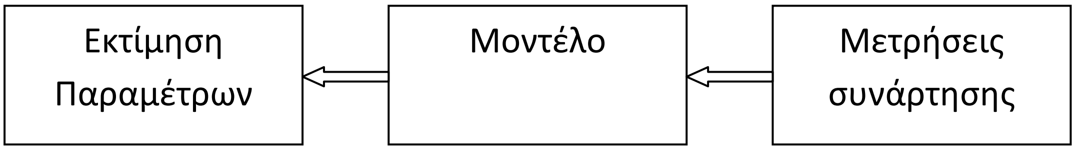
1.1 Ευθύ και Αντίστροφο Πρόβλημα

Στην μαθηματική προσομοίωση **ευθύ** ονομάζεται ένα πρόβλημα στο οποίο ζητείται ο προσδιορισμός ενός μεγέθους, συνήθως με τη μορφή μιας συνάρτησης, όταν είναι γνωστές τόσο οι παράμετροι που διέπουν το πρόβλημα, όσο και η εξίσωση ή οι εξισώσεις που περιγράφουν τις μεταβολές του μεγέθους. Στα πλαίσια της ντετερμινιστικής θεώρησης, τα προβλήματα αυτά είναι «Καλώς Τεθειμένα» (Well Posed) με την έννοια ότι θα πρέπει, όταν επιλυθούν, να δίνουν μοναδική λύση της άγνωστης συνάρτησης.

Στο επόμενο σχήμα περιγράφονται τα ευθέα προβλήματα . Με τον όρο «Μοντέλο» υπονοούμε την εξίσωση ή τις εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα, καθώς και τη διαδικασία επίλυσής τους.

Σχήμα 1.1 : Το ευθύ πρόβλημα.

Στο **αντίστροφο** πρόβλημα, ζητάμε συνήθως την εκτίμηση των παραμέτρων ενός φυσικού φαινομένου ή ενός μαθηματικού προβλήματος, όταν είναι γνωστές **μετρήσεις** μια συνάρτησης ή ενός κατάλληλου μεγέθους. Οι μετρήσεις και οι προς ανάκτηση παράμετροι συνδέονται με το ίδιο μοντέλο που ορίζεται στο ευθύ πρόβλημα, αλλά η διαδικασία επίλυσης ξεκινά αντίστροφα (Σχήμα 1.2). Τα αντίστροφα προβλήματα σπάνια είναι καλώς τεθειμένα, συνήθως είναι «Κακώς Τεθειμένα» (Ill Posed), και επιδέχονται από καμία έως πολλές λύσεις. Στις φυσικές επιστήμες γνωρίζομε βέβαια ότι οι παράμετροι ενός φυσικού φαινομένου υπάρχουν, συνεπώς μέσω της επίλυσης ενός αντιστρόφου προβλήματος πρέπει να βρεθούν κατάλληλες εκτιμήσεις τους. Αυτό είναι και το αντικείμενο του μαθήματος.



Σχήμα 1.2 : Το αντίστροφο πρόβλημα.

1.2 Διατύπωση ενός αντίστροφου προβλήματος

Οι παράμετροι που πρέπει να υπολογιστούν σε ένα αντίστροφο πρόβλημα χαρακτηρίζονται ως «model parameters» και συμβολίζονται νε το σύμβολο ***m*.** Αντίστοιχα, οι μετρήσεις χαρακτηρίζονται ως δεδομένα (“data”) και συμβολίζονται με το γράμμα *d*. Οι παράμετροι και τα δεδομένα μπορεί να είναι συνεχείς συναρτήσεις $m(x), d(y)$ όπου με x, y συμβολίζομε γενικά τις μεταβλητές από τις οποίες εξαρτώνται. Εάν μπορέσομε να διαχωρίσομε δεδομένα και παραμέτρους μέσω κάποιου «πυρήνα» $G(x, y)$ που θα μας υποδειχθεί από το Μοντέλο, μπορούμε να διατυπώσουμε ενδεχομένως μία ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής :

$$d(y) = \int G(x, y) m(x) dx \tag{1.1}$$

η οποία επιλυόμενη ως προς $m(x)$ θα μας δώσει τις παραμέτρους.

