Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

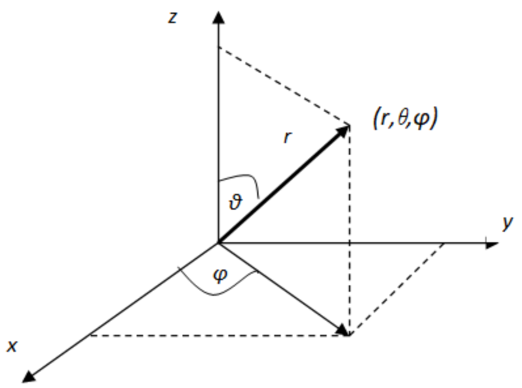
2023-2024

Ασκήσεις 1^{ης} Σειράς Κύματα επιφανείας γενικά θέματα για την ακουστική εξίσωση

Άσκηση 1.7

Χρησιμοποιώντας χωρισμό μεταβλητών, διατυπώστε την εξίσωση Helmholtz σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων σε περιβάλλον σφαιρικής συμμετρίας.

Επίλυση



Η εξίσωση Helmholtz είναι :

$$\nabla^2 p(\vec{x}) + k^2 p(\vec{x}) = 0$$

που εδώ διατυπώνεται για την ακουστική πίεση.

Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (δείτε σχήμα επάνω) έχουμε:

$$\vec{x} = (r, \theta, \varphi)$$

και εκφράζοντας τη λαπλασιανή στο εν λόγω σύστημα (δείτε και το σχετικό τυπολόγιο) παίρνομε :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial p}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + k^2 p = 0 \qquad (1)$$

όπου βέβαια $p = p(r, \theta, \varphi)$.

Μπορούμε τώρα να θεωρήσομε ότι $p(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ που είναι η γενική περίπτωση με χρήση χωρισμού μεταβλητών και αφού αντικαταστήσομε στην εξίσωση Helmholtz, διαιρέσουμε με $R\Theta\Phi$ και προσέξομε από ποιες μεταβλητές εξαρτάται κάθε μία από τις συναρτήσεις αυτές, παίρνομε :

$$\frac{1}{r^2}\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+k^2=0$$

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας $\frac{d\Theta}{d\theta}=0, \frac{d\Phi}{d\varphi}=0$

Οπότε καταλήγομε στη σχέση

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2R=0 \tag{2}$$

Ένας άμεσος τρόπος (χωρίς χωρισμό μεταβλητών) για να καταλήξομε σε μία εξίσωση για την ακουστική πίεση σε περιβάλλον σφαιρικής συμμετρίας είναι να ξεκινήσουμε από την αρχική Helmholtz (1) και να προσέξουμε ότι εφ’ όσον έχομε σφαιρική συμμετρία, $\frac{\partial p}{\partial\theta}=0, \frac{\partial p}{\partial\varphi}=0$.

Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος στην (1) μηδενίζονται, επομένως καταλήγομε στην απλή εξίσωση:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right)+k^2p=0 \tag{3}$$

που γράφεται και ως

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+k^2p=0$$

Είναι προφανής η σύμπτωση της (2) με την (3), ενώ έχομε διατηρήσει την έκφραση με μερικές παραγώγους στην πίεση. Η λύση για την (3) είναι ακριβώς ίδια με την (2).

<u>Άσκηση μέσα στην άσκηση</u>

Επιβεβαιώστε ότι λύση της ως άνω εξίσωσης είναι η συνάρτηση :

$$p(r)=\frac{A}{r}e^{ikr}$$