ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι - 2η Σειρά Ασκήσεων

A

Ασκήσεις $\mathbf{1.9}, \mathbf{1.11i}, \mathbf{1.16}, \mathbf{1.22}, \mathbf{1.23}, \mathbf{1.30}, \mathbf{1.31}$ και $\mathbf{1.34}$ από τις σημειώσεις. του Χ. Κουρουνιώτη

B

Άσκηση 1

Θεωρούμε τους πινακές

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

α΄) Βρείτε έναν $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ πίνακα C με την ιδιότητα $AC = I$.

β΄) Δείξτε ότι δεν υπάρχει 2×2 πίνακας D με την ιδιότητα $BD = I$.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$$

Δείξτε (με επαγωγή) ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ έχουμε ότι

$$A^n = \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}$$

όπου με A^n συμβολίζουμε το γινόμενο του A με τον εαυτό του $n-1$ φορές.

Άσκηση 3

Οι πίνακες που στρέφουν το επίπεδο x, y είναι

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

α΄) Επαληθεύστε την $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$ από τις ταυτότητες για το $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ και $\sin(\theta_1 + \theta_2)$.

β΄) Ποίο είναι το γινόμενο $A(\theta)$ επί $A(-\theta)$;

Άσκηση 4

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

α΄) Βρείτε τους πίνακες E_{ij} που εκφράζουν την διαδικασία της απαλοιφής για τον πίνακα A.

β΄) Εκφράστε τον A ως γινόμενο LU, όπου L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο και U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

γ΄) Λύστε το σύστημα

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

αναλύοντάς το σε δύο τριγωνικά συστήματα $Lc = b$ και $Ux = c$.

Άσκηση 5

Πώς θα μπορούσατε να παραγοντοποιήσετε τον A σ' ένα γινόμενο UL , άνω τριγωνικού και κάτω τριγωνικού; Θα είχε τούτο τους ίδιους παράγοντες με το $A = LU$;