Εάν τα δεδομένα (μετρήσεις) έχουν γίνει, όπως συνήθως, σε διακριτά σημεία ή χρονικές στιγμές, ορίζεται ένα διάνυσμα από τιμές $\mathbf{d} = [d_1, d_2, ...d_N]^T$ που αντιπροσωπεύει τις μετρήσεις. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (1.1) θα γραφεί για κάθε διακριτή τιμή μετρήσεων και ορίζει αυτό που ονομάζομε «Συνεχές Αντίστροφο Πρόβλημα»

$$d_i = d_i = \int G(x) m(x) dx, \quad i = 1, ...N \tag{1.2}$$

Τέλος μπορεί και οι παράμετροι να είναι διακριτές $\mathbf{m} = [m_1, m_2, ...m_M]^T$, οπότε έχομε την γενική περίπτωση ενός **διακριτού αντίστροφου προβλήματος** .

Θα συνεχίσουμε θεωρώντας ότι δεδομένα και παράμετροι είναι διακριτά μεγέθη και θα δούμε πως αυτά συνδέονται μεταξύ τους.

Η γενική περίπτωση είναι να συνδέονται μέσω εξισώσεων της μορφής

$$f_j(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = 0, \quad j = 1, ...L \tag{1.3}$$

που σε διανυσματική μορφή γράφονται ως $\mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = 0$. Οι ανωτέρω εκφράσεις μπορεί να είναι περίπλοκες. Στη συνέχεια πάντως θα αναφερθούμε σε ειδικές περιπτώσεις που μας δίνουν τη δυνατότητα αντιμετώπισης του αντίστροφου προβλήματος με λογικής μορφής δυσκολία.

- <u>Έμμεση Γραμμική Μορφή</u>

Εάν η συνάρτηση **f** είναι γραμμική ως προς δεδομένα και παραμέτρους, παίρνομε μία έκφραση της μορφής :

$$\mathbf{f}(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0 = \mathbf{F}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{m}\end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Όπου **F** είναι ένας πίνακας διαστάσεων *Lx(M+N).*

- <u>Άμεση Μορφή</u>

Ορισμένες φορές , μπορούμε να διαχωρίσουμε τα δεδομένα από τις παραμέτρους και να διατυπώσουμε *L=N* που είναι γραμμικές μεν ως προς τα δεδομένα, μη γραμμικές όμως ως προς τις παραμέτρους μέσω μιας διανυσματικής συνάρτησης **g.**

$$\mathbf{f}(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0 = \mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}) \tag{1.5}$$

Μπορούμε δηλαδή να γράψομε :

$$d_i = g_i(\mathbf{m}), \quad i = 1,....N \tag{1.6}$$

όπου η συνάρτηση **g** είναι εν γένει μη γραμμική. Η ανωτέρω περίπτωση συναντάται συχνότατα σε αντίστροφα προβλήματα από τις φυσικές επιστήμες, όπου η συνάρτηση **g** εξαρτάται εκτός από το φυσικό μοντέλο που διέπει τη σχέση μετρήσεων-παραμέτρων και από τις συνθήκες της μέτρησης

- <u>Άμεση Γραμμική Μορφή</u>

Εάν και η συνάρτηση **g** είναι γραμμική, ως προς τις παραμέτρους, παίρνομε την απλούστερη μορφή για τα αντίστροφα προβλήματα που είναι :

$$\mathbf{f}(\mathbf{d},\mathbf{m}) = 0 = \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m} \tag{1.7}$$

όπου *L=N* ξανά, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, αλλά η συνάρτηση **g** εκφράζεται μέσω του πίνακα **G** ο οποίος είναι διαστάσεων *NxM.* Με άλλα λόγια, εκφράζομε το αντίστροφο πρόβλημα ως ένα γραμμικό σύστημα *N* εξισώσεων με *M* αγνώστους :

$$d_i = \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j, \quad i = 1,....N \tag{1.8}$$

Για την επιλυσιμότητα του ανωτέρω προβλήματος θα μιλήσουμε σε άλλο σημείο του μαθήματος. Στο σημείο αυτό να επισημάνομε ότι ο πίνακας **G** είναι γενικά παραλληλόγραμμος αφού δεν έχομε κατ' ανάγκη ίσο αριθμό δεδομένων και παραμέτρων.

