Διάλεξη 1. Εισαγωγή

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε με μερικά παράδειγματα από την κλασική Φυσική.

Παράδειγμα I. (βλ. σχήμα 1)
Η δύναμη βαρύτητας $\mathbf{F}$
που προκαλείται από μια σημειακή μάζα M στη θέση $(0,0,0)$
και ασκείται πάνω σε ένα σωματίδιο μάζας m στη θέση (x,y,z),
δίνεται, συμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα, από την σχέση

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}\mathbf{r}$$

ή

$$\mathbf{F} = \Big(-\gamma \frac{M\,m}{r^3}x, -\gamma \frac{M\,m}{r^3}y, -\gamma \frac{M\,m}{r^3}z\Big)$$

εδώ $\gamma > 0$ μια σταθερά, $\mathbf{r} = (x,y,z)$,

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Το διανυσματικο πεδίο $\mathbf{F}$ ειναι συντηρητικό δηλαδή υπάρχει μια συνάρτηση

$$u(x,y,z) : \mathbf{R}^3 \to R$$

τέτοια ώστε

$$\nabla u = \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad (u_x, u_y, u_z) = \mathbf{F}$$

δηλαδή

$$u_x = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}x \qquad\qquad u_y = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}y$$
$$u_z = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}z.$$

Προφανώς

$$u(x,y,z) = \gamma \frac{M\,m}{r}.$$

Πράγματι,

$$u_x = \big(\gamma\,M\,m\,r^{-1}\big)_x = -\gamma\,M\,m\,r^{-2}r_x = -\gamma\,M\,m\,r^{-2}\frac{x}{r} = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}x,$$

αφου

$$r_x = \big(\sqrt{x^2+y^2}\big)_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$$

.

Παρομοίως και για u_y, u_x εδω χρισημοποούμε οτι $r_y = y/r$, $r_z = z/r$.

Επίσης έχουμε

$$u_{xx} = -\gamma\, M\, m\Big(\frac{x}{r^3}\Big)_x = -\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} + x(r^{-3})_x\Big) =$$
$$-\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x}{r^4}r_x\Big),$$

Αρα

$$u_{xx} = -\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}\Big),$$

και παρομοίως

$$u_{yy} = -\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5}\Big),$$

$$u_{zz} = -\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}\Big),$$

συνεπώς

(1) $$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται *εξίσωση Laplace*.

Για $n = 2$ γράφουμε

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Γενικά χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό

$$\Delta\, u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \ \text{ ή } \ \Delta\, u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = u_{x_1 x_1} + ... + u_{x_n x_n}.$$

Όταν $n = 2$ αντι (x_1, x_2) γράφουμε (x, y) και όταν $n = 3$ αντι (x_1, x_2, x_3) γράφουμε (x, y, z).

Αρα την *εξίσωση Laplace* για $n \geq 2$ την γράφουμε ως

$$\Delta\, u = 0.$$

Έστω τώρα η μάζα M είμαι κατανεμημένη σε μία μπάλα $\mathbf{B}(\mathbf{0}, R)$ με κέντρο στο σημείο $(0,0,0)$ και ακτίνα R τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $u(x,y,z)$ επαληθεύει την εξίσωση

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -4\pi\rho \;\text{ ή }\; \Delta u = -4\pi\rho \tag{2}$$

όπου η συνάρτηση $\rho(x,y,z)$ είναι η πυκνότητα της μάζας στο σημείο (x,y,z) (οι υπολογισμοί εδώ είναι αρκετά ογκώδεις).

Η εξίσωση (2) ονομάζεται *εξίσωση* $Poisson$.
Προφανώς εκτός της σφαίρας $\mathbf{B}(\mathbf{0}, R)$ όπου $\rho(x,y,z) \equiv 0$ η (2) γίνεται (1).

Τις ίδιες εξισώσεις επαληθεύει και το δυναμικό ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Παράδειγμα ΙΙ. (βλ. σχήμα 2)

Ας δώσουμε ένα άλλο παράδειγμα όπου εμφανίζεται η εξίσωση $Laplace$. Έστω $\mathbf{u} = (u, v, w)$ διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, υποθέτουμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη και το ρευστό ασυμπίεστο δηλαδή

$$curl\, \mathbf{u} = 0, \quad div\, \mathbf{u} = 0$$

όπου

ή

$$curl\, \mathbf{u} \equiv (w_y - v_z)i + (u_z - w_x)j + (v_x - u_y)k$$

ή

$$curl\, \mathbf{u} \equiv \Big(w_y - v_z,\, u_z - w_x,\, v_x - u_y\Big)$$

και

$$div\, \mathbf{u} \equiv u_x + v_y + w_z$$

Συνεπώς έχουμε τις εξισώσεις

$$w_y = v_z, \;\; u_z = w_x, \;\; v_x = u_y$$

και

$$u_x + v_y + w_z = 0.$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία ως προς x

$$u_{xx} + v_{yx} + w_{zx} = 0$$

από την άλλη

$$v_{xy} = u_{yy}, \;\; w_{xz} = u_{zz},$$

συνεπώς

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Παρομοίως

$$v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = 0,$$

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0.$$

Βλέπουμε ότι και οι τρεις συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου ταχυτήτων $\mathbf{u}$ επαληθεύουν την εξίσωση $Laplace$.

Παράδειγμα III. (βλ. σχήμα 3) Έστω $u(t, x, y, z)-$ θερμοκρασία στο σημείο $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$ στη χρονική στιγμή t.

Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz,$$

όπου $\rho > 0$ πυκνότητα και $c > 0$ θερμοχωρητικότητα, μας δίνει την συνολική θερμότητα που περιέχεται στο Ω. Σύμφωνα με τον νόμο $Fourier$ η θερμότητα ρέει από τα θερμά προς τα ψυχρά με βάση το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = -\kappa \nabla\, u$$

όπου $\kappa > 0$ είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας.

Από τον νόμο διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι η μεταβολή της συνολικής θερμότητας καθορίζεται από την ροή της θερμότητας διαμέσου του συνόρου $\partial\Omega$ και από της πηγές θερμότητας f που βρίσκονται στο Ω, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz = \int_{\partial\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nu\, ds + \int_\Omega f\, dxdydz,$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του Ω.

Ας θυμηθούμε το θεώρημα της απόκλισης:

$$\int_\Omega div\mathbf{F}\, dxdydz = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu\, ds$$

όπου $\mathbf{F}$ τυχαίο ομαλό διανυσματικό πεδίο.

Εφαρμόζοντας αυτό το θεώρημα για $\mathbf{F} = -\kappa\nabla\, u$ έχουμε

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz = \int_\Omega div(\kappa\nabla u)\, dxdydz + \int_\Omega f\, dxdydz$$

ή

$$\int_\Omega \Big((\rho\, c\, u)_t - div(\kappa\nabla u) - f\Big) dxdydz = 0.$$

Αφού το χωρίο Ω είναι τυχαίο, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(\rho\, c\, u)_t - div(\kappa\nabla u) = f.$$

Αν υποθέσουμε ότι οι ποσότητες ρ, c, κ είναι σταθερες, τότε για την θερμοκρασία u θα έχουμε

$$u_t - k\Delta u = \tilde{f}, \quad k = \frac{\kappa}{\rho c}, \quad \tilde{f} = \frac{f}{\rho c}. \tag{3}$$

Η (3) ονομάζεται *εξίσωση θερμότητας*. Σε μία διάσταση η εξίσωση θα γράφεται ως εξής

$$u_t - ku_{xx} = f.$$

Παράδειγμα IV. (βλ. σχήμα 4)
Η εξίσωση

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ ή } u_{tt} - \Delta u = f, \tag{4}$$

ονομάζεται *κυματική εξίσωση* και περιγράφει μικρές ταλαντώσεις, εδω f δοσμένη συνάρτηση που έχει να κάνει με τις πηγές ενέργιας. Η αντίστοιχη εξίσωση με μια χωρική μεταβλητή, δηλαδή η

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

περιγράφει μικρές ταλαντώσεις μιας χορδής.

Η προσδιοριστέα συνάρτηση u περιγράφει τη θέση ενος σημείου τη χρονική στιγμή t.

Χωρίς να δωσουμε λεπτομέρειες θα επισημάνουμε οτι η εξίσωση (4) προκύπτει απο τον δευτερο νόμο του Νεύτωνα λαμβάνοντας υπ όψιν το γεγονός οτι

η u_{tt} είναι η επιτάχυνση

και

η Δu έχει να κάνει με τις δυνάμεις που δρούν πάνω στο στερεό που δέχεται μικρές ταλαντώσεις.

Παρατηρούμε ότι αν στα παραδείγματα III και IV η διαδικασία είναι στατική δηλαδή με το πέρασμα του χρόνου η u δεν μεταβάλλεται

$$u_t = 0, \quad u_{tt} = 0$$

τότε και η (3) και η (4) γίνονται εξίσωση $Laplace$ ($Poisson$ αν $f \not\equiv 0$).

Τέσσερα τελείως διαφορετικής φύσεως φαινόμενα περιγράφονται απο την ίδια εξίσωση!

Μια συνάρτηση η οποία επαληθευει την εξίσωση $Laplace$ ονομάζεται

αρμονική συνάρτηση.

Τέτοιες συναρτήσεις παίζουν πολύ συμαντικό ρόλο στα Καθαρά και Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Παράδειγμα V. (βλ. σχήμα 5)

Έστω τώρα $\rho(t,x,y,z)-$ πυκνότητα στο σημείο $(x,y,z) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$ στη χρονική στιγμή t. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_\Omega \rho \, dxdydz,$$

μας δίνει την συνολική μάζα του Ω.

Έστω $\mathbf{u} = (u, v, w)$ διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού.

Από τον νόμο διατήρησης της μάζας έχουμε ότι η μεταβολή της συνολικής μάζας καθορίζεται από την ροή της μάζας διαμέσου του συνόρου $\partial\Omega$ και από της πηγές της μάζας f που βρίσκονται στο Ω, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, dxdydz = -\int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{u}\cdot\nu \, ds + \int_\Omega f \, dxdydz.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, dxdydz = -\int_\Omega div(\rho\,\mathbf{u}) \, dxdydz + \int_\Omega f \, dxdydz$$

ή

$$\int_\Omega \big(\rho_t + div(\rho\,\mathbf{u}) - f\big) dxdydz = 0.$$

Αφού το χωρίο Ω είναι τυχαίο, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\rho_t + div(\rho\,\mathbf{u}) = f.$$

Συνήθως παίρνουνε $f \equiv 0$, δηλαδή

$$\rho_t + div(\rho\,\mathbf{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho \, div\mathbf{u} = 0. \tag{6}$$

Αν θα υποθέσουμε ότι η πυκνότητα είναι σταθερή, το οποιο σημαίνει οτι η ύλη είναι ασυμπίεστη, τότε απο την (6) προκύπτει

$$div\,\mathbf{u} = 0,$$

αυτή η συνθήκη ονομάζεται *συνθήκη ασυμπιεστότητας*.

Το διανυσματικό πεδίο $(x(t), y(t), z(t))$ περιγράφει την θέση ενός σημείου τη χρονική στιγνή t.

Η καμπύλη

$$\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in (t_0, T)$$

ονομάζεται *τροχιά*.

Το διανυσματικό πεδίο

$$(x'(t), y'(t), z'(t))$$

περιγράφει την ταχύτητα το σημείου αυτού αρα η καμπύλη

$$\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

ορίζεται από το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Αν η ύλη είναι ασυμπίεστη τότε η πυκνότητα κατά μήκος της τροχιάς πρέπει να είναι σταθερή (οχι απαραίτητα σταθερή παντου οπως είχαμε υποθέσει πιο πάνω), δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\rho(t, \overline{\sigma}(t)) \equiv \frac{d}{dt}\rho(t, x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Απο τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{d}{dt}\rho(t, x(t), y(t), z(t)) = \rho_t + \rho_x u + \rho_y v + \rho_z w \equiv \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho,$$

άρα

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho = 0 \tag{7}$$

Προφανώς από την (6) και την (7) πάλι προκύπτει η συνθήκη ασυμπιεστότητας $div\, \mathbf{u} = 0$.

Σε μία διάσταση η εξίσωση (7) γράφεται ως εξής

$$\rho_t + u\, \rho_x = 0.$$

Παράδειγμα VI.

Τέλος θα δώσουμε (χωρίς λεπτομέρειες) τις εξισώσεις που περιγράφουν τη *διάδοση των ακουστικών κυμάτων*:

$$\rho_0 u_t + p_x = 0, \;\; p_t + \rho_0 c_0^2 u_x = 0, \tag{8}$$

εδώ η

$u(t,x)$ είναι η ταχύτητα,

$p(t,x)$ είναι η πίεση και

ρ_0, c_0 δοσμένες θετικές σταθερές,

ρ_0 είναι η πυκνότητα και

η σταθερά c_0 έχει να κάνει με την συμπιεσιμότητα της ύλης.

Παρατηρούμε ότι αν παραγωγίσουμε την πρώτη εξίσωση ως προς t,
τη δεύτερη ως προς x
και μετά αφαιρέσουμε την δεύτερη από την πρώτη θα έχουμε την κυματική εξίσωση

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0$$

αν παραγωγίσουμε την πρώτη ως προς x και θα την πολλαλπλασιάσουμε με c_0^2,
τη δεύτερη ως προς t
και μετά αφαιρέσουμε την πρώτη από την δεύτερη θα έχουμε κυματική εξίσωση για την πίεση

$$p_{tt} - c_0^2 p_{xx} = 0.$$

Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε και πολλά άλλα παραδείγματα, από την δυναμική των πληθυσμών έως την χρηματοοικονομία, και προφανώς από την Φυσική.

Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ή μερικές διαφορικές εξισώσεις) καλούνται εξισώσεις με μια άγνωστη συνάρτηση, τουλάχιστον δύο μεταβλητών, που εκτός ενδεχομένως από την άγνωστη συνάρτηση και τις ανεξάρτητες μεταβλητές περιέχουν και μερικές παραγώγους της συνάρτησης.

Τάξη μιας εξίσωσης καλείται η υψηλότερη τάξη μερικής παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Παραδείγματος χάριν οι (1), (2), (3), (4) είναι δεύτερης τάξης ενώ οι (6), (7) είναι πρώτης. Το σύστημα (5) και (8) είναι σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης.

Λύση της εξίσωσης σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ονομάζουμε
μια ομαλή στο Ω συνάρτηση
η οποία επαληθεύει την εξίσωση σε κάθε σημείο του Ω.

Π.χ. οι συνάρτησεις

$$u(t,x) = e^{-t}\sin x, \ \ u(t,x) = e^{-t}\cos x$$

είναι λύσεις της εξισώσης

$$u_t = u_{xx},$$

οι συνάρτησεις

$$u(t,x) = \cos t\, \sin x, \ \ u(t,x) = \sin t\, \cos x$$

είναι λύσεις της εξισώσης

$$u_{tt} = u_{xx}$$

ενω οι συνάρτησεις

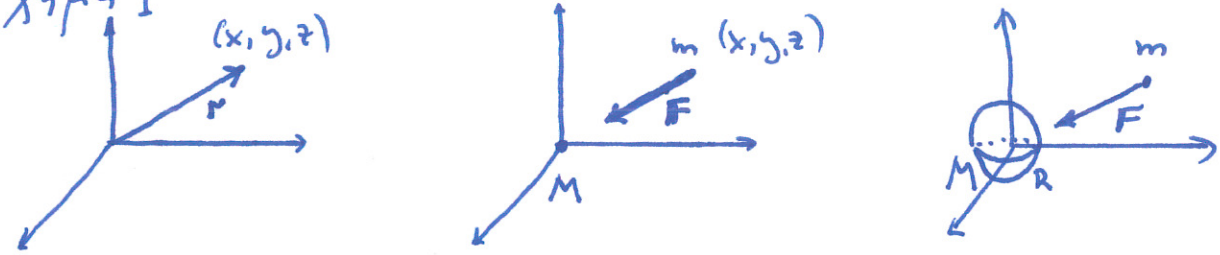
$$u(x,y) = x^2 - y^2, \qquad u(x,y) = x\,y$$

είναι λύσεις της εξισώσης

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

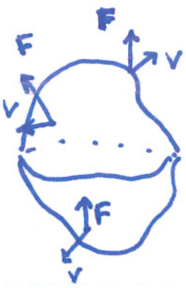
δηλαδή αρμονικές συναρτήσεις.