Αρκετά αντίστροφα προβλήματα μπορούν να αναχθούν σε προβλήματα της μορφής 1.8.

1.3 Παραδείγματα διατύπωσης απλών αντιστρόφων προβλημάτων.

1.3.1 Υπολογίζοντας παραμέτρους μίας ευθείας.

Ας υποθέσομε ότι πραγματοποιούμε N μετρήσεις της θερμοκρασίας (Δεδομένα) σε διαφορετικά σημεία μία ράβδου που γνωρίζομε από την θερμοδυναμική ότι θα πρέπει να έχει θερμοκρασία γραμμικά μεταβαλλόμενη συναρτήσει του μήκους της (Μοντέλο). Ζητούμε να υπολογίσομε τις παραμέτρους της ευθείας που παριστάνει τη θερμοκρασία T (παράμετροι) συναρτήσει του μήκους x στη ράβδο. Επομένως το διάνυσμα των δεδομένων θα είναι $\mathbf{d} = [T_1, T_2, ...T_N]^T$ και το διάνυσμα των παραμέτρων θα είναι $\mathbf{m} = [a, b]^T$ όπου a, b θα είναι οι παράμετροι της εξίσωσης της ευθείας $T = a + bx$ που αντιπροσωπεύει το μοντέλο μας.

Θα παρατηρήσει κανείς ότι για να χαράξουμε μία ευθεία χρειαζόμαστε μόνο δύο μετρήσεις. Επειδή όμως οι μετρήσεις σε ένα πραγματικό πρόβλημα δεν γίνονται με ακρίβεια, αλλά υπάρχουν λάθη που προέρχονται από διάφορες αιτίες, πραγματοποιούμε περισσότερες μετρήσεις. Έτσι καταστρώνομε το επόμενο σύστημα εξισώσεων :

$$T_i = a + bx_i, \quad i = 1, ..., N \tag{1.9}$$

που γράφεται διαφορετικά ως

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Το πρόβλημα προφανώς (για N>2) είναι «υπερορισμένο». Έχομε περισσότερες εξισώσεις σε σχέση με τους αγνώστους.

1.3.2 Υπολογίζοντας παραμέτρους μιας παραβολής.

Ας υποθέσομε τώρα ότι το φυσικό μοντέλο για το παραπάνω πρόβλημα υποδεικνύει μεταβολή της θερμοκρασίας με το μήκος που περιγράφεται ως καμπύλη 2ου βαθμού. Τότε το μοντέλο απαιτεί εξίσωση της μορφής : $T = a + bx + cx^2$ και επομένως για τον ίδιο αριθμό μετρήσεων (δεδομένων) έχομε τώρα να υπολογίσομε ένα διάνυσμα τριών στοιχείων $\mathbf{m} = [a, b, c]^T$ και οι εξισώσεις μας γράφονται

$$T_i = a + bx_i + cx_i^2, \quad i = 1, ..., N \tag{1.11}$$

και το σύστημα με τη μορφή πινάκων ως :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \qquad (1.12)$$

Και το πρόβλημα αυτό είναι υπερορισμένο για $N>3$.

1.3.3 Μη καταστροφικός έλεγχος υλικών με ακουστικά κύματα.