σχήμα 1

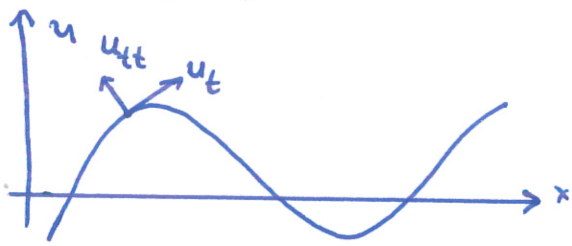


σχήμα 2

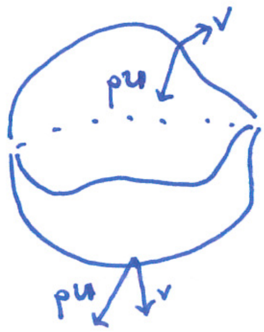
σχήμα 3

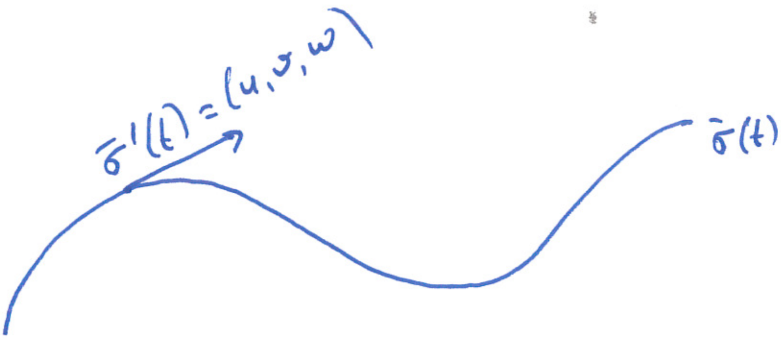


σχήμα 4



σχήμα 5





Διάλεξη 2. Εξισώσεις πρώτης τάξης

Θα ξεκινήσουμε με την απλούστερη περίπτωση εξίσωσης πρώτης τάξεως. Θέλουμε να βρούμε τη λύση $u(t,x)$ της εξίσωσης

$$u_t + u_x = 0. \tag{1}$$

Γνωρίζουμε οτι η παράγωγος της u κατα κατεύθυνση που ορίζεται απο το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$$

είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} = \nabla u \cdot \overline{\nu} = u_t \nu_1 + u_x \nu_2.$$

Αρα αν θα πάρουμε

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

τότε

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} = u_t \frac{\sqrt{2}}{2} + u_x \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

και η (1) θα πάρει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} = 0. \tag{2}$$

Τι σημαίνει αυτο;

Προφανώς το διάνυσμα

$$\overline{\nu} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

ορίζει στον $\mathbf{R}^2$ μια οικογένεια ευθειών (βλ. σχήμα 1)

$$x - t = C$$

και η σχέση (2) μας λέει ότι κατα μήκος αυτών των ευθειών η $u(t,x)$ δεν μεταβάλλεται,

δηλαδή οταν $x - t = C$

η u ειναι σταθερά συνεπώς έχει τη μορφή

$$u(t,x) = g(x-t) \tag{3}$$

όπου g τυχαία παραγωγίσιμη συνάρτηση, πράγματι, ευκολα διαπιστώνουμε οτι

$$u_t + u_x = -g'(x-t) + g'(x-t) = 0.$$

Ο τύπος (3) μας δίνει τη γενική λύση της (1).

Προβλήμα $Cauchy$: να βρεθεί η λύση της (1) στον $\mathbf{R}^2$ η οποία επαληθευει τη συνθήκη

$$u(0,x) = \phi(x) \text{ για } |x| < \infty, \tag{4}$$

όπου $\phi(x)$ μια δοσμένη παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Η (4) ονομάζεται αρχική συνθήκη.

Απο την (3) έχουμε

$$u(0,x) = g(x)$$

αρα (βλ. (4))

$$g(x) = \phi x \quad \Leftarrow \quad g(x-t) = \phi(x-t)$$

συνεπώς η λύση του προβλήματος (1), (4) δίνεται απο τον τύπο

$$u(t,x) = \phi(x-t).$$

Π.χ. αν $\phi(x) = \sin x$,
τότε $u = \sin(x-t)$,
αν $\phi(x) = x^2 + e^x - 1$,
τότε $u = (x-t)^2 + e^{x-t} - 1$
και ουτω καθεξής.

Θα αναρωτηθούμε τωρα τι θα συμβεί αν στο πρόβλημα $Cauchy$ (1), (4) οι αρχικές συνθήκες (4)
είναι δοσμένες όχι σε όλο τον $\mathbf{R}$ αλλά
μόνο σε ένα διάστημα (a,b) ;
Δηλαδή η συνάρτηση $\phi(\xi)$ δίνεται μόνο για $\xi \in (a,b)$.

Αφου η λύση είναι

$$u = \phi(x-t)$$

είναι προφανές οτι η $u(t,x)$ ορίζεται μόνο για

$$x - t \in (a,b)$$

δηλαδή (βλ. σχήμα 2) σε μια λωρίδα

$$a < x - t < b.$$

Περνάμε στην πιο γενική εξίσωση

$$u_t + a(t,x)u_x = f(t,x,u) \text{ στον } \mathbf{R^2}. \tag{5}$$

Εδώ a και f δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις.
Έστω

$$\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s)) \ \ (\overline{\sigma} : s \to (t(s), x(s))$$

μια καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$.
Θεωρούμε την συνάρτηση $u(t,x)$ πάνω στην $\overline{\sigma}$ (περιορισμός της u στην $\overline{\sigma}$), δηλαδή

$$u(t(s), x(s)) = u(s).$$

Προφανώς, απο τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{du(s)}{ds} = \frac{d}{ds}u(t(s), x(s)) = u_t(t(s), x(s))\frac{dt}{ds} + u_x(t(s), x(s))\frac{dx}{ds}.$$

Αν

$$\frac{dt}{ds} = 1 \ \text{ και } \ \frac{dx}{ds} = a(t(s), x(s))$$

τότε η εξίσωση (5) κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$ παίρνει την μορφή

$$\frac{d\,u(s)}{ds} = f\big(t(s), x(s), u(s)\big)$$

που είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση.

Αν $t(0) = 0$ τότε $t = s$ (βλ. σχήμα 3) και η καμπύλη γράφεται ως

$$\overline{\sigma}(t) = (t,\, x(t)),$$

η εξίσωση (5) κατά μήκος της καμπύλης θα παρει την μορφή

$$\frac{d\,u(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big)$$

αφου πάνω στην καμπύλη $u(t) = u(t, x(t))$.

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα $Cauchy$:
να βρεθεί η λύση της εξίσωσης (5) η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$u(0, x) = \phi(x), \quad |x| < +\infty \tag{6}$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$\bar{\sigma}(0) = \big(t(0), x(0)\big) = (0, x_0), \quad (\overline{\sigma} : 0 \to (0, x_0)).$$

Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d\,t(s)}{d\,s} = 1, \quad \frac{d\,x(s)}{d\,s} = a(t(s), x(s))$$

με αρχικές συνθήκες

$$t(0) = 0, \quad x(0) = x_0.$$

Προφανώς $t = s$, άρα έχουμε

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

και η εξήσωση (5) γράφεται ως εξής

$$\frac{d\,u(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big)$$

(εδω $u(t) = u(t, x(t))$) με αρχική συνθήκη

$$u(0) = u(0, x(0)) = \phi(x(0)) = \phi(x_0).$$

Η εξίσωση

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t, x(t))$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση**
και η λύση της ονομάζεται **χαρακτηριστική**.

Για να λύσουμε την εξίσωση (5) πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{d\,x(t)}{d\,t} &= a(t, x(t)) \\ \frac{d\,u(t)}{d\,t} &= f(t, x(t), u(t)). \end{aligned} \tag{7}$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (7) είναι η χαρακτηριστική εξίσωση,
η δεύτερη είναι η (5) κατά μήκος της χαρακτηριστικής.

Για να λύσουμε την πρόβλημα (5), (6) προσθέτουμε στο (7) τις αρχικές συνθήκες

$$x(0) = x_0, \quad u(0) = \phi(x_0). \tag{8}$$

Συνοψίζοντας καταλήγουμε στο εξής:
η επίλυση του προβλήματος (5), (6) ανάγεται στην επίλυση του προβλήματος (7), (8).

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + au_x = b, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad u(0, x) = \phi(x).$$

Λύση. (βλ. σχήμα 4)

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = at + x_0 \ \text{ χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = b, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u = bt + \phi(x_0),$$

άρα η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t, x) = bt + \phi(x - at).$$

Έστω $a = b = 1$, $\phi(x) = e^x$, τότε

$$u(t, x) = t + e^{x-t}.$$

Έστω $a = -1$, $b = 2$, $\phi(x) = \sin\, x$, τότε

$$u(t, x) = 2t + \sin(x + t).$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$u_t + a\,u_x = b,$$

παρατηρούμε ότι κατά μήκος της καμπύλης

$$x - at = \text{σταθερά}$$

η $u(t)$ επαληθεύει την εξίσωση

$$u'(t) = b,$$

δηλαδή

$$u = bt + C$$

όπου η C είναι μια ποσότητα η οποία είναι σταθερή όταν η διαφορά $x - at$ είναι σταθερή, συνεπώς η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(t, x) = bt + g(x - at)$$

όπου g μια τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Προφανώς για τυχαία συνάρτηση g η $g(x - at)$ είναι σταθερά αν και μόνο αν η $x - at$ είναι σταθερά.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + x\,u_x = 0, \;\; u(0,x) = \phi(x).$$

Λύση. (βλ. σχήμα 5)

$$\frac{dx}{dt} = x, \;\; x\Big|_{t=0} = x_0 \;\; \Rightarrow \;\; x = x_0 e^t \;\; \text{χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \;\; u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \;\; \Rightarrow \;\; u = \phi(x_0),$$

άρα η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \phi(xe^{-t}).$$

Αν $\phi(x) = x$, τότε η λύση είναι

$$u(t,x) = x\,e^{-t}.$$

Αν $\phi(x) = x^2 + 1$,τότε

$$u(t,x) = x^2 e^{-2t} + 1.$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$u_t + x\,u_x = 0,$$

παρατηρούμε ότι κατά μήκος της καμπύλης

$$x\,e^{-t} = \text{σταθερά}$$

η u είναι σταθερή, συνεπώς η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g(x\,e^{-t})$$

όπου g μια τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Παράδειγμα 3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + t\,u_x = (t+x)u, \quad u(0,x) = \phi(x).$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = t, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}t^2 + x_0 \ \text{ χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = (t+x)u, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \big(t + \frac{1}{2}t^2 + x_0\big)dt,$$

άρα

$$u(t,x) = \phi(x_0)e^{x_0 t + t^3/6 + t^2/2}$$

ή

$$u(t,x) = \phi(x - t^2/2)e^{t^2/2 + tx - t^3/3}$$

Έστω $\phi(x) = e^x$, τότε

$$u(t,x) = e^{x + tx - t^3/3}.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$u_t + t\,u_x = (t+x)u$$

δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g(x - t^2/2)e^{t^2/2 + tx - t^3/3},$$

g τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Παράδειγμα 4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + (t-x)\,u_x = (x+1-t)e^t \;\; \text{στον} \;\; \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x) = \phi(x) \;\; \text{για} \;\; |x| < +\infty.$$

Ξεχωριστά γράψτε τη λύση για

$$\phi(x) = 2x+1 \;\; \text{και} \;\; \phi(x) \equiv 1.$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = -x+t, \;\; x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = (x_0+1)e^{-t} + t - 1 \;\; \text{χαρακτηριστική}$$

εδω λύσαμε εξίσωση πρώτης τάξης

$$x'(t) + x(t) = t,$$

συνεπώς η αρχική εξίσωση κατα μήκος της χαρακτηριστικής με την αρχική συνθύκη παίρνει τη μορφή

$$\frac{du}{dt} = x_0+1, \;\; u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u(t) = t(x_0+1) + \phi(x_0),$$

άρα

$$u(t,x) = te^t(x-t+1) + \phi\big(e^t(x-t+1) - 1\big)$$

αφού

$$x_0 = e^t(x-t+1) - 1.$$

Αν $\phi(x) = 2x+1$, τότε

$$u(t,x) = te^t(x-t+1) + 2e^t(x-t+1) - 1.$$

Για $\phi(x) \equiv 1$ εχουμε

$$u(t,x) = te^t(x-t+1) + 1.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$u_t + (t-x)\,u_x = (x+1-t)e^t$$

δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g\big(e^t(x-t+1) - 1\big) + te^t(x-t+1),$$

g οπως και πριν, τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Παρομοίως αντιμετωπίζεται και η γενική περίπτωση

$$a_1(t,x)u_t + a_2(t,x)u_x = f(t,x,u) \tag{9}$$

όπου

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0.$$

Έστω

$$\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s))$$

μια καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$ που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dt}{ds} = a_1 \ \text{ και } \ \frac{dx}{ds} = a_2$$

τότε η εξίσωση (9) κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$ παίρνει την μορφή

$$\frac{d\,u(s)}{ds} = f\big(t(s), x(s), u(s)\big)$$

που είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση.
Η συνθήκη $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$
είναι ουσιαστική,
αν παραβιάζεται τότε το πρόβλημα $Cauchy$ μπορεί να μην έχει λύση!

Στην περίπτωση που σε κάποιο σημείο ισχύει

$$a_1^2 + a_2^2 = 0$$

λέμε ότι σε αυτό το σημείο η εξίσωση *εκφυλίζεται.* Παρατηρούμε οτι για την εξίσωση (5) πάντα

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0$$

αφου $a_1 = 1$.

Θα τελειώσουμε με μία σημαντική παρατήρηση. Ας γράψουμε την εξίσωση (9) σε μορφή

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}u_t + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}u_x = \frac{f}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}. \tag{10}$$

Έστω $\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s))$ είναι τωρα η καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$ που ορίζεται από τις εξισώσεις

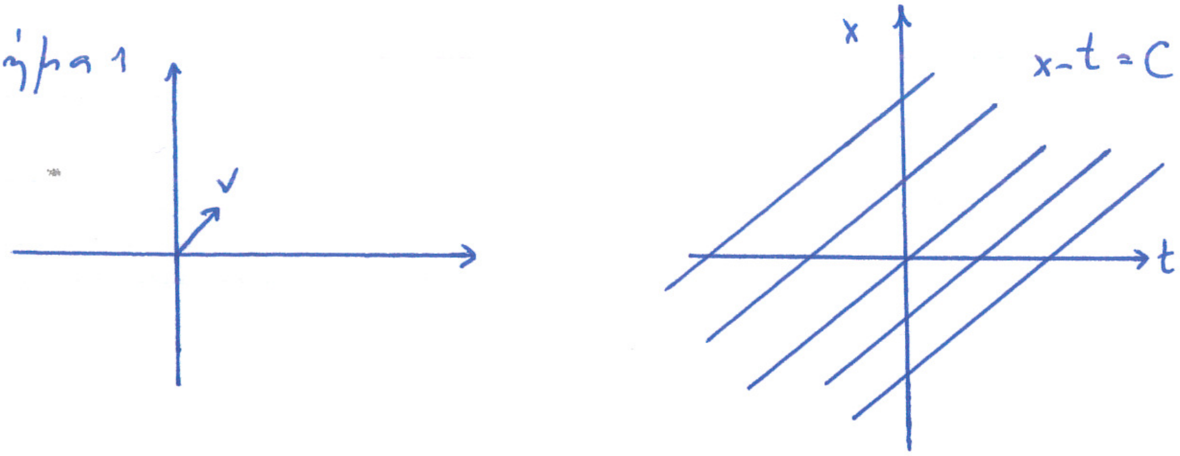
$$\frac{dt}{ds} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \text{ και } \frac{dx}{ds} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

τότε προφανώς

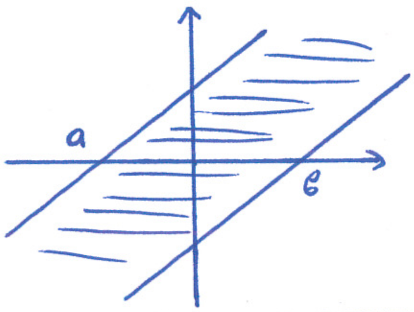
$$\|\overline{\sigma}'(s)\| = \sqrt{t'^2(s)+x'^2(s)} = 1$$

και το αριστερό μέρος της (10) είναι η παράγωγος της u κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$.

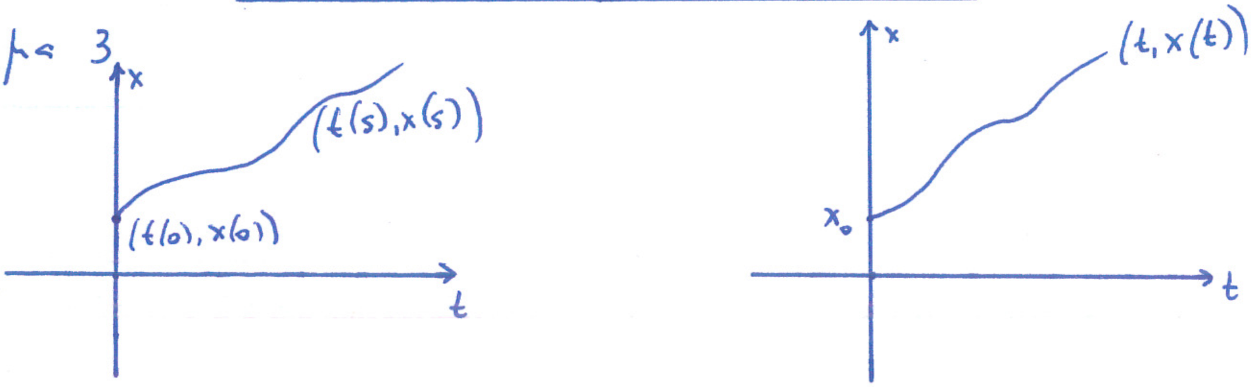
σχήμα 1



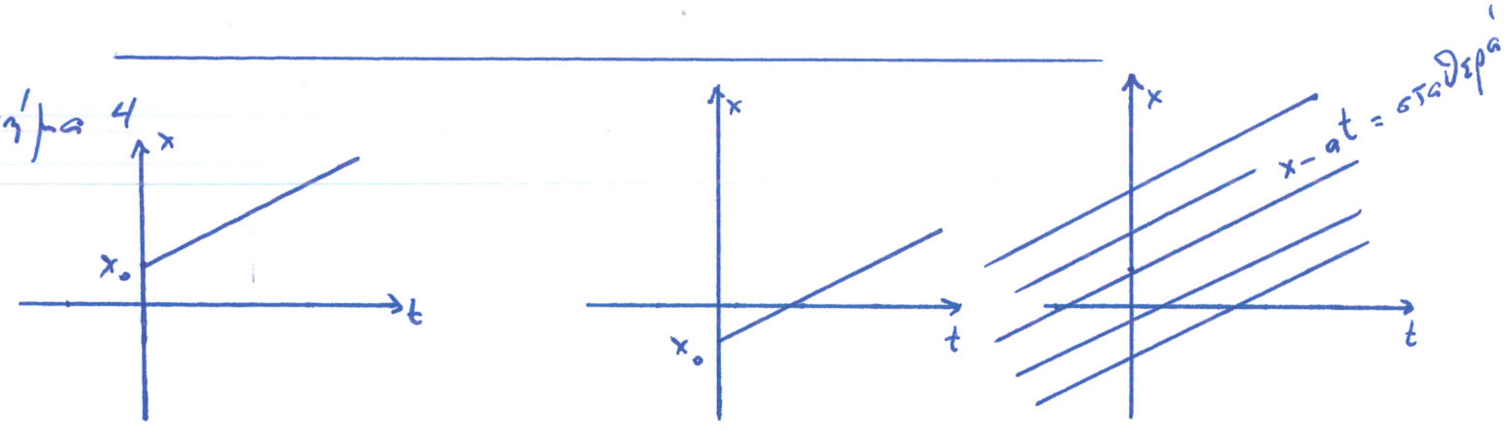
σχήμα 2



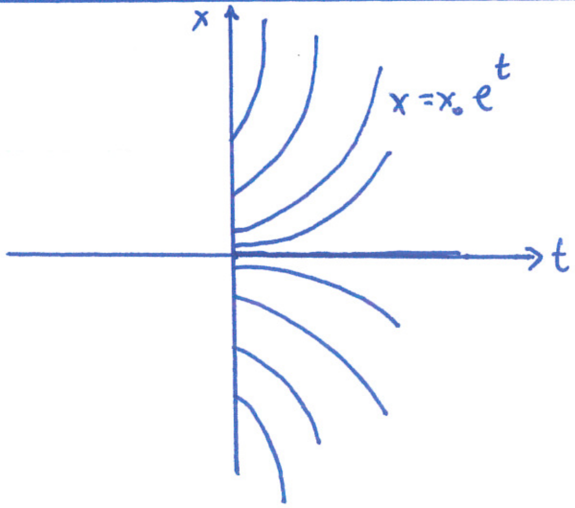
σχήμα 3



σχήμα 4



σχήμα 5



Διάλεξη 3. Κυματική Εξίσωση, τύπος *$d'Alembert$*

Στον $\mathbf{R^2}$ θεωρούμε την εξίσωση

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t, x), \tag{1}$$

όπου η f είναι δοσμένη ομαλή συνάρτηση,
t - χρόνος,
x - χωρική μεταβλητή,
u_{tt} μερική παράγωγος δεύτερης τάξης ως προς t και
u_{xx} μερική παράγωγος δεύτερης τάξης ως προς x.

Ψάχνουμε τη *γενική λύση* $u(t, x)$ της εξίσωσης (1).
Έστω $f \equiv 0$, έχουμε

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{2}$$

Η (2) ονομάζεται ομογενής εξίσωση. Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$(t, x) \to (\xi, \eta)$$

$$u(t, x) \to u(\xi, \eta) = u(\xi(t, x), \eta(t, x))$$

όπου

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t.$$

Προφανώς (κανόνας της αλυσίδας)

$$u_t(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} u(\xi(t, x), \eta(t, x)) = u_\xi(\xi, \eta)\xi_t + u_\eta(\xi, \eta)\eta_t = -u_\xi(\xi, \eta) + u_\eta(\xi, \eta),$$

$$u_x(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} u(\xi(t, x), \eta(t, x)) = u_\xi(\xi, \eta)\xi_x + u_\eta(\xi, \eta)\eta_x = u_\xi(\xi, \eta) + u_\eta(\xi, \eta).$$

Παρομοίως για τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$$u_{tt}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(- u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta)\Big) =$$

$$-u_{\xi\xi}(\xi,\eta)\xi_t - u_{\xi\eta}(\xi,\eta)\eta_t + u_{\eta\xi}(\xi,\eta)\xi_t + u_{\eta\eta}(\xi,\eta)\eta_t =$$

$$u_{\xi\xi}(\xi,\eta) - 2u_{\xi\eta}(\xi,\eta) + u_{\eta\eta}(\xi,\eta),$$

$$u_{xx}(t,x) = ... = u_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 2u_{\xi\eta}(\xi,\eta) + u_{\eta\eta}(\xi,\eta).$$

Άρα

$$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = -4u_{\xi\eta}(\xi,\eta)$$

συνεπώς η (2) παίρνει τη μορφή

$$u_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0. \tag{3}$$

Ολοκληρώνοντας δυο φορές παίρνουμε τη γενική λύση της εξίσωσης (3):

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + \Phi(\eta),$$

όπου F και Φ αυθαίρετες δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
Συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης (2) είναι

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t).$$

Έστω τώρα οι v και w λύσεις της (1), δηλαδή

$$v_{tt} - v_{xx} = f \ \text{ και } \ w_{tt} - w_{xx} = f,$$

τότε η

$$\tilde{u} \equiv v - w$$

είναι λύση της εξίσωσης (2), πράγματι

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = v_{tt} - v_{xx} - (w_{tt} - w_{xx}) = f - f = 0.$$

Άρα αν βρήκαμε κάποια (μερική) λύση της (1) π.χ. την w τότε οποιαδήποτε άλλη λύση v της (1) δίνεται από τον τύπο

$$v = w + \tilde{u}.$$

Συνεπώς ισχύει το εξής:

<u>*γενική λύση της*</u> (1) =

<u>*μερική λύση της (1)*</u> + <u>*γενική λύση της (2)*</u>.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η

$$u_0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta \Big) d\tau$$

είναι μερική λύση της (1). Πράγματι θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t G(t,x,\tau)d\tau, \quad \text{όπου} \;\; G(t,x,\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta.$$

Εξ ορισμού της παραγώγου

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^t G(t,x,\tau)d\tau \Big) =$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[\int_0^{t+\Delta t} G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau - \int_0^t G(t,x,\tau)d\tau \Big] =$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[\int_t^{t+\Delta t} G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau + \int_0^t \big(G(t+\Delta t,x,\tau) - G(t,x,\tau)\big)d\tau \Big] =$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Big[G(t+\Delta t,x,\tau^*) + \frac{1}{\Delta t}\int_0^t \big(G(t+\Delta t,x,\tau) - G(t,x,\tau)\big)d\tau \Big] =$$

$$G(t,x,t) + \int_0^t G_t(t,x,\tau)d\tau = \int_0^t G_t(t,x,\tau)d\tau,$$

όπου $\tau^* \in [t, t+\Delta t]$.

Εδώ αφαιρέσαμε και προσθέσαμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau$$

και μετά χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τα ολοκληρώματα το οποιο μας λέει οτι υπάρχει $\tau^* \in [t, t+\Delta t]$ τ.ω.

$$\int_t^{t+\Delta t} G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau = G(t+\Delta t,x,\tau^*)\Delta t.$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την παράγωγο G_t, έχουμε

$$G_t(t,x,\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\Big(\int_0^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta + \int_{x-t+\tau}^{0} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big) =$$

$$\frac{1}{2}\big[f(\tau,x+t-\tau) + f(\tau,x-t+\tau\big].$$

Συνεπώς έχουμε

$$u_{0t}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau,x+t-\tau) + f(\tau,x-t+\tau)\big]d\tau,$$

$$u_{0tt}(t,x) = f(t,x) + \frac{1}{2}\int_0^t \big[f_{x+t-\tau}(\tau,x+t-\tau) - f_{x-t+\tau}(\tau,x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Παρομοίως

$$u_{0x}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau,x+t-\tau) - f(\tau,x-t+\tau)\big]d\tau.$$

$$u_{0xx}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f_{x+t-\tau}(\tau,x+t-\tau) - f_{x-t+\tau}(\tau,x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Δηλαδή

$$u_{0tt} - u_{0xx} = f(t,x).$$

Συνοψίζοντας έχουμε ότι η γενική λύση της (1) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau.$$

Πρόβλημα $Cauchy$**.** Να βρεθεί στον $\mathbf{R^2}$ η λύση της εξίσωσης (1) η οποία ικανοποιεί τις *αρχικές συνθήκες*

$$u(0,x)=\phi(x), \quad u_t(0,x)=\psi(x) \ \text{ για } \ |x|<+\infty, \tag{4}$$

όπου ϕ και ψ δοσμένες ομαλές συναρτήσεις.

Πρώτα θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα $Cauchy$ (2), (4). Η γενική λύση της εξίσωσης (2) είναι

$$u(t,x)=F(x-t)+\Phi(x+t)$$

με αυθαίρετες (ομαλές) F και Φ.

Πρέπει να προσδιορίσουμε τις F και Φ χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (4).

Έχουμε

$$u(0,x)=F(x)+\Phi(x)=\phi(x),$$

$$u_t(0,x)=-F'(x)+\Phi'(x)=\psi(x).$$

Ολοκληρώνοντας τη δεύτερη ισότητα παίρνουμε

$$-F(x)+\Phi(x)+C=\int_{x_0}^{x}\psi(\zeta)d\zeta,$$

με C αυθαίρετη σταθερά.

Τώρα χρησιμοποιώντας την πρώτη ισότητα καταλήγουμε στο

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\phi(x)+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\psi(\zeta)d\zeta-\frac{1}{2}C$$

και

$$F(x)=\frac{1}{2}\phi(x)-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\psi(\zeta)d\zeta+\frac{1}{2}C$$

Συνεπώς

$$\Phi(x+t)=\frac{1}{2}\phi(x+t)+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x+t}\psi(\zeta)d\zeta-\frac{1}{2}C$$

και

$$F(x-t)=\frac{1}{2}\phi(x-t)-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x-t}\psi(\zeta)d\zeta+\frac{1}{2}C$$

και η λύση του προβλήματος (2), (4) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta) d\zeta$$

ο τύπος αυτός ονομάζεται **τύπος** $d'Alembert$.

Παρατηρούμε οτι για να είναι η λύση του προβλήματος (1), (4) δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση ($u(t,x) \in C^2$) πρέπει
$\phi(x) \in C^2$,
$\psi(x) \in C^1$, $f(t,x) \in C^1$.

Παράδειγμα 1 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = \sin\, x, \;\; u_t(0,x) = x \text{ για } |x| < \infty.$$

Λύση: Έχουμε

$$\phi(x) = \sin\, x, \quad \psi(x) = x$$

άρα

$$u(t,x) = \frac{\sin(x+t) + \sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \zeta d\zeta = \sin\, x\, cos\, t + xt.$$

Περνάμε τώρα στην γενική περίπτωση.

Θεωρούμε το πρόβλημα $Cauchy$ (1), (4).

Κατ αρχάς παρατηρούμε ότι για την

$$u_0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta \Big) d\tau$$

έχουμε

$$u_0(0,x) = 0.$$

Επίσης

$$u_{0t}(0,x) = 0,$$

διότι, όπως είχαμε δει

$$u_{0t}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau, x+t-\tau) + f(\tau, x-t+\tau) \big] d\tau.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος $Cauchy$ (1), (4) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \tag{5}$$

$$\frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta \Big) d\tau$$

Παράδειγμα 2 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \ \text{ στον } \ \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = \sin\, 2x, \ \ u_t(0,x) = 0 \ \text{ για } \ |x| < \infty.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) = \sin\, 2x, \quad \psi(x) = 0, \quad f(t,x) = 1$$

άρα

$$u(t,x) = \frac{\sin(2(x+t)) + \sin(2(x-t))}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t 2(t-\tau)d\tau =$$

$$\sin\, 2x\, cos\, 2t + \frac{t^2}{2}.$$

Η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος $Cauchy$ προκύπτει άμεσα άπο τον τρόπο κατασκευής της λύσης μέσω της γενικής λύσης της εξίσωσης.

Πράγματι έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x), \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x), \;\; |x| < \infty,$$

$$v_{tt} - v_{xx} = f(t,x), \;\; v(0,x) = \phi(x), \;\; v_t(0,x) = \psi(x), \;\; |x| < \infty.$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w \equiv u - v$. Προφανώς

$$w_{tt} - w_{xx} = 0$$

και

$$w(0,x) = w_t(0,x) = 0 \;\; |x| < \infty.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$F(x-t) + \Phi(x+t)$$

και επαληθεύοντας τις μηδενικές αρχικές συνθήκες καταλήγουμε στο ότι

$$F(x) + \Phi(x) \equiv 0$$

$$-F'(x) + \Phi'(x) \equiv 0$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη σχέση έχουμε

$$F'(x) \equiv -\Phi'(x)$$

και αντικαθιστώντας στη δευτερη παίρνουμε

$$\Phi'(x) \equiv 0 \quad \text{και συνεπώς} \quad F'(x) \equiv 0.$$

Συνεπώς και οι δυο συναρτήσεις F, Φ είναι σταθερές και μάλιστα

$$F = -\Phi$$

Αρα

$$w \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \equiv v.$$

Ας επιστρέψουμε τωρα στο προβλημα (2), (4).

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι μήδεν,
τότε και η λύση είναι μηδεν για κάθε t.
Έστω τώρα $a > 0$ και (βλ. σχήμα 1)

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0, & \text{στο } (a,b) \\ 0, & \text{στο } \mathbf{R} \setminus (a,b), \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} > 0, & \text{στο } (a,b) \\ 0, & \text{στο } \mathbf{R} \setminus (a,b), \end{cases} .$$

Ας πάρουμε ένα σημείο $(t_0 \neq 0, x_0)$,
για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς ας πάρουμε

$$(t_0, 0),$$

έχουμε

$$u(t_0, 0) = \frac{\phi(t_0) + \phi(-t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-t_0}^{t_0} \psi(\zeta) d\zeta.$$

Αν ο χρόνος

$$|t_0| < a,$$

τότε

$$u(t_0, 0) = 0$$

δηλαδή

$$u(t, 0) = 0, \quad \forall t \in (-a, a).$$

Μόνο όταν ο χρόνος θα φτάσει στο a $(-a)$
η λύση θα ¨νιώσει¨ την διαταραχη που είχε γίνει στην αρχική στιγμή $t = 0$.
Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται

πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης των διαταραχών.

Παράδειγμα 3.
Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \ \text{ για } \ |x| < \infty.$$

$$\phi(x) \equiv 0 \ \text{ για } \ x \in [-1,1] \ \text{ και } \ \phi(x) > 0 \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R} \setminus [-1,1],$$

$$\psi(x) \equiv 0 \ \text{ για } \ x \in [0,1] \ \text{ και } \ \psi(x) > 0 \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R} \setminus [0,1].$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) \equiv 0$.
Λύση. Έχουμε

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta) d\zeta$$

Για να ισχύει $u(t,x) = 0$ πρέπει

$$\phi(x+t) = 0, \ \ \phi(x-t) = 0 \ \text{ και } \ \psi(\zeta) = 0.$$

Άρα

$$x + t \in [-1,1], \ \ x - t \in [-1,1]$$

και

$$x + t \in [0,1], \ \ x - t \in [0,1].$$

Συνεπώς

$$0 \leq x + t \leq 1, \ \ 0 \leq x - t \leq 1$$

δηλαδή ρόμβος με κορυφές στα σημεία (0,0), (1,0), (1/2,1/2), (1/2, -1/2).