Ένα απλό αντίστροφο πρόβλημα μηχανικής προέρχεται από την ανάγκη να υπολογιστούν ιδιότητες ενός υλικού χωρίς αυτό να σπάσει ή να ληφθούν δείγματα από τη δομή του. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση ήχων που διαπερνούν το υλικό και καταγράφονται στην έξοδό του. Επειδή μία χαρακτηριστική ιδιότητα του υλικού που εν πολλοίς καθορίζει τη σύνθεσή του είναι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου, θα μπορούσε να υπολογιστεί για το υλικό το μέγεθος αυτό. και μέσω αυτού να καθοριστεί η ποιότητά του. Το πείραμα χαρακτηρίζεται ως πείραμα **ακουστικής τομογραφίας** και είναι βέβαια ορίζει ένα αντίστροφο πρόβλημα.. Από τη φυσική γνωρίζομε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου c και η διανυθείσα απόσταση σε μέσες τιμές δίδονται από την απλή σχέση $c = h/t$ όπου h είναι η διανυθείσα απόσταση και t είναι ο χρόνος, η μέτρηση του χρόνου με γνωστό το μήκος διάδοσης μπορεί να μας δώσει την ταχύτητα (μοντέλο).

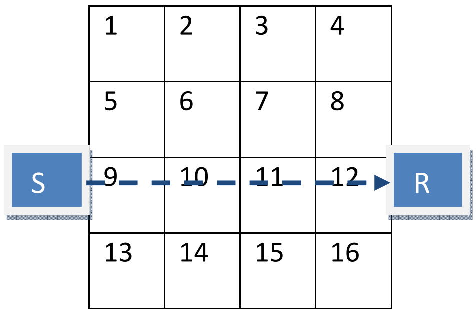
Θα θεωρήσομε λοιπόν για το παράδειγμά μας ότι έχομε να υπολογίσομε τις ιδιότητες 16 κυβικών τούβλων που έχουν διάσταση πλευράς h το καθένα και τα διατάσσομε σε τέσσερεις ομάδες των τεσσάρων (Σχήμα 1.3). Σε κάθε οριζόντια γραμμή και κατακόρυφη στήλη κάνομε μία μέτρηση ακουστικής διάδοσης ήχου στέλνοντας μία στενή δέσμη (που την περιγράφομε ως ακτίνα) ήχου που διαδίδεται σε ευθεία γραμμή και μετρώντας το χρόνο που πέρασε. Θεωρώντας το αντίστροφο της ταχύτητας (slowness) $s = 1/c$ και αποδίδοντας σε κάθε τούβλο το δείκτη i όπως στο σχήμα, οι 8 συνολικά μετρήσεις (4 οριζόντιες και 4 κατακόρυφες) μας δίδουν τις εξισώσεις που περιγράφονται συνοπτικά ως :

$$\begin{aligned} T_1 &= hs_1 + hs_2 + hs_3 + hs_4 \\ T_2 &= hs_5 + hs_6 + hs_7 + hs_8 \\ &. \\ &. \\ &. \\ T_8 &= hs_4 + hs_8 + hs_{12} + hs_{16} \end{aligned} \qquad (1.13)$$

και σε μορφή εξίσωσης πινάκων ως

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ T_8 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ . \\ . \\ s_{16} \end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

Προσέξτε ότι τώρα το γραμμικό πρόβλημα είναι υπο-ορισμένο σε αντίθεση με τα προβλήματα των περιπτώσεων 1.3.1 και 1.3.2.



Σχήμα 1.3 Διάταξη πειράματος ακουστικής τομογραφίας. Ο πομπός S και ο δέκτης R διατάσσονται έτσι ώστε η ακουστική ακτίνα να σαρώνει μία γραμμή ή στήλη.

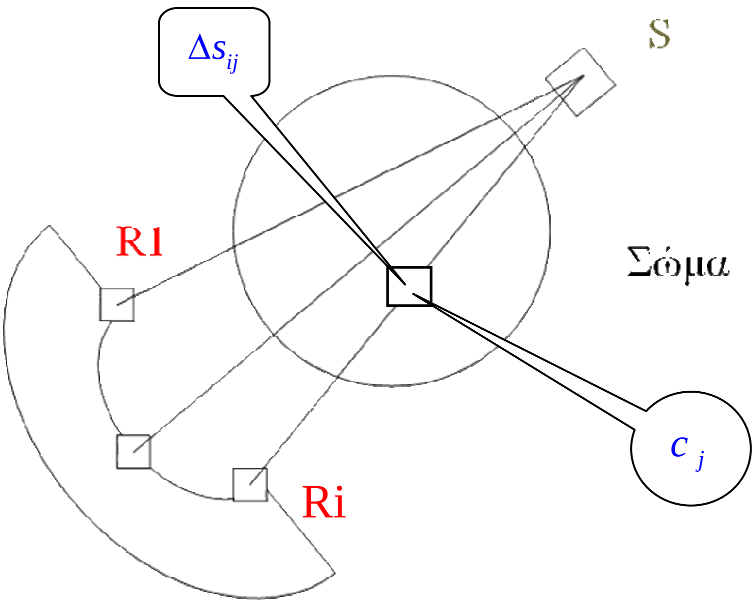
1.3.4 Ένα απλό πρόβλημα αξονικής τομογραφίας