Παράδειγμα 4.
Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\text{ στον }\; \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \;\text{ για }\; |x| < \infty.$$

$$\phi(x) > 0 \;\text{ για }\; x \in (-1,0) \;\text{ και }\; \phi(x) \equiv 0 \;\text{ για }\; x \in \mathbf{R} \setminus (-1,0),$$
$$\psi(x) > 0 \;\text{ για }\; x \in (1,2) \;\text{ και }\; \psi(x) \equiv 0 \;\text{ για }\; x \in \mathbf{R} \setminus (1,2).$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) > 0$.
Λύση. Έχουμε

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta$$

Αφού οι ϕ και ψ είναι μη αρνητικές για να ισχύει
$u(t,x) > 0$ σε ένα σημείο (t,x)
αρκεί στο σημείο αυτο να ισχύει ενα απο τα παρακάτω

$$\phi(x+t) > 0 \;\text{ ή }\; \phi(x-t) > 0$$

ή στο διάστημα $(x-t, x+t)$ η ψ να έιναι κάπου θετική, δηλαδή

$$x + t \in (-1,0) \;\text{ ή }\; x - t \in (-1,0)$$

ή

$$(x-t, x+t) \cap (1,2) \neq \emptyset.$$

Υπο την προϋπόθεση

$$x - t \leq x + t \Leftrightarrow t \geq 0$$

αλλιώς το ολοκλήρωμα

$$\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta$$

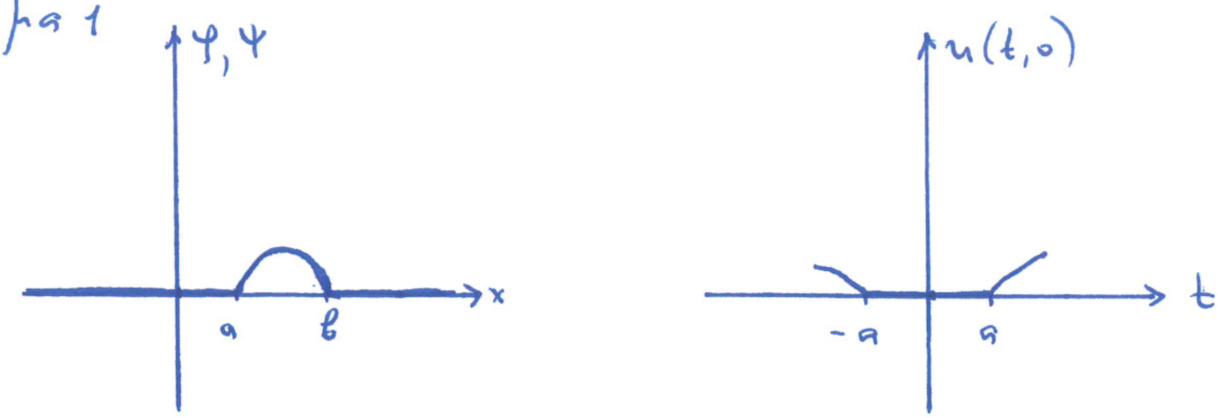
μπορεί να είναι αρνητικό.
Συνεπώς το ζητούμενο χωρίο (βλ. σχήμα 2) είναι το εξής

$$\{(t,x) : t \geq 0, \, -1 < x+t < 0\} \cup \{(t,x) : t \geq 0, \, -1 < x-t < 0\} \cup$$

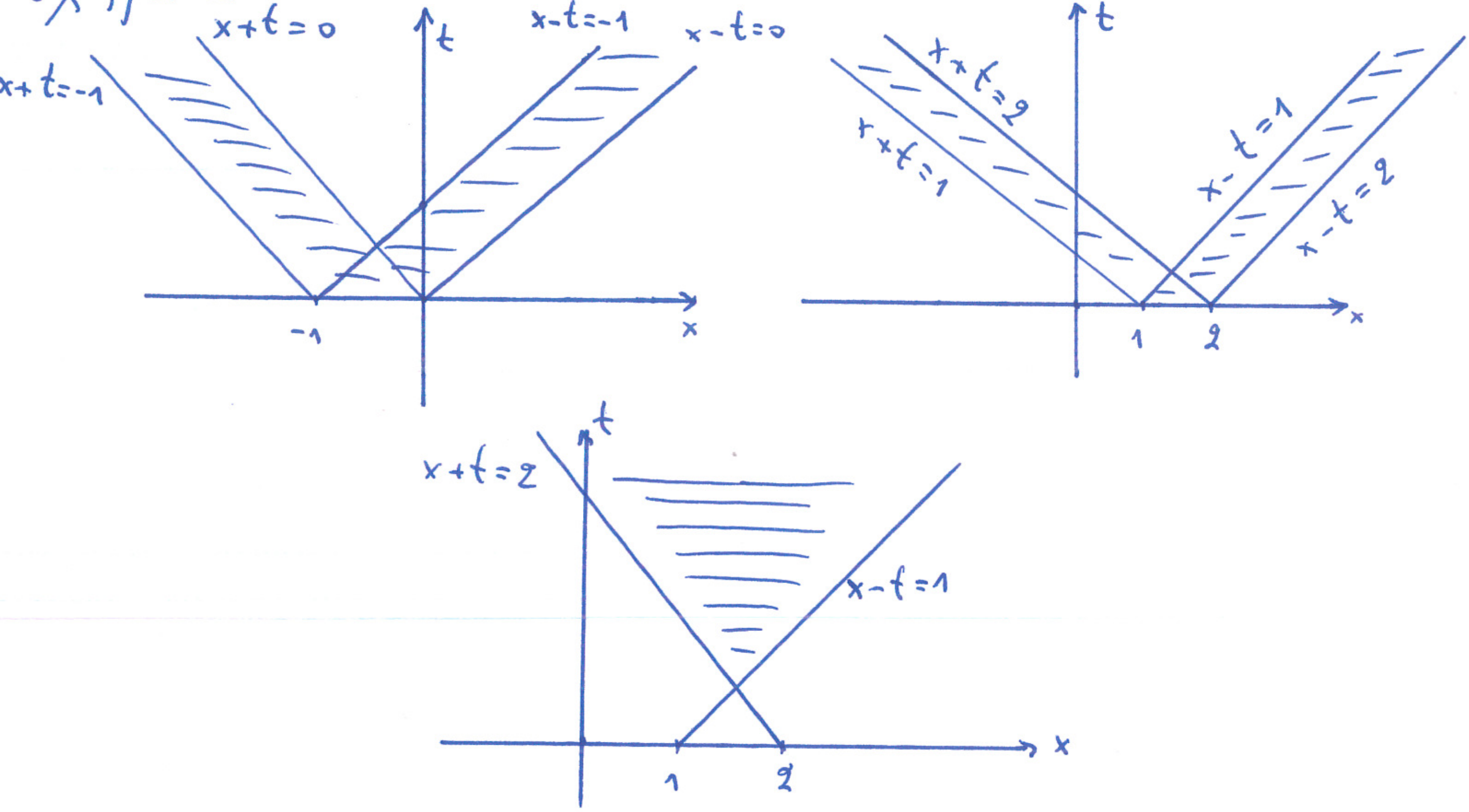
$$\{(t,x) : t \geq 0, \, 1 < x-t < 2\} \cup \{(t,x) : t \geq 0, \, 1 < x+t < 2\} \cup$$

$$\{(t,x) : t \geq 0, \, x-t < 1, \, x+t > 2\}.$$

σχήμα 1



σχήμα 2



Διάλεξη 4. Σειρές $Fourier$

Ένα σύστημα συναρτήσεων $\{\psi_m\}$ ή $\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$

$$\psi_0,\ \ \psi_1,\ \ \psi_2,\ \ ...,\ \ \psi_m,\ \ ...$$

ονομάζεται **ορθοκανονικό στο διάστημα** (a,b) αν

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο (a,b), δηλαδή

$$\int_a^b f^2(x)dx < +\infty.$$

Οι αριθμοί

$$c_k = \int_a^b f(x)\psi_k(x)dx, \ \ k=0,1,2,...$$

ονομάζονται συντελεστές $Fourier$ της $f(x)$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$.

Ορισμός. *Η σειρά*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\psi_k(x)$$

ονομάζεται σειρά $Fourier$ της συνάρτησης $f(x)$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$.

Οι αριθμοί c_k έχουν νόημα αν και οι $\psi_k(x)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες διότι ισχύει το εξής:

$$\int_a^b f(x)\psi_k(x)dx \leq \Big(\int_a^b f^2(x)dx\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b \psi_k^2(x)dx\Big)^{1/2} \leq$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b \psi_k^2(x)dx$$

ανισότητα $Holder$ και $2AB \leq A^2+B^2$.

Έστω τώρα έχουμε ένα **ορθογώνιο σύστημα** $\{\phi_k\}$ στο (a, b), δηλαδή

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} C \neq 0, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Το σύστημα $\{\psi_k\}$ με

$$\psi_k = \frac{\phi_k}{\|\phi_k\|} \quad \text{όπου} \quad \|\phi_k\| = \Big(\int_a^b \phi_k^2(x)dx \Big)^{1/2}$$

θα είναι ορθοκανονικό. Πράγματι

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \frac{1}{\|\phi_m\|\|\phi_n\|} \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

αφού

$$\frac{1}{\|\phi_m\|\|\phi_m\|} \int_a^b \phi_m(x)\phi_m(x)dx = \frac{1}{\|\phi_m\|^2} \int_a^b \phi_m^2(x)dx = 1.$$

Προφανώς

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\psi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\|\phi_k\|}\phi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k\phi_k$$

με
c_k- συντελεστες $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$ και
$\tilde{c}_k = c_k\|\phi_k\|^{-1}$- συντελεστές $Fourier$
ως προς το σύστημα $\{\phi_k\}$.

Για τα $\tilde{c}_k$ έχουμε

$$\tilde{c}_k = \frac{c_k}{\|\phi_k\|} = \frac{\int_a^b f\psi_k\,dx}{\|\phi_k\|} = \frac{\int_a^b f\phi_k\,dx}{\|\phi_k\|^2}. \tag{1}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το σύστημα

$$(2) \qquad \{\phi_k\}: \qquad 1, \ cos\frac{k\pi}{l}x, \ \sin\frac{k\pi}{l}x, \ \ k = 1, 2, ...$$

είναι ορθογώνιο στο $(-l, l)$, ενώ το σύστημα

$$(3) \qquad \{\psi_k\}: \qquad \frac{1}{\sqrt{2l}}, \ \frac{1}{\sqrt{l}}cos\frac{k\pi}{l}x, \ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x, \ \ k = 1, 2, ...$$

είναι ορθοκανονικό στο $(-l, l)$.

Πράγματι

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi}{l}xdx = \int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi}{l}xdx = 0,$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi}{l}x \sin\frac{m\pi}{l}xdx = 0,$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi}{l}x \cos\frac{m\pi}{l}xdx = 0, \ \text{ για } \ k \neq m,$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi}{l}x \sin\frac{m\pi}{l}xdx = 0, \ \text{ για } \ k \neq m.$$

Επίσης

$$\|\phi_0\| = \|1\| = \Big(\int_{-l}^{l} 1dx\Big)^{1/2} = \sqrt{2l},$$

$$\|\phi_k\| = \sqrt{l}, \ \ k = 1, 2, ...,$$

αφού

$$\int_{-l}^{l} \sin^2\frac{k\pi}{l}xdx = \int_{-l}^{l} \cos^2\frac{k\pi}{l}xdx = l \ \ k = 1, 2, ...$$

Θεωρούμε τους συντελεστές $Fourier$ της συνάρτησης $f(x)$ ως προς το σύστημα $\{\phi_k\}$ (βλ. (1)):

$$(4) \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx, \;\; b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, \sin\frac{k\pi}{l}xdx,\; k = 0, 1, 2, ...$$

Η σειρά $Fourier$:

$$(5) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x\right)$$

ονομάζεται **τριγωνομετρική σειρά** της $f(x)$.

Στο (4) συμφωνα με το (1) θα έπρεπε να είχαμε γράψει $k = 1, 2, ...$ και

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

αφου $\|\phi_0\|^2 = 2l$)

και στη σειρά (5) αντι

$$a_0/2$$

θα είχαμε

$$a_0.$$

Το κάνουμε λίγο διαφορετικά για να ορίζουμε τους συντελεστές a_k με ενιαίο τρόπο (4) για όλα τα k.

Το ερώτημα είναι: τι σχέση έχει η συνάτρηση $f(x)$ και η (5) δηλαδη η τριγωνομετρική σειρά της $f(x)$.

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο $[-l, l]$.

Προφανώς η $f(x)$ μπορεί να επεκταθεί περιοδικά στον $\mathbf{R}$ με περίοδο $2l$.

Το ερώτημα είναι πότε ισχύει η ισότητα

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k\, cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \,\sin \frac{k\pi}{l} x\big).$$

Θεώρημα. *Αν η $f(x)$ είναι συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2l$ και η $f'(x)$ είναι τμηματικά συνεχής, τότε η τριγωνομετρική σειρά της $f(x)$ συγκλίνει στον $\mathbf{R}$ ομοιόμορφα*, απόλυτα και ισχύει*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k\, cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \,\sin \frac{k\pi}{l} x\big).$$

Π.χ. (βλ. σχήμα 1) οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sin x, \quad x \in [-\pi, \pi], \qquad f(x) = 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1]$$

επαληθευουν τις προυποθέσεις του θεωρήματος αφου τις επεκτείνουμε περιοδικά, την πρώτη με περιοδο 2π και τη δευτερη με περίοδο 2.

Ενα εύλογο ερώτημα είναι τη θα συμβεί αν στο Θεώρημα η $f(x)$ είναι ασυνεχής σε κάποια σημεία π.χ. (βλ. σχήμα 2)

$$f(x) = x^3, \quad x \in [-1, 1], \quad f(x \pm 2) = f(x).$$

Σε αυτη την περίπτωση η σειρά $Fourier$ της f θα την παριστάνει μόνο στα σημεία όπου η f είναι ομαλή.

Προφανώς η τριγωνομετρική σειρά θα προκύψει και αν θα θεωρήσουμε την σειρά $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$:

$$\frac{\bar{a}_0}{2\sqrt{l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\bar{a}_k \frac{1}{\sqrt{l}} cos \frac{k\pi}{l} x + \bar{b}_k \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x\big)$$

όπου

$$\bar{a}_k = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^{l} f(x)\, cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad \bar{b}_k = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^{l} f(x) \,\sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν η $f(x)$ είναι περιττή ως προς το σημείο $x=0$, τότε $a_k = 0$ για κάθε k.

Πράγματι, το ολοκλήρωμα από $-l$ εως l μιας περιττής ως προς το $x=0$ συνάρτησης είναι μηδέν.

Το
$$\cos\frac{k\pi}{l}x$$
είναι άρτια ως προς το $x=0$ συνάρτηση.

Το ζητούμενο προκύπτει απο το γεγονός ότι γινόμενο άρτιας ($\cos$) και περιττής (f) συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση.

Παρομοίως εύκολα να διαπιστώσνουμε ότι αν η $f(x)$ είναι άρτια ως προς το σημείο $x=0$, τότε $b_k = 0$ για κάθε k.

Το
$$\sin\frac{k\pi}{l}x$$
είναι περιττή ως προς το $x=0$ συνάρτηση.

Αρα πάλυ έχουμε γινόμενο άρτιας (f) και περιττής ($\sin$) συνάρτησης, δηλαδή περιττή συνάρτηση.

****Ορισμός 1.** Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων*

$$\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$$

ορισμένων σε ενα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο I στην συνάρτηση $S(x)$
αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\varepsilon)$ (που δεν εξαρτάται απο την επιλογή του $x \in I$) τ.ω.

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall n > n(\varepsilon) \ \ \textit{και} \ \ \forall x \in I.$$

Κριτήριο $Cauchy$**.** *Η ακολουθία συναρτήσεων*

$$\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$$

ορισμένων σε ενα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$
είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο I αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\varepsilon)$ (που δεν εξαρτάται απο την επιλογή του $x \in I$) τ.ω.

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall n, m > n(\varepsilon) \ \ \textit{και} \ \ \forall x \in I.$$

Ορισμός 2. *Λέμε ότι η συναρτησιακή σειρά*

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i(x), \ \ x \in I$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο I αν συγκλίνει ομοιόμορφα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων αυτης της σειράς. Δηλαδή αν συγκλίνει ομοιόμορφα η ακολουθία

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} h_i(x).$$

Κριτήριο $Weierstrass$**.** *Έστω οτι η αριθμητική σειρά*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k, \quad \gamma_k \geq 0$$

συγκλίνει, και έστω οτι

$$|h_k(x)| \leq \gamma_k, \quad \forall x \in I, k = 0, 1, 2, \dots .$$

Τότε η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα στο I.

Π.χ. η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\varepsilon k^2} \cos kx,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα, αφού

$$|e^{-\varepsilon k^2} \cos kx| \leq e^{-\varepsilon k^2}$$

και η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\varepsilon k^2}$$

είναι προφανώς συγκλίνουσα.
Χρησιμοποιήστε π.χ. το κριτηριο $Dalembert$ (λόγου)

Παράδειγμα. Να βρεθεί η σειρά $Fourier$ της (βλ. σχήμα 3α)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi-x}{2}, & \text{για } \ x \in [-\pi, 0) \\ \frac{\pi-x}{2}, & \text{για } \ x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Κατ αρχάς παρατηρούμε οτι η $f(x)$ είναι περριτή ως προς το σημείο $x = 0$:

$$\text{αν } \ x \in (0, \pi] \ \text{ τότε } \ f(-x) = \frac{-\pi + x}{2} = -\frac{\pi - x}{2} = -f(x)$$

και για $x \in [-\pi, 0]$ επίσης

$$f(-x) = \frac{\pi + x}{2} = -\frac{-\pi - x}{2} = -f(x)$$

Ας κάνουμε την περιοδική επέκταση της f στον $\mathbf{R}$ με περίοδο 2π (βλ. σχήμα 3β).

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $Fourier$. Προφανώς

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, cos \, kx \, dx = 0 \ \text{ για } \ k = 0, 1, 2, ...$$

ως ολικλήρωμα περριτής συνάρτησης. Για b_k έχουμε

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \sin kxdx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{-\pi - x}{2} \sin kxdx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kxdx = \frac{1}{k}.$$

Συνεπώς,

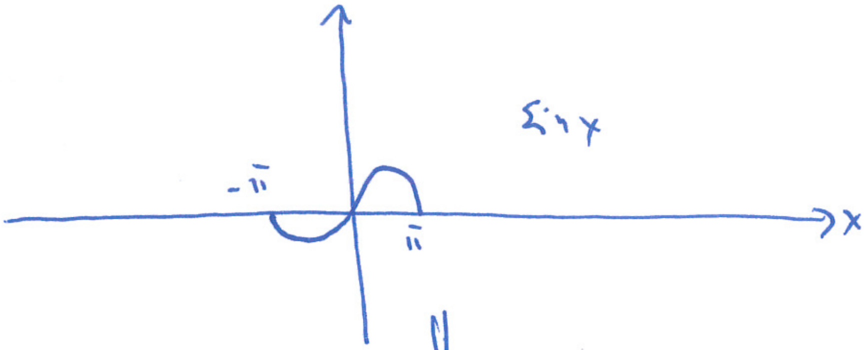
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \, kx}{k} \quad \text{εκτός απο τα σημεία } \ x = 0, \, \pm 2\pi k.$$

Π.χ.

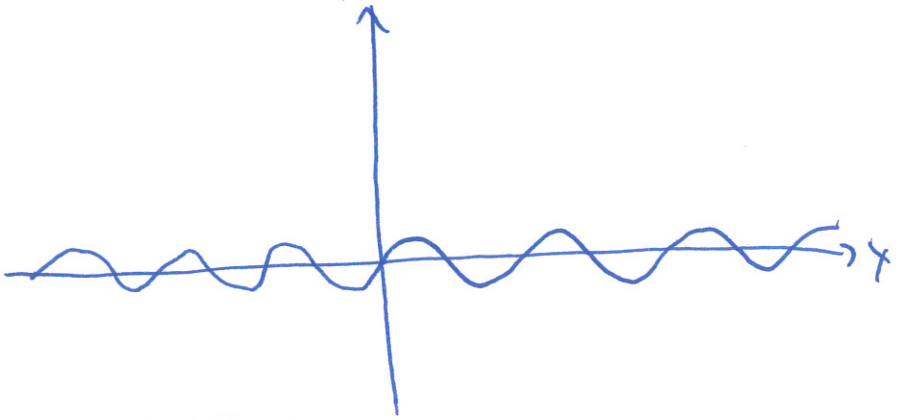
$$f(1) = \frac{\pi - 1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}.$$

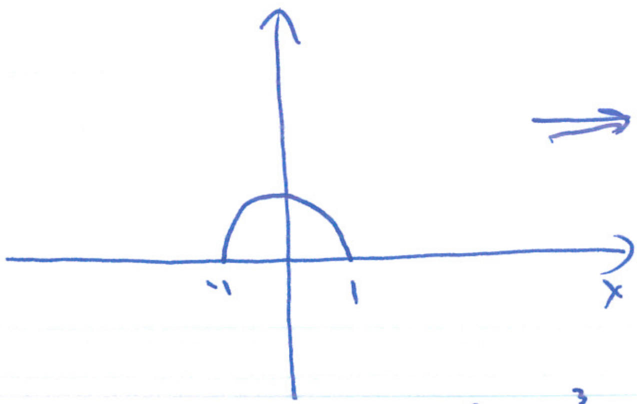
Για $x \in (0, \, 2\pi)$ (βλ. σχιμα 3β) ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \, nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

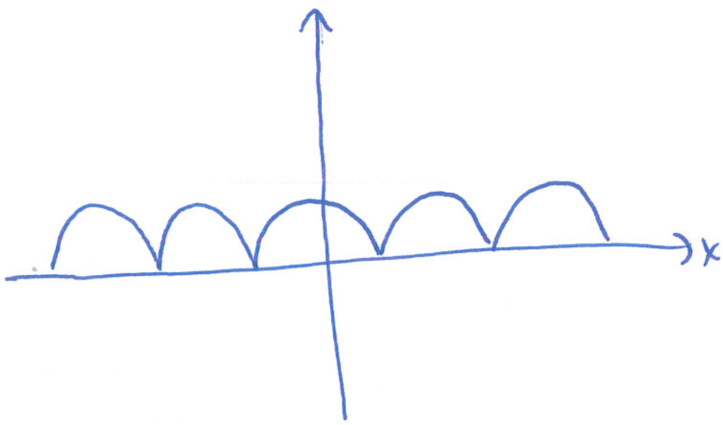


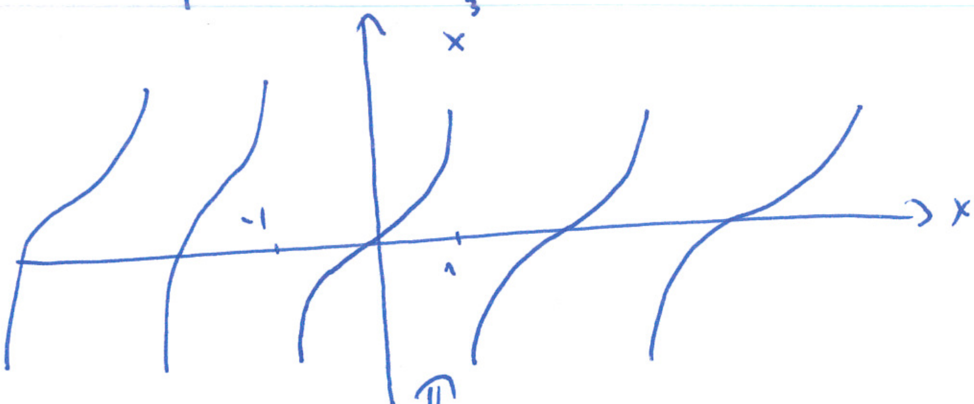
$\Downarrow$



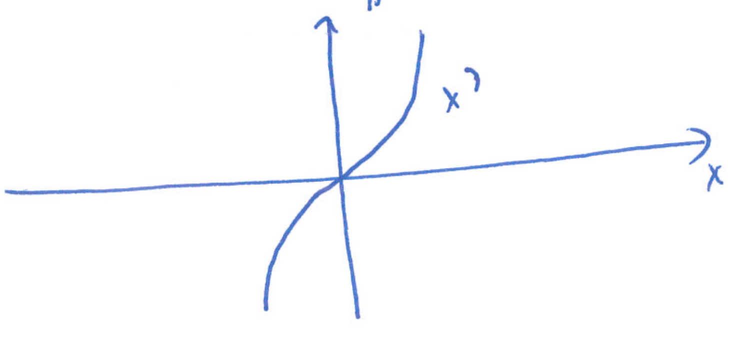


$\Longrightarrow$

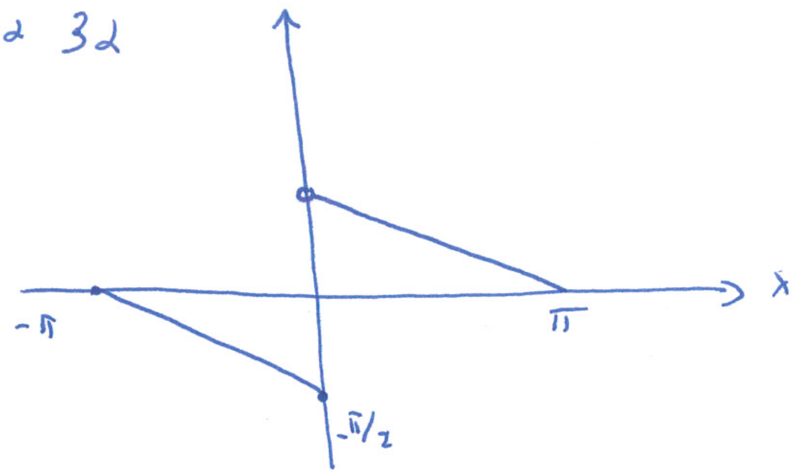




$\Uparrow$



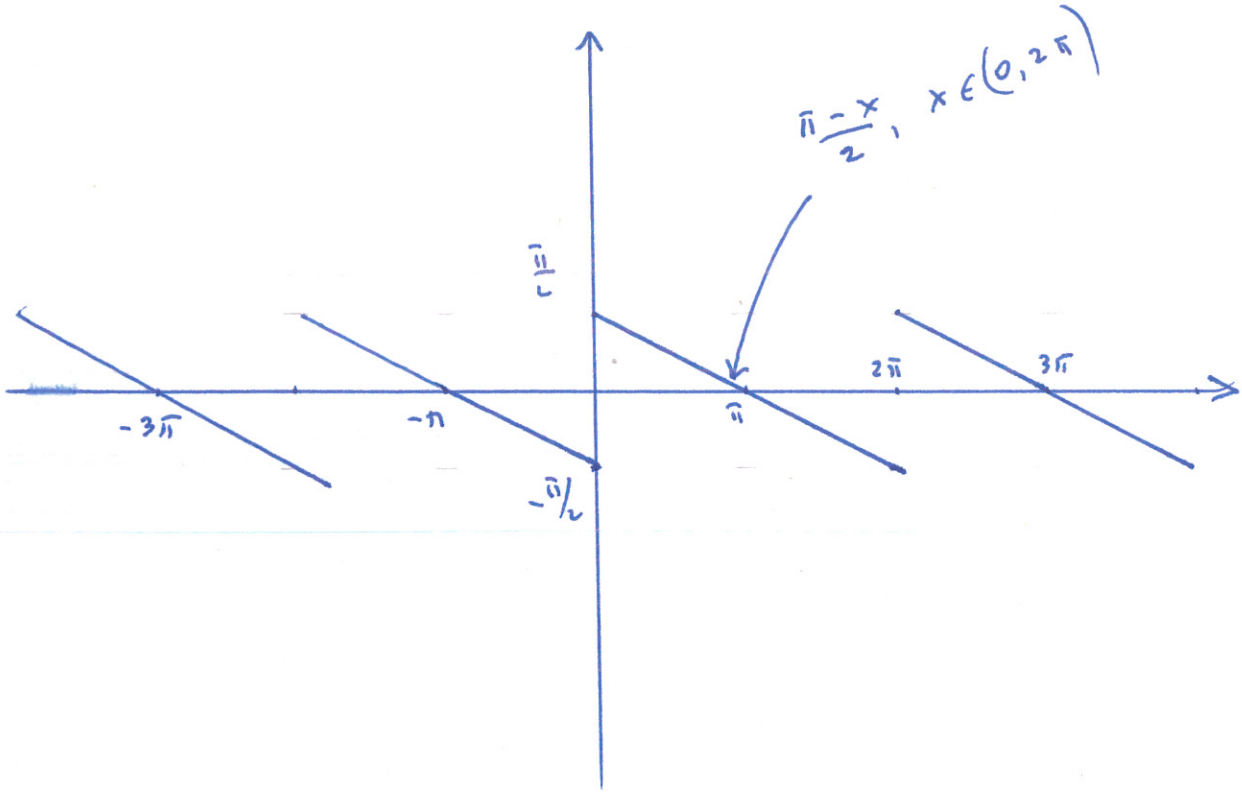
σχήμα 3α



$\frac{\pi - x}{2}, \ x \in (0, \pi)$

$\frac{-\pi - x}{2}, \ x \in [-\pi, 0]$

σχήμα 3β



Διάλεξη 5. Μέθοδος Fourier

Πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$ για την κυματική εξίσωση:
Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T = \{(t,x) : |t| < \infty, \ \ 0 < x < l\}$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \ \text{ για } \ 0 < x < l$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u(t,0) = \mu_1(t), \ \ u(t,l) = \mu_2(t) \ \text{ για } \ |t| < \infty.$$

(βλ. σχήμα 1)

Υποθέτουμε ότι

$$f(t,x) \in C^1((-T,T) \times [0,l]) \ \ \forall T > 0, \ \ \phi(x) \in C^2([0,l]), \ \ \psi(x) \in C^1([0,l])$$

και

$$\phi(0) = \mu_1(0), \ \ \psi(0) = \mu_1'(0), \ \ \phi(l) = \mu_2(0), \ \ \psi(l) = \mu_2'(0).$$

Χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε

$$\mu_1(t) \equiv \mu_2(t) \equiv 0.$$

Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση

$$v(t,x) = u(t,x) - h(t,x)$$

όπου (βλ. σχήμα 2)

$$h(t,x) = \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(t) + \frac{x}{l}\mu_2(t).$$

Προφανώς

$$h_t(t,x) = \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1'(t) + \frac{x}{l}\mu_2'(t),$$

$$h_x(t,x) = -\frac{1}{l}\mu_1(t) + \frac{1}{l}\mu_2(t).$$

και

$$h_{tt}(t,x) = \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1''(t) + \frac{x}{l}\mu_2''(t), \qquad h_{xx}(t,x) = 0.$$

Άρα

$$v_{tt} - v_{xx} = u_{tt} - u_{xx} - (h_{tt} - h_{xx}) =$$

$$f(t,x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1''(t) - \frac{x}{l}\mu_2''(t)$$

Μπορούμε να την γράψουμε την εξίσωση αυτή

$$v_{tt} - v_{xx} = \tilde{f}(t,x).$$

Επίσης

$$v(t,0) = v(t,l) = 0 \ \ \forall t,$$

και

$$v(0,x) = \tilde{\phi}(x) \equiv \phi(x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(0) - \frac{x}{l}\mu_2(0),$$

$$v_t(0,x) = \tilde{\psi}(x) \equiv \psi(x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1'(0) - \frac{x}{l}\mu_2'(0),$$

$$\tilde{\phi}(0) = \tilde{\phi}(l) = 0, \quad \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(l) = 0.$$

Αρα χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το πρόβλημα (βλ. σχήμα 3)

$$(1) \qquad u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T$$

$$(2) \qquad u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \ \text{ για } \ 0 < x < l$$

$$(3) \qquad u(t,0) = u(t,l) = 0 \ \text{ για } \ |t| < \infty$$

με

$$\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Εδω επιστρέψαμε στον αρχικό συμβολισμό u, f, ϕ, ψ.

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $f(t,x) \equiv 0$:

$$(4) \qquad u_{tt} - u_{xx} = 0 \ \text{ στο } \ Q_T$$

Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (4) και παίρνουμε

$$T''(t)X(x) = T(t)X''(x) \ \text{ για κάθε } \ t \ \text{ και } \ x$$

ή

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

συνεπώς

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

όπου λ σταθερά. Δηλαδή

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \ \text{ και } \ \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Άρα έχουμε

$$(5) \qquad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0$$

Ζητάμε

$$X(0) = X(l) = 0$$

διότη θέλουμε να επαληθευονται οι συνθήκες (3).

$$(6) \qquad T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Ψάχνουμε

$$X(x) \not\equiv 0$$

Αν $\lambda \leq 0$, τότε $X(x) \equiv 0$.

Πράγματι, για $\lambda < 0$ η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

και για $\lambda = 0$ η γενική λύση είναι

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Και στις δυο περιπτώσεις οι συνθήκες

$$X(0) = X(l) = 0$$

μας δίνουν

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Για $\lambda > 0$ η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2\, cos\sqrt{\lambda}x,$$

από τις συνθήκες $X(0) = X(l) = 0$ προκύπτει ότι

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

άρα $\sqrt{\lambda}l = \pi k$ (αφού θέλουμε $X(x) \not\equiv 0$). Συνεπώς για

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, ...$$

υπάρχει μη τετριμμένη λύση του προβλήματος (5):

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Προφανώς για $\lambda = \lambda_k$ η (6) μας δίνει

$$T_k(t) = A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k\, \sin\frac{k\pi}{l}t,$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_k(t)\, X_k(x) = \big(A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k\, \sin\frac{k\pi}{l}t\big)\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (4) και επαληθεύουν τις συνθήκες (3). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x),$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο).

Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (2).

Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις

$$\phi(x) \ \text{ και } \ \psi(x)$$

περιττά στο $(-l, 0)$ και μετά περιοδικά με περίοδο $2l$ στον $\mathbf{R}$.

Τις γράφουμε σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \tag{7}$$

(αφου ϕ και ψ περιττές ως προς $x = 0$) όπου

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \phi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} \phi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx,$$
$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{8}$$

Έχουμε ότι αν η σειρά αυτή συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν την παραγωγίσουμε δυο φορές όρο προς όρο ως προς t ή ως προς x, τότε η $u(t, x)$ επαλήθευει την εξίσωση (4) και τις συνοριακές συνθήκες (3).

Για να επαληθεύει και τις αρχικές συνθήκες (2) επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο.

Για την επιλογή των A_k έχουμε

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\, \sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u(0,x) = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_k = a_k.$$

Για την επιλογή των B_k έχουμε

$$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(0)\, \sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} B_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u_t(0,x) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$B_k = \frac{l}{k\pi} b_k.$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα (υπό την προϋπόθεση σύγκλισης των σειρών) ότι η λύση του προβλήματος (4), (2), (3) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi} b_k\, \sin\frac{k\pi}{l}t] \sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{9}$$

Η απόδειξη της σύγκλισης της σειράς (9) και των σειρών:

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[-\frac{k\pi}{l} a_k \sin\frac{k\pi}{l}t + b_k\, cos\frac{k\pi}{l}t \Big] \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_x = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi} b_k \sin\frac{k\pi}{l}t \Big] \frac{k\pi}{l} cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{k^2\pi^2}{l^2} [a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi} b_k \sin\frac{k\pi}{l}t] \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{k^2\pi^2}{l^2} [a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi} b_k \sin\frac{k\pi}{l}t] \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

θα δοθεί στο μάθημα Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους.