Ευρύτατη εφαρμογή έχουν τα αντίστροφα προβλήματα στην ιατρική διαγνωστική. Η αξονική ή μαγνητική τομογραφία βασίζουν τα αποτελέσματά τους στην επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων από την ηλεκτρομαγνητική κυματική διάδοση και την θεωρία μαγνητικών πεδίων αντίστοιχα και βέβαια βοηθούνται αποτελεσματικά από την απεικόνιση και την επεξεργασία εικόνας. Ως παράδειγμα εδώ θα δούμε πως μπορεί κατ' αρχήν να διατυπωθεί ένα αντίστροφο πρόβλημα που σχετίζεται με την αξονική τομογραφία και πως αυτό μπορεί να γραμμικοποιηθεί.

Ο διεθνής όρος για την διαγνωστική τεχνική που βασίζεται στην χρήση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαπερνούν ένα σώμα και μεταφέρουν πληροφορίες για τη σύνθεσή του είναι Computerized Axial Tomography (CAT). Το απλό μοντέλο στο οποίο βασίζεται συσχετίζει την μετρούμενη ένταση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που παράγεται από ένα κύμα (X ray) γνωστής αρχικής έντασης όταν αυτό διαπεράσει ένα σώμα, με το συντελεστή απορρόφησης της ακτινοβολίας που είναι μία χαρακτηριστική ιδιότητα των ιστών του σώματος. Το μοντέλο βέβαια στην πράξη είναι πιο σύνθετο αλλά η απλοποιημένη του εκδοχή μπορεί να μας δώσει την ιδέα της διατύπωσης του αντίστροφου προβλήματος. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η μεταβολή της έντασης της ακτινοβολίας καθώς διαπερνά ένα σώμα είναι αντίστροφα ανάλογη της έντασης της ακτινοβολίας με το συντελεστή αναλογίας να αντιπροσωπεύει το συντελεστή απορρόφησης, μέσω του οποίου μοντελοποιείται το σώμα.

$$dI / ds = -c(x, y)I \tag{1.15}$$

Όπου I είναι η ένταση s είναι το στοιχειώδες μήκος διάδοσης σε ευθεία, $c(x, y)$ είναι ο συντελεστής απορρόφησης που υπολογίζεται ως συνάρτηση των χωρικών μεταβλητών σε ένα επίπεδο. Για να μπορέσει η ακτινολογία να δώσει μια εικόνα του τρισδιάστατου σώματος, η ακτινοβόληση γίνεται σε συνδυασμό πηγής και πολλών δεκτών που συνήθως βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου με κέντρο την πηγή. Το ακτινοβολούμενο σώμα βρίσκεται ενδιάμεσα ενώ κάθε συνδυασμός πηγής και δέκτη ορίζει ένα επίπεδο στο οποίο απεικονίζεται η ενδεχόμενη ανομοιογένεια. Στο απλοποιημένο παράδειγμα που θα ακολουθήσει θα θεωρήσομε ότι το επίπεδο εκφυλίζεται σε ευθεία και επομένως θα δεχτούμε ότι η εφαρμογή της αξονικής τομογραφίας γίνεται σε πολλές ευθείες που ορίζονται από δύο σημεία (πηγής και δέκτη) σύμφωνα με το σχήμα 1.4. Ωστόσο το σώμα θα θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε ένα επίπεδο. Επομένως έχομε περιορίσει τη διάσταση του πραγματικού προβλήματος κατά ένα.