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\; \text{στο} \;\; Q_T = \{t, x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u(0, x) = \sin\, x + \sin\, 4x, \;\; u_t(0, x) = \sin\, x + \sin\, 2x,$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) = \sin\, x + \sin\, 4x,$$

$$\psi(x) = \sin\, x + \sin\, 2x.$$

Συνεπώς

$$a_1 = 1, \;\; a_4 = 1, \;\; a_k = 0 \;\; \text{για} \;\; k \neq 1, 4,$$
$$b_1 = b_2 = 1, \;\; b_k = 0 \;\; \text{για} \;\; k > 2.$$

Αρα η λύση είναι

$$u(t, x) = (cos\, t + \sin\, t) \sin\, x + \frac{1}{2} \sin\, 2t\, \sin\, 2x + cos\, 4t \sin\, 4x.$$

Για τον υπολογισμό των a_k, b_k προφανώς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \phi(x)\, \sin\, kx\, dx,$$
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(x)\, \sin\, kx\, dx.$$

αυτο ομως στην προκειμένει περίπτωση δεν είναι απαραίτητο
αφου οι ϕ και ψ είναι ήδη γραμμένες σε μορφή σειράς $Fourier$.
αν κάποιος επιμένει στους ανω τύπους θα παρει

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin x + \sin 4x)\, \sin x\, dx =$$
$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x dx + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin 4x\, \sin x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x dx = 1$$

$$a_4 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin x + \sin 4x)\, \sin 4x\, dx = ... = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 4x dx = 1$$

αν $k \neq 1,4$ τότε

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin x + \sin 4x)\, \sin kx\, dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin kx dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 4x\, \sin kx\, dx = 0 + 0 = 0.$$

και παρομοίως για b_k θα βρούμε

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_k = 0 \;\; \text{για} \;\; k = 3, 4, \ldots .$$

Συνοψίζοντας παρατηρούμε οτι αυτό που κάναμε μπορούμε να το δούμε και ως εξής:

ψάχνουμε τη λύση

$$u(t,x)$$

για κάθε σταθεροποιημένο t σε μορφή σειράς $Fourier$ (τριγωνομετρική σειρά)

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x, \tag{10}$$

(βλ. (8)) και προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις

$$u_k(t)$$

αντικαθιστώντας την (10) στην (4) και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (2).

Θα εφαρμόσουμε αυτη τη προσέγγιση σε πιο γενική περίπτωση.

Θεωρούμε το μη ομογενές πρόβλημα (1)-(3).

Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (10). Πρώτα γράφουμε την $f(t,x)$ σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{11}$$

όπου

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x)\, \sin \frac{k\pi}{l} x\, dx.$$

Η ισότητα (11) εν γένει ισχύει μόνο για $x \in (0,l)$ και οχι για $x = 0$, $x = 1$ οπου η σειρά $Fourier$ μπορεί να μην παριστάνει την f.

Αυτο δεν μας δημιουργεί κανένα πρόβλημα επειδή η εξίσωση (1) θέλουμε να επαληθευεται για $x \in (0,l)$ και οχι για $x \in [0,l]$.

Έστω ότι η σειρά (10) είναι δυο φορές παραγωγίσιμη όρο προς όρο ως προς t και ως προς x (δηλαδή οι σειρές που προκύπτουν από την παραγώγιση συγκλίνουν ομοιόμορφα).

Προφανώς η $u(t,x)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

Αντικαθιστώντας την (10) στην εξίσωση (1) και λαμβάνοντας υπ΄ οψιν την (11) έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k''(t)+\frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\right)\sin\frac{k\pi}{l}x=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

ή

$$u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) = f_k(t). \tag{12}$$

Λόγω αρχικών συνθηκών επιπλέον έχουμε (βλ. (7))

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0) \sin\frac{k\pi}{l}x = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

δηλαδή

$$u_k(0) = a_k, \quad u_k'(0) = b_k. \tag{13}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (12) είναι ($k = 1, 2, ...$)

$$u_k(t) = C_{1k} cos\frac{k\pi}{l}t + C_{2k}\sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)d\tau. \tag{14}$$

Για να επαληθεύει η $u_k(t)$ τις συνθήκες (13), πρέπει

$$C_{1k} = a_k, \quad C_{2k} = \frac{l}{k\pi}b_k.$$

Πράγματι άπο (14), (13) έχουμε

$$u_k(0) = C_{1k} = a_k, \quad u_k'(0) = \frac{k\pi}{l}C_{2k} = b_k.$$

Άρα η λύση του προβλήματος (12), (13) για κάθε k δίνεται άπο τον τύπο

$$u_k(t) = a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau,$$

και η λύση του προβλήματος $Cauchy - Dirichlet$ για την εξίσωση (1) είναι η εξής

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k\sin\frac{k\pi}{l}t\right]\sin\frac{k\pi}{l}x +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{15}$$

Προφανώς όλα αυτά υπό την προϋπόθεση οτι και η δεύτερη σειρά στην σχέση (15) συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν θα παραγωγίσουμε την δεύτερη σειρά όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή ως προς t (η απόδειξη της σύγκλισης είναι παρόμοια με αυτήν των σειρών (7), (8)).

Παρατήρηση. Επειδή είναι δύσκολο να θυμάται κανείς τον τύπο (15) καλύτερα να θυμάστε την διαδικασία η οποία μας οδήγησε σε αυτόν.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin\, x, \quad (t, x) \in (-\infty, \infty) \times (0, \pi),$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

$$u(0, x) = \sin\, x, \quad u_t(0, x) = \sin 3x, \quad x \in (0, \pi).$$

Λύση. Αντικαθιστόντας την σειρα

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\, kx$$

στην εξίσωση για $u_k(t)$ έχουμε

$$u_1'' + u_1 = 1, \quad u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0,$$

$$u_3'' + 9u_3 = 0, \quad u_3(0) = 0, \quad u_3'(0) = 1,$$

$$u_k'' + k^2 u_k = 0, \quad u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k \neq 1, 3.$$

Άρα

$$u_1(t) \equiv 1, \quad u_3(t) = \frac{1}{3} \sin 3t, \quad u_k(t) \equiv 0 \quad k \neq 1, 3$$

και

$$u(t, x) = \sin\, x + \frac{1}{3} \sin 3t\, \sin 3x.$$

Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν θα αντικαταστήσουμε στην σειρά (15)

$$a_1 = 1, \quad a_k = 0 \ \text{ για } \ k > 1,$$

$$b_3 = 1, \quad b_k = 0 \ \text{ για } \ k \neq 3,$$

$$f_1 = 1, \quad f_k = 0 \ \text{ για } \ k > 1.$$

Παράδειγμα 3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \ \text{ στο } \ Q_T = \{t, x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \ \ u(0, x) = u_t(0, x) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0,$$

άρα

$$a_k = b_k = 0, \quad \forall k$$

και (από τον τύπο 15)

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{k} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi}{l}(t-\tau)\, d\tau \Big] \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Αφού

$$f(t, x) \equiv 1,$$

έχουμε

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\, kx\, dx = \frac{2}{k\pi}[1 - cos\, k\pi] = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } \ k - \text{άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{αν ο } \ k - \text{περιττός}, \end{cases}$$

Συνεπώς η λύση είναι

$$u(t, x) = \sum_{k=1 (k - \text{περιττά})}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2} \int_0^t \sin\, k(t-\tau)\, d\tau \, \sin\, kx =$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - cos(2m+1)t}{(2m+1)^3} \sin(2m+1)x.$$

Ή αλλιώς αντικαθιστούμε την σειρά

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\, kx$$

στην εξίσωση, για

$$u_k(t)$$

έχουμε

$$u_k'' + k^2 u_k = 0, \quad u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k = 2m, \quad m = 1, 2, ...,$$

$$u_k'' + k^2 u_k = \frac{4}{k\pi}, \quad u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k = 2m+1, \quad m = 1, 2, \dots \ .$$

Συνεπώς

$$u_k \equiv 0, \quad k = 2m, \quad m = 1, 2, ...,$$

$$u_k = \frac{4}{\pi k^3}(1 - cos\, kt), \quad k = 2m+1, \quad m = 1, 2, \dots \ ,$$

Άρα

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - cos(2m+1)t}{(2m+1)^3} \sin(2m+1)x.$$

Παράδειγμα 4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin\, x + 2, \quad (t, x) \in (-\infty, \infty) \times (0, \pi),$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = t^2, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

$$u(0, x) = \sin x, \quad u_t(0, x) = \sin 3x, \quad x \in (0, \pi).$$

Λύση. Εφόσον οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι μηδενικές, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v = u - \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t^2 - \frac{x}{\pi}t^2 = u - t^2 \;\; (u = v + t^2).$$

Έχουμε

$$v_{tt} - v_{xx} = \sin\, x, \quad (t, x) \in (-\infty, \infty) \times (0, \pi),$$

$$v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

$$v(0, x) = \sin x, \quad v_t(0, x) = \sin 3x, \quad x \in (0, \pi).$$

Άρα (βλ. Παράδειγμα 2)

$$v(t, x) = \sin\, x + \frac{1}{3}\sin 3t\, \sin 3x$$

και

$$u(t, x) = \sin\, x + \frac{1}{3}\sin 3t\, \sin 3x + t^2.$$

Παρατήρηση. Προφανώς μπορούμε να ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ ως προς ορθοκανονικό σύστημα ψ_k
δηλαδή σε μορφή

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Σε αυτήν την περίπτωση οι $u_k(t)$ προσδιορίζονται απο την (12) όμως με

$$f_k(t) = \frac{2}{\sqrt{l}}\int_0^l f(t, x)\, \sin\frac{k\pi}{l}x\, dx.$$

Θα αποδείξουμε τωρα ότι η λύση του προβλήματος (1) - (3) είναι μοναδική. Έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x), \;\; u(t,0) = u(t,l) = 0,$$

$$v_{tt} - v_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T,$$
$$v(0,x) = \phi(x), \;\; v_t(0,x) = \psi(x), \;\; v(t,0) = v(t,l) = 0.$$

Θεωρούμε τη διαφορά

$$w = u - v.$$

Προφανώς

$$w_{tt} - w_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T,$$
$$w(0,x) = w_t(0,x) = w(t,0) = w(t,l) = 0.$$

Για την

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^l \big(w_t^2 + w_x^2\big)dx$$

έχουμε

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \big(w_t w_{tt} + w_x w_{xt}\big)dx =$$

$$\int_0^l w_t w_{tt}\,dx + w_x w_t\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l w_t w_{xx}\,dx = \int_0^l w_t(w_{tt} - w_{xx})dx = 0.$$

Εδω χρησιμοποιήσαμε οτι

$$w_t(t,0) = w_t(t,l) = 0 \quad (\text{επειδή } w(t,0) = w(t,l) = 0).$$

Προφανώς

$$E(0) = 0, \;\; \text{άρα } E(t) = 0$$

αφού και $E'(t) = 0$, δηλαδή

$$w_t(t,x) = w_x(t,x) = 0.$$

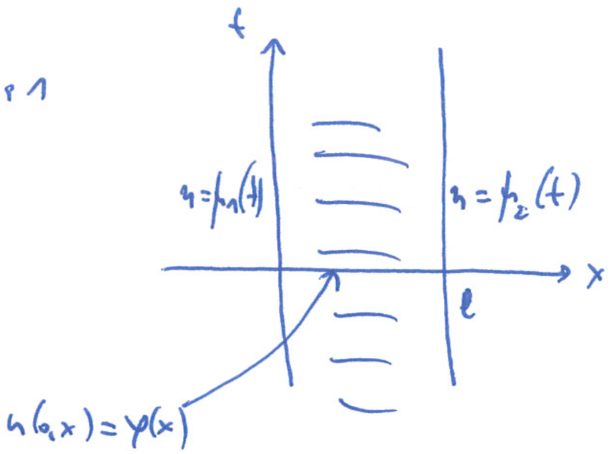
Συνεπώς

$$w(t,x) = \text{σταθερά}$$

και επειδή $w(0,x) = 0$, έχουμε

$$w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v.$$

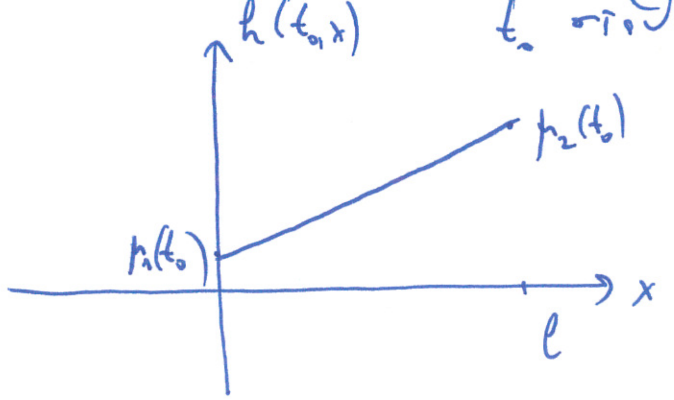
σχήμα 1



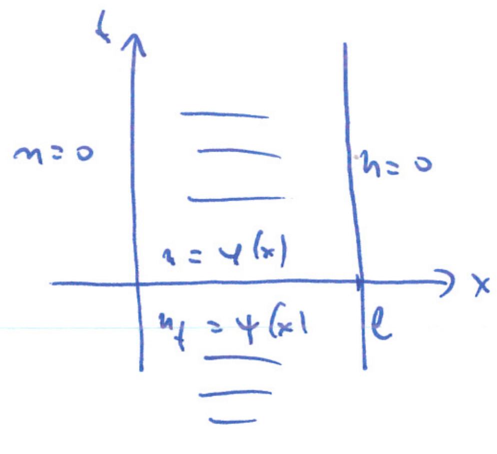
$u_t(0,x) = \psi(x)$

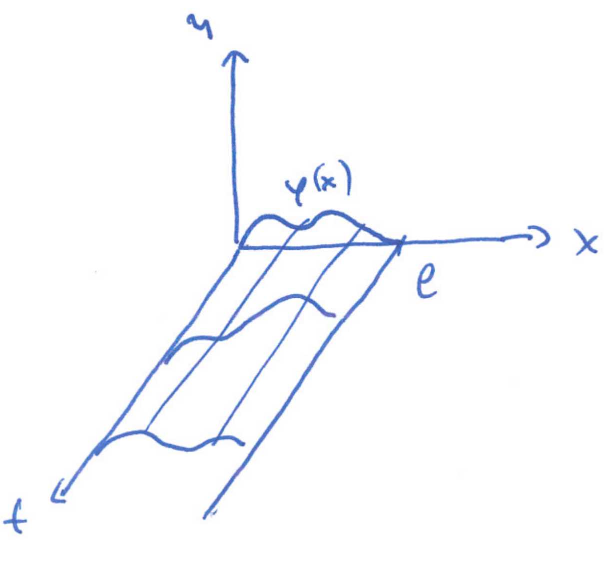
t_0 σταθεροποιημένο

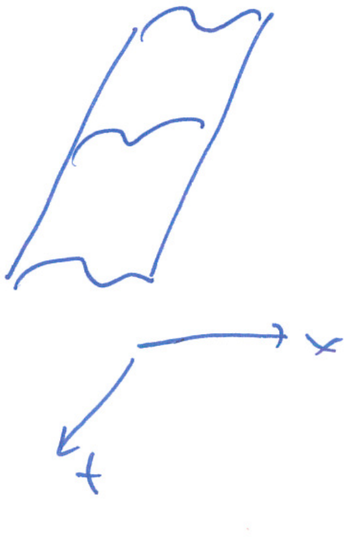
σχήμα 2



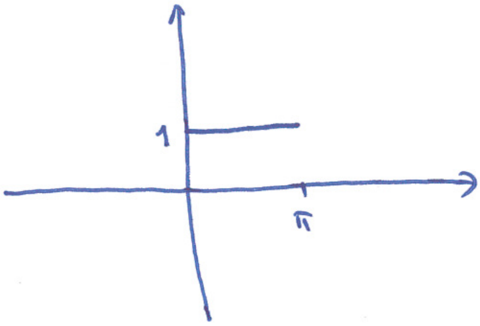
σχήμα 3



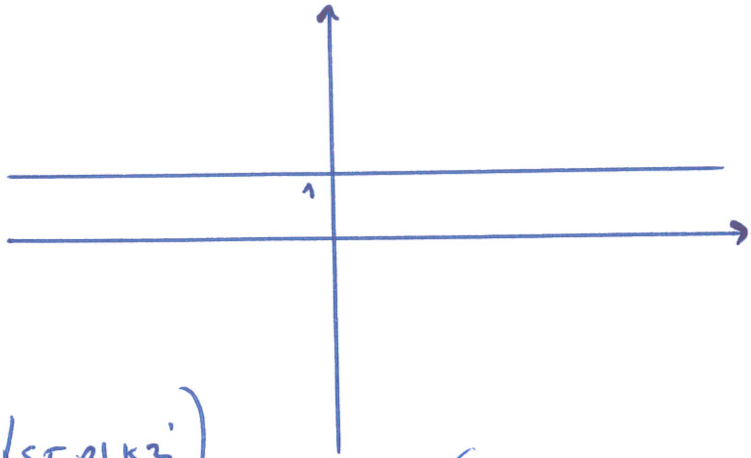




$f(x) = 1 \quad x \in 0, \pi$



$f(x) = 1$ στον $\mathbb{R}$



σειρά Fourier (τριγωνομετρική)

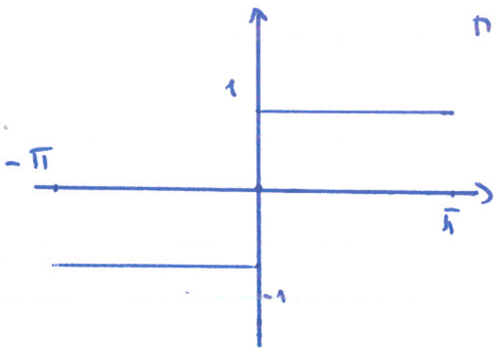
$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right)$$

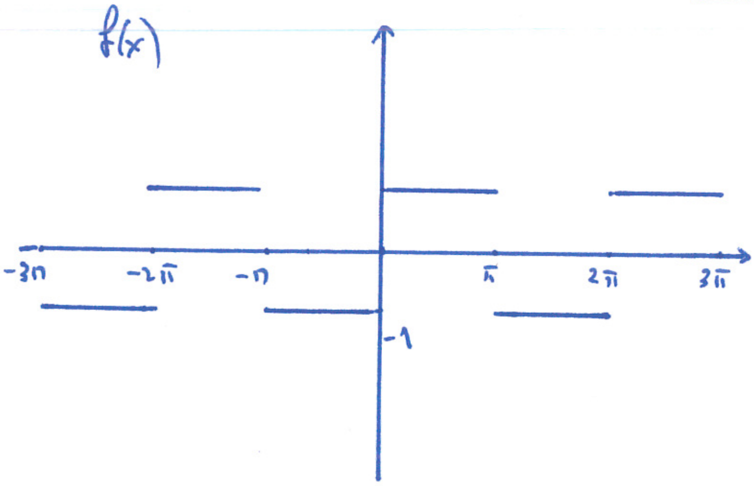
$\left(\frac{k\pi}{\ell} = k \text{ αφού } \ell = \pi\right)$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2 \qquad \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = 0 \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = 0$$

$1 = 1$!

περιττή επέκταση





$\alpha_k = 0$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \sin kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin kx\, dx$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx \ ?$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx$$ εκτός από τα σημεία $k\pi$ $k = 0, \pm 1, \pm 2$

Διάλεξη 6. Συνοριακές συνθήκες Neumann

Συνοπτικά θα εφαρμόσουμε την μέθοδο $Fourier$ στην περίπτωση συνοριακών συνθηκών **Neumann**. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T,$$

$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l,$$

$$u_x(t,0) = \nu_1(t), \;\; u_x(t,l) = \nu_2(t) \text{ για } |t| < \infty$$

με

$$\phi'(0) = \nu_1(0), \;\; \psi'(0) = \nu_1'(0), \quad \phi'(l) = \nu_2(0), \;\; \psi'(l) = \nu_2'(0).$$

Χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε

$$\nu_1(t) \equiv \nu_2(t) \equiv 0.$$

Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(t,x) = \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1(t) - \frac{x^2}{2l}\nu_2(t).$$

Προφανώς

$$h_x(t,x) = -\big(1 - \frac{x}{l}\big)\nu_1(t) - \frac{x}{l}\nu_2(t).$$

και

$$h_x(t,0) = -\nu_1(t), \;\; h_x(t,l) = -\nu_2(t).$$

Άρα για την

$$v(t,x) = u(t,x) + h(t,x)$$

έχουμε

$$v_x(t,0) = v_x(t,l) = 0 \;\; \forall t,$$

Επίσης

$$v_{tt} - v_{xx} = u_{tt} - u_{xx} + h_{tt} - h_{xx} =$$

$$f(t,x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1''(t) - \frac{x^2}{2l}\nu_2''(t) - \frac{1}{l}\nu_1(t) + \frac{1}{l}\nu_2(t) \equiv f_1(t,x)$$

και

$$v(0,x) = \phi_1(x) \equiv \phi(x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1(0) - \frac{x^2}{2l}\nu_2(0),$$

$$v_t(0,x) = \psi_1(x) \equiv \psi(x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1'(0) - \frac{x^2}{2l}\nu_2'(0),$$

$$\phi_1(0) = \phi_1(l) = 0, \quad \psi_1(0) = \psi_1(l) = 0.$$

Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t, x) \;\text{ στο }\; Q_T \tag{1}$$

$$u(0, x) = \phi(x), \;\; u_t(0, x) = \psi(x) \;\text{ για }\; 0 < x < l \tag{2}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, l) = 0 \;\text{ για }\; |t| < \infty \tag{3}$$

με

$$\phi'(0) = \phi'(l) = \psi'(0) = \psi'(l) = 0.$$

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $f(t, x) \equiv 0$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\text{ στο }\; Q_T \tag{4}$$

Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Παρομοίως με την προηγούμενη περίπτωση καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; X'(0) = X'(l) = 0 \tag{5}$$

και

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{6}$$

Για

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \;\; k = 0, 1, 2, ...$$

υπάρχει μη τετριμμένη λύση του προβλήματος (5):

$$X_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Προφανώς για $\lambda = \lambda_k$ η (6) μας δίνει

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t \;\text{ αν }\; k = 0$$

και

$$T_k(t) = A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t \;\text{ για }\; k = 1, 2, ...,$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$
$$T_k(t)\, X_k(x) = \big(A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t\big) cos\frac{k\pi}{l}x, \;\; k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (4) και επαληθεύουν τις συνθήκες (3).

Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x),$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο).

Αφου έχουμε προσδιορίσει τις συναρτήσεις έχουμε η σειρά αυτή γράφεται ως

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, \cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (2).

Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ άρτια στο $(-l,0)$ και μετά περιοδικά με περίοδο $2l$ στον $\mathbf{R}$.

Τις γράφουμε σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$\psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \phi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \psi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Έχουμε ότι αν η σειρά αυτή συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν την παραγωγίσουμε δυο φορές όρο προς όρο ως προς t ή ως προς x, τότε η $u(t,x)$ επαλήθεύει την εξίσωση (4) και τις συνοριακές συνθήκες (3). Για να επαληθεύει και τις αρχικές συνθήκες (2) επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο. Για την επιλογή των A_k έχουμε

$$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\, cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u(0,x) = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \;\text{ και }\; A_k = a_k \;\text{ για }\; k > 1.$$

Για την επιλογή των B_k έχουμε

$$u_t(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)\, cos\frac{k\pi}{l}x = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} B_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u_t(0,x) = \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$B_0 = \frac{b_0}{2}, \;\; B_k = \frac{l}{k\pi} b_k \;\text{ για }\; k = 1, 2, ...$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα (υπό την προϋπόθεση σύγκλισης των σειρών) ότι η λύση του προβλήματος (4), (2), (3) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi} b_k\, \sin\frac{k\pi}{l}t] cos\frac{k\pi}{l}x. \tag{7}$$

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\text{ στο }\; Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u(0,x) = cos\, x, \;\; u_t(0,x) = cos\, 2x,$$
$$u_x(0,x) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) = cos\, x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos\, kx,$$

$$\psi(x) = cos\, 2x = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, cos\, kx,$$

άρα

$$a_1 = 1, \;\; a_i = 0 \;\text{ για }\; i \neq 1, \;\; b_2 = 1, \;\; b_i = 0 \;\text{ για }\; i \neq 2.$$

Συνεπώς η συνάρτηση

$$u(t,x) = cos\, t\, cos\, x + \frac{1}{2} \sin\, 2t\, cos\, 2x$$

είναι λύση του προβλήματος.

Παρομοίως με την περίπτωση του προβλήματος $Cauchy - Dirichlet$ παρατηρούμε οτι αυτό που κάναμε μπορούμε να το δούμε και ως εξής: ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (τριγωνομετρική σειρά)

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x. \tag{8}$$

και προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις $u_k(t)$ αντικαθιστώντας την (8) στην (4) και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (2)

Θα εφαρμόσουμε αυτη τη προσέγγιση σε πιο γενική περίπτωση. Θεωρούμε το μη ομογενές πρόβλημα (1) - (3). Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (8). Γράφουμε την $f(t,x)$ σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x \tag{9}$$

όπου

$$f_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(t,x)dx, \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\, cos\frac{k\pi}{l}x\, dx \ \text{ για } \ k = 1, 2, \ldots.$$

Έστω ότι η σειρά (8) είναι δυο φορές παραγωγίσιμη όρο προς όρο ως προς t και ως προς x (δηλαδή οι σειρές που προκύπτουν από την παραγώγιση συγκλίνουν ομοιόμορφα). Προφανώς η $u(t,x)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Αντικαθιστώντας την (8) στην εξίσωση (1) και λαμβάνοντας υπ΄ οψιν την (9) έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\Big) cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x$$

ή

$$u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t) = f_k(t). \tag{10}$$

Λόγω αρχικών συνθηκών επιπλέον έχουμε

$$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(0) cos\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_t(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(0) cos\frac{k\pi}{l}x = \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k cos\frac{k\pi}{l}x,$$

δηλαδή

$$u_0(0) = \frac{a_0}{2}, \ \ u_0'(0) = \frac{b_0}{2}, \ \ u_k(0) = a_k, \ \ u_k'(0) = b_k \text{ για } \ k = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (10) για $k = 0$ είναι

$$u_0(t) = C_{10} + C_{20}t + \int_0^t \int_0^\tau f_0(\xi) d\xi d\tau,$$

και

$$u_k(t) = C_{1k} cos \frac{k\pi}{l} t + C_{2k} \sin \frac{k\pi}{l} t + \frac{l}{k\pi} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi}{l}(t-\tau) d\tau, \tag{12}$$

όταν $k = 1, 2, ...$

Για να επαληθεύει η $u_k(t)$ τις συνθήκες (11), πρέπει

$$C_{10} = \frac{a_0}{2}, \;\; C_{20} = \frac{b_0}{2}, \;\; C_{1k} = a_k, \;\; C_{2k} = \frac{l}{k\pi} b_k \;\text{ για }\; k = 1, 2, ...$$

Πράγματι άπο (11), (12) έχουμε

$$u_k(0) = C_{1k} = a_k, \;\; u_k'(0) = \frac{k\pi}{l} C_{2k} = b_k.$$

Αρα η λύση του προβλήματος (10), (11) δίνεται άπο τον τύπο

$$u_0(t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \int_0^t \int_0^\tau f_0(\xi) d\xi d\tau,$$

$$u_k(t) = a_k cos \frac{k\pi}{l} t + \frac{l}{k\pi} b_k \sin \frac{k\pi}{l} t + \frac{l}{k\pi} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi}{l}(t-\tau)\, d\tau, \;\; k = 1, 2, ...$$

και η λύση του προβλήματος $Cauchy - Neumann$ για την εξίσωση (1) είναι η εξής

$$u(t,x) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{k=1}^\infty \left[a_k cos \frac{k\pi}{l} t + \frac{l}{k\pi} b_k \sin \frac{k\pi}{l} t \right] cos \frac{k\pi}{l} x +$$

$$\int_0^t \int_0^\tau f_0(\xi) d\xi d\tau + \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{l}{k\pi} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi}{l}(t-\tau)\, d\tau \right] cos \frac{k\pi}{l} x. \tag{13}$$

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = cos\, x \text{ στο } Q_T = \{t, x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0,$$

$$u(0, x) = 3\cos 3x, \quad u_t(0, x) = \cos 2x.$$

Λύση. Έχουμε

$$f_1 = 1, \quad a_3 = 3, \quad b_2 = 1$$

τα υπόλοιπα μηδέν, άρα (βλ. (13))

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x.$$

Ή αλλιώς

$$u_1''(t) + u_1(t) = 1, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0,$$

$$u_2''(t) + 4u_2(t) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1,$$

$$u_3''(t) + 9u_3(t) = 0, \quad u_3(0) = 3, \quad u_3'(0) = 0$$

και

$$u_k''(t) + k^2 u_k(t) = 0, \quad u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0 \quad k \neq 1, 2, 3.$$

Προφανώς

$$u_1 = 1 - cos\, t, \quad u_2 = \frac{1}{2} \sin\, 2t, \quad u_3 = 3cos\, 3t, \quad u_k \equiv 0 \quad k \neq 1, 2, 3.$$

συνεπώς

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x.$$

Παράδειγμα 3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = cos\, x + 2x - \pi \ \text{ στο } \ Q_T = \{t, x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = t^2,$$

$$u(0, x) = 3cos3x, \ \ u_t(0, x) = cos2x.$$

Λύση. Αφού οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι μηδέν εισάγουμε την συνάρτηση

$$v = u + \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t^2 - \frac{x^2}{2\pi} t^2$$

η οποία επαλήθεύει την εξίσωση

$$v_{tt} - v_{xx} = cos\, x$$

και τις συνθήκες

$$u(0, x) = 3cos3x, \ \ u_t(0, x) = cos2x, \ \ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0,$$

άρα (βλ. Παράδειγμα 2)

$$v = \frac{1}{2} \sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos3x + (1 - cos\, t) cos\, x,$$

και

$$u = \frac{1}{2} \sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos3x + (1 - cos\, t) cos\, x + \big(x - \frac{\pi}{2}\big) t^2.$$

Παράδειγμα 4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \ \text{ στο } \ Q_T = \{t, x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u(0, x) = 2, \quad u_t(0, x) = 1/2,$$

$$u_x(0, x) = u_x(t, \pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) \equiv 2 = a_0/2, \quad \psi(x) \equiv 1/2 = b_0/2,$$

$$f_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dx = 1$$

άρα

$$u(t, x) = \frac{4+t}{2} + \int_0^t \int_0^\tau 1 d\xi \, d\tau = \frac{t^2 + t + 4}{2}.$$

Παρατήρηση. Παρομοίως αντιμετωπίζεται και η γενική περίπτωση συνοριακών συνθηκών

$$\alpha_1 u_x(t,0) + \alpha_2 u(t,0) = \nu_1(t), \quad \beta_1 u_x(t,l) + \beta_2 u(t,l) = \nu_2(t),$$
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (1) - (3).

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων.

2.

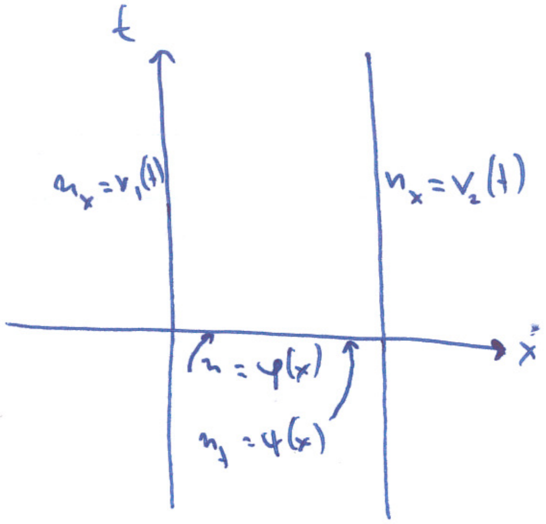
$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\text{ για }\; |t| < \infty, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \;\text{ για }\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \cos\, x + \cos 3x, \;\; u_t(0,x) = 2\cos 2x + \cos 4x \;\text{ για }\; 0 < x < \pi.$$

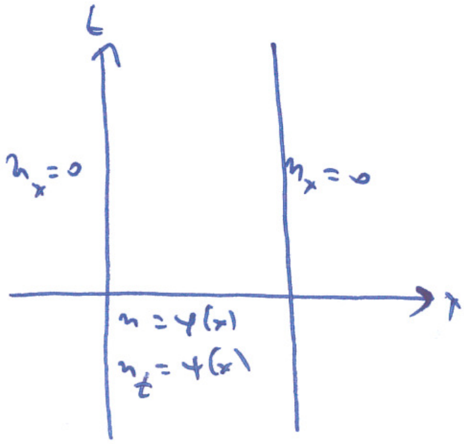
3.