Σχήμα 1.4 Σχηματική διάταξη αξονικής τομογραφίας. Η πηγή S στέλνει ηλεκτρομαγνητικά κύματα γνωστής αρχικής έντασης I_0 που σαρώνουν το σώμα και καταγράφονται στους δέκτες R_i. Για τη διακριτοποίηση-γραμμικοποίηση του προβλήματος το τετράγωνο στο σώμα αντιπροσωπεύει το στοιχείο j

Εάν λοιπόν η αρχική ένταση της δέσμης είναι I_0, η εξίσωση 1.15 επιλυόμενη δίνει για κάθε δέσμη i μετρούμενη ισχύ πεδίου :

$$I_i = I_0 \exp(-\int_{beam} c(x,y)ds), \quad i=1,...N \tag{1.16}$$

Με βάση όσα έχομε πει παραπάνω, το πρόβλημα θυμίζει αυτό που περιγράψαμε στην εξίσωση 1.2 και είναι ένα διακριτό ως προς τα δεδομένα, αλλά συνεχές ως προς τις παραμέτρους ($c(x,y)$) άμεσο αλλά μη γραμμικό πρόβλημα. Η επίλυσή του μπορεί να γίνει με τεχνικές που θα αναφερθούν σε ανάλογο κεφάλαιο των σημειώσεων, ωστόσο εδώ έχει σημασία να δούμε πως μπορούμε να το απλοποιήσομε γραμμικοποιώντας το.

Αυτό μπορεί να γίνει εάν υποθέσομε ότι ο συντελεστής απορρόφησης είναι μικρός και συνεπώς το ολοκλήρωμα στην 1.16 είναι επίσης μικρό.. Επίσης γνωρίζομε ότι εκθετική συνάρτηση $\exp(-x)$ μπορεί να προσεγγιστεί με τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor και να πάρομε : $\exp(-x) \simeq 1-x$. Με βάση τα παραπάνω, η 1.16 μπορεί να γραφεί ως :

$$I_i = I_0 (1-\int_{beam} c(x,y)ds), \quad i=1,...N \tag{1.17}$$

Έτσι παίρνομε :

$$\Delta I_\iota = \frac{I_0 - I_i}{I_0} = \int_{beam} c(x,y)ds, \quad i=1,....N \tag{1.18}$$

Ένα ακόμη βήμα θα μας γραμμικοποιήσει πλήρως το πρόβλημα. Η διακριτοποίηση του σώματος σε τετραγωνικά στοιχεία σταθερού συντελεστή απορρόφησης $c_j \quad j=1,...M$ το καθένα, και η προσέγγιση του ολοκληρώματος με άθροισμα (Αριθμητική Ανάλυση) εφ΄όσον θεωρήσομε ότι σε κάθε στοιχείο *j* και κάθε δέσμη *i*, το διανυόμενο μήκος είναι Δs_{ij} (Σχήμα 1.4). Η υιοθέτηση της αντιστοίχισης με δείκτες που ακολουθήσαμε μας επιτρέπει να γράψομε την εξίσωση (1.18) με την προσέγγιση του ολοκληρώματος με άθροισμα ως :

$$\Delta I_i = \frac{I_0 - I_i}{I_0} = \sum_{j=1}^{M} \Delta s_{ij} c_j, \quad i=1,....N \tag{1.19}$$

Προσέξτε ότι η ανωτέρω διακριτοποίηση μας οδηγεί σε ένα πρόβλημα ανάλογο με εκείνο της ακουστικής τομογραφίας : Κάθε δέσμη δεν διαπερνά όλα τα στοιχειώδη τετραγωνικά στοιχεία του σώματος, αλλά μόνο αυτά που βρίσκονται στο πέρασμά της. Καταλήξαμε λοιπόν σε ένα σύστημα *N* εξισώσεων με *M* αγνώστους όπως και στην περίπτωση της ακουστικής τομογραφίας. Ο πίνακας **G** του γραμμικού συστήματος έχει αρκετά μηδενικά στοιχεία και αποτελείται από τα μήκη των διαδρομών των ακτίνων στο σώμα.