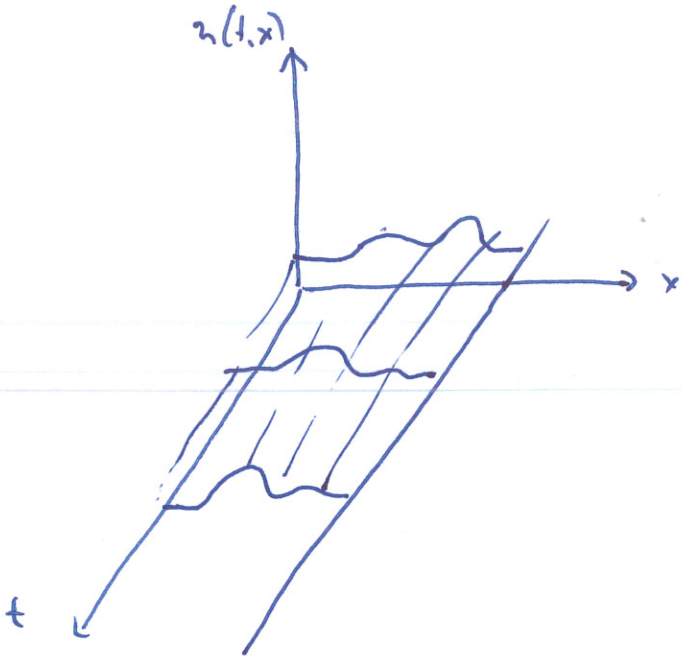
$$u_{tt} - u_{xx} = \cos\, x + \cos 2x + \cos 3x \;\text{ για }\; |t| < \infty, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \;\text{ για }\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \cos\, x, \;\; u_t(0,x) = 0 \;\text{ για }\; 0 < x < \pi.$$

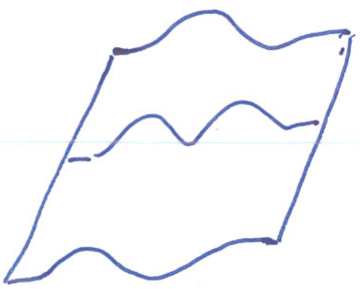
4.

$$u_{tt} - u_{xx} = \big(x - \frac{\pi}{2}\big)\cos\, t \;\text{ για }\; |t| < \infty, 0 < x < \pi$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 1 - \cos\, t, \;\; |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0, \;\; 0 < x < \pi.$$


t
$u_x = v_1(t)$
$u_x = v_2(t)$
x
$u = \varphi(x)$
$u_t = \psi(x)$


t
$u_x = 0$
$u_x = 0$
x
$u = \varphi(x)$
$u_t = \psi(x)$


$u(t,x)$
x
t



Διάλεξη 7. Εξίσωση Θερμότητας

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$: να βρεθεί η λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$u_t - u_{xx} = f(t,x) \text{ για } t > 0, \quad 0 < x < l \tag{1}$$

η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$u(0,x) = \phi(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t > 0. \tag{3}$$

Εδώ όπως και στην προηγούμενη περίπτωση θεωρούμε μηδενικές συνοριακες συνθήκες χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα. Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο $Fourier$.

Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{4}$$

Υποθέτουμε ότι η σειρά (4) συγκλίνει ομοιόμορφα όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν παραγωγίσουμε την (4) όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή ως προς t. Προφανώς

$$u(t,0)=u(t,l)=0.$$

Γράφοντας το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (1) σε μορφή

$$f(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

και αντικαθιστώντας την (4) στην (1) παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(u_k'(t)+\frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\Big)\sin\frac{k\pi}{l}x=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Άρα θέλουμε να ισχύει

$$u_k'(t)+\frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)=f_k(t),\quad k=1,2,... \tag{5}$$

Επίσης έχουμε

$$\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx,$$

άρα για να επαληθεύεται η αρχική συνθήκη (2) πρέπει να ισχύει

$$u_k(0)=a_k,\quad k=1,2,... \tag{6}$$

Πράγματι

$$u(0,x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\,\sin\frac{k\pi}{l}x=\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Έστω $f(t,x) \equiv 0$, τότε

$$u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, ... \tag{7}$$

και η λύση του προβλήματος (7), (6) είναι

$$u_k(t) = a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (1) - (3) για $f(t,x) \equiv 0$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{8}$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και πρώτης ως προς t.

Παρατηρούμε οτι για $t < 0$ η σειρά (8) σίγουρα αποκλίνει, ενω για $t > 0$ μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την σύγκλιση της. Αυτός είναι ο λόγος γιατί την εξίσωση θερμότητας (σε αντίθεση με την κυματική) την μελετάμε για $t > 0$.

Το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν ακολουθήσουμε την διαδικασία με την οποια ξεκινήσαμε στην Δαάλεξη 5: ψάχνουμε αν υπάρχει λύση της

$$u_t - u_{xx} = 0$$

της μορφής

$$T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Πρέπει να ισχύει

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Αρα

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Συνεπώς υπάρχει μη τετριμμένη λύση μόνο για

$$\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$$

η οποία είναι η

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$$

και για την $T(t)$ θα έχουμε

$$T'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}T(t) = 0$$

αρα

$$T_k(t) = a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Έτσι καταλήγουμε στο ότι η

$$A_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης και επαληθευει τις μηδενικές συνοριακές συνθήκες $Dirichlet$,

το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{n} A_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

εφόσον συγκλίνει μαζι με τις παραγώγους που υπάρχουν στην εξίσωση.

Τις αυθαίρετες σταθερές A_k τις προσδιορίζουμε απο την σχέση

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

όπου οι είναι συντελεστές $Fourier$ της $\phi(x)$.

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = 0 \;\; \text{για} \;\; t > 0, \;\; 0 < x < \pi$$

$$u(0,x) = \sin\, x, \;\; u(t,0) = u(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $a_1 = 1$, $a_k = 0$ για $k > 1$, συνεπώς απο (8)

$$u(t,x) = e^{-t} \sin\, x.$$

Ή αλλιώς απο (5), (6)

$$u_1' + u_1 = 0, \;\; u_1(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = e^{-t},$$

και για $k > 1$

$$u_k' + k^2 u_k = 0, \;\; u_k(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_k \equiv 0.$$

Έστω τώρα $f(t,x) \not\equiv 0$. Η γενική λύση της (5) είναι

$$u_k(t) = C_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} + e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \int_0^t f_k(\tau) e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau} d\tau,$$

και την αυθαίρετη σταθερά C_k την προσδιορίζουμε άπο την (6):

$$u_k(0) = C_k = a_k.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (1) - (3) δίνεται από τον τύπο

$$(9) \quad u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \int_0^t f_k(\tau) e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau} d\tau \sin\frac{k\pi}{l}x$$

(πάντα υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και πρώτης ως προς t).

Παράδειγμα 2 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = \sin 2x + 1 - \frac{x}{\pi} \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$
$$u(t,0) = t, \ \ u(t,\pi) = 0,$$
$$u(0,x) = \sin x.$$

Λύση. Για την

$$v(t,x) = u(t,x) - \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t$$

έχουμε

$$v_t - v_{xx} = \sin 2x \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$
$$v(t,0) = v(t,\pi) = 0,$$
$$v(0,x) = \sin x.$$

Λύνουμε αυτό το πρόβλημα. Έχουμε

$$a_1 = 1, \ \ a_k = 0 \ \text{ για } \ k > 1,$$

επίσης

$$f_1 = 0, \ \ f_2 = 1 \ \text{ και } \ f_k = 0 \ \text{ για } \ k > 2.$$

Άρα έχουμε για την v_1:

$$v_1'(t) + v_1(t) = 0, \ \ v_1(0) = 1,$$

για την v_2:

$$v_2'(t) + 4v_2(t) = 1, \ \ v_2(0) = 0,$$

για τις v_k, $k > 2$:

$$v_k'(t) + k^2 v_k(t) = 0, \ \ v_k(0) = 0.$$

Συνεπώς

$$v_1(t) = e^{-t}, \ \ v_2(t) = \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big), \ \ v_k(t) \equiv 0 \ \text{ για } \ k > 2.$$

και η λύση του προβλήματος (για την v) είναι

$$v(t,x) = e^{-t}\sin x + \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big)\sin 2x.$$

Η λύση του αρχικού προβλήματος

$$u(t,x) = e^{-t}\sin x + \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big)\sin 2x + \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t.$$

Παράδειγμα 3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = t, \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$

$$u(0, x) = \sin\, x, \ \ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$$

Λύση. Προφανώς

$$a_1 = 1, \ \ a_k = 0 \ \text{ για } \ k > 1$$

και

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\, \sin\, kx\, dx = t\frac{2}{k\pi}[1 - cos\, k\pi] = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } \ k - \text{άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}t, & \text{αν ο } \ k - \text{περιττός}, \end{cases}$$

Έχουμε για την u_1:

$$u_1'(t) + u_1(t) = \frac{4t}{\pi}, \ \ u_1(0) = 1,$$

για τις u_k με $k = 3, 5, 7...$:

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = \frac{4t}{k\pi}, \ \ u_k(0) = 0,$$

για τις u_k με $k = 2, 4, 6, ...$:

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \ \ u_k(0) = 0.$$

Συνεπώς

$$u_1(t) = e^{-t} + \frac{4}{\pi}(t - 1 + e^{-t}),$$

$$u_k(t) = \frac{4}{k^3\pi}\Big(t - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}e^{-k^2 t}\Big), \ \text{ για } \ k = 3, 5, 7, ...,$$

$$u_k(t) = 0 \ \text{ για } \ k = 2, 4, 6, ...$$

Άρα λύση του προβλήματος είναι

$$
\begin{gathered}
u(t,x) = \\
\Big(e^{-t} + \frac{4}{\pi}\big(t - 1 + e^{-t}\big)\Big)\sin\, x + \\
\sum_{k=3(k-\text{περιττά})}^{\infty} \frac{4}{k^5\pi}\big(k^2 t - 1 + e^{-k^2 t}\big)\sin\, kx = \\
\Big(e^{-t} + \frac{4}{\pi}\big(t - 1 + e^{-t}\big)\Big)\sin\, x + \\
\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+1)^2 t - 1 + e^{-(2m+1)^2 t}}{(2m+1)^5}\sin(2m+1)x = \\
e^{-t}\sin\, x + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)^2 t - 1 + e^{-(2m+1)^2 t}}{(2m+1)^5}\sin(2m+1)x.
\end{gathered}
$$

Θα αποδείξουμε τωρα ότι η λύση του προβλήματος (1) - (3) είναι μοναδική. Έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T, \\ u(0,x) = \phi(x), \ \ u(t,0) = u(t,l) = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} v_t - v_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T, \\ v(0,x) = \phi(x), \ \ v(t,0) = v(t,l) = 0. \end{gathered}$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w = u - v$. Προφανώς

$$\begin{gathered} w_t - w_{xx} = 0 \ \text{ στο } \ Q_T, \\ w(0,x) = w(t,0) = w(t,l) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (12) με w και ολοκληρώνουμε ως προς x:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2 dx - \int_0^l w_{xx} w dx = 0.$$

Ολοκληρώνοντας κατα μερη παιρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2 dx - w_x w\Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l w_x^2 dx = 0$$

άρα

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2 dx + \int_0^l w_x^2 dx = 0$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση αυτή ως προς t απο το μηδέν και έχουμε

$$\frac{1}{2}\int_0^l w^2 dx + \int_0^t \int_0^l w_x^2 dx d\tau = 0,$$

συνεπώς $w = 0$ δηλαδή $u = v$.

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση (1) με αρχική συνθήκη (2) και τις συνοριακές συνθήκες $Neumann$ (θεωρούμε μηδενικές συνοριακες συνθήκες χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα)

$$u_t - u_{xx} = f(t,x) \text{ για } t > 0, \quad 0 < x < l \tag{1}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0, \quad t > 0. \tag{10}$$

Παρομοίως με την κυματική εξίσωση ακολουθούμε την εξής διαδικασία: ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \, cos \frac{k\pi}{l} x. \tag{11}$$

Υποθέτουμε ότι η σειρά (11) συγκλίνει ομοιόμορφα όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν παραγωγίσουμε την (11) όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή μια ως προς t.

Κάνουμε άρτια και έπειτα περιοδική επέκταση των f και ϕ. Γράφοντας το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (1) σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$f_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(t,x)dx \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x) cos\frac{k\pi}{l}x\, dx \qquad k = 1,2,...$$

και αντικαθιστώντας την (9) στην (1) παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\Big) cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Άρα προσδιορίζουμε τις $u_k(t)$ από την (5) (με $k = 0,1,2,...$), επίσης έχουμε

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{k\pi}{l}x, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x) cos\frac{k\pi}{l}x\, dx, \quad k = 0,1,2,...$$

άρα για να επαληθεύεται η αρχική συνθήκη (2) πρέπει να ισχύει

$$u_0(0) = \frac{a_0}{2}, \quad u_k(0) = a_k \ \text{ για } \ k = 1,2,....$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (1), (2), (10) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} cos\frac{k\pi}{l}x + \int_0^t f_0(\tau)d\tau +$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\int_0^t f_k(\tau)e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau}d\tau\, cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Παράδειγμα 4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = cos\,3x \;\; \text{για} \;\; t > 0, \;\; 0 < x < \pi$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \;\; u(0,x) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$a_k = 0 \;\; \forall k,$$

επίσης

$$f_3 = 1 \;\; \text{και} \;\; f_k = 0 \;\; \text{για} \;\; k \neq 3.$$

Άρα έχουμε για την u_3:

$$u_3'(t) + 9u_3(t) = 1, \;\; u_3(0) = 0,$$

και

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \;\; u_k(0) = 0,$$

για $k \neq 3$. Συνεπώς

$$u_k(t) \equiv 0 \;\; \text{για} \;\; k \neq 3, \;\; u_3(t) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big).$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big)cos\,3x.$$

Παράδειγμα 5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = \cos 3x + \frac{t}{\pi} - \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2$$

$$u_x(t,0) = t, \ \ u_x(t,\pi) = 0,$$

$$u(0,x) = 0.$$

Λύση. Για την

$$v(t,x) = u(t,x) + \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t$$

έχουμε

$$v_t - v_{xx} = \cos 3x,$$

$$v_x(0,x) = 0, \ \ v_x(t,\pi) = 0,$$

$$v(0,x) = 0.$$

Η λύση αυτού του προβλήηματος είναι (βλ. παράδειγμα 4)

$$v(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x$$

άρα

$$u(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x - \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t.$$

Η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης του του προβλήματος (1), (10), (3) είναι ίδια.

Φυλλάδιο 4

1.

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = t^2 \sin\, x \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \ \text{ για } \ t > 0, \\ u(0,x) = \sin\, 2x \ \text{ για } \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

2.

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = 2\sin\, x \cos\, x \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \ \text{ για } \ t > 0, \\ u(0,x) = \sin\, x + \sin 3x \ \text{ για } \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

3.

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = \frac{t^2}{2} \cos\, x \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \ \text{ για } \ t > 0, \\ u(0,x) = \cos\, x \ \text{ για } \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

4.

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{x^2}{2\pi} - \frac{t}{\pi}, \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi, \\ u_x(t,0) = 0, \ \ u_x(t,\pi) = t \ \text{ για } \ t > 0, \\ u(0,x) = \frac{1}{2} \cos\, x \ \text{ για } \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

Διάλεξη 8. Εξίσωση $Laplace$

Θα εφαρμόσουμε τωρα την μέθοδο $Fourier$ για την εξίσωση $Laplace$ σε δυο περιπτώσεις, πρώτη περίπτωση όταν το χωρίο είναι ένας δίσκος και δευτερη όταν το χωρίο είναι ένα ορθογώνιο.

1. Έστω οτι το χωρίο είναι ένας δίσκος με κέντρο στο μηδέν και ακτίνα R.

1. α) Πρόβλημα $Dirichlet$.

Θέλουμε να βρουμε τη λύση της εξίσωσης

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ στο } \ r = \sqrt{x^2 + y^2} < R \tag{1}$$

η οποία επαληθεύει τη συνοριακή συνθήκη

$$u\Big|_{r=R} = g(\theta), \quad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

όπου g δοσμένη συνάρτηση.

Εδω θα χρειαστούμε δυο θεωρήματα τα οποια θα τα δώσουμε χωρίς απόδειξη.

Ας θυμηθουμε οτι μια συνάρτηση ονομάζεται αρμονική αν επαληθευει την εξίσωση

$$\Delta u = 0$$

για $n = 2$ ($u = u(x, y)$)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Πρώτο Θεώρημα του $Harnack$. *Αν η ακολουθία αρμονικών στο Ω συναρτήσεων $\{u_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση u στο Ω, τότε η u είναι αρμονική.*

Δεύτερο Θεώρημα του $Harnack$. *Έστω ότι η ακολουθία αρμονικών στο Ω συναρτήσεων $\{u_n\} \in C^0(\bar{\Omega})$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\partial\Omega$. Τότε $\{u_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω (και το όριο είναι αρμονική συνάρτηση).*

Έστω $g \in C^1[0,2\pi]$, $g(\theta+2\pi)=g(\theta)$, τότε

$$g(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k cos\, k\theta+b_k\sin\, k\theta\big),$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\psi)cos\, k\psi d\psi,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\psi)\sin\, k\psi\, d\psi\; k=0,1,2,\dots .$$

Έχουμε

$$\lim_{m\to\infty}\max_{\theta}|g(\theta)-T_m(\theta)|=0$$

όπου

$$T_m(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\big(a_k cos\, k\theta+b_k\sin\, k\theta\big),$$

λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς $Fourier$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u_m(x,y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{r}{R}\Big)^k\big(a_k cos\, k\theta+b_k\sin\, k\theta\big),$$

($x=r\, cos\,\theta$, $y=r\,\sin\,\theta$). Οι συναρτήσεις

$$r^k cos\, k\theta\;\text{ και }\; r^k\sin\, k\theta$$

είναι αρμονικές (ως συναρτήσεις των μεταβλητών x και y), δηλαδή

$$(r^k cos\, k\theta)_{xx}+(r^k cos\, k\theta)_{yy}=0,\quad (r^k\sin\, k\theta)_{xx}+(r^k\sin\, k\theta)_{yy}=0,$$

$$r=r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\arctan\frac{y}{x}$$

άρα και η

$$u_m,\quad \forall m$$

είναι αρμονική.

Προφανώς

$$u_m\Big|_{r=R}=T_m(\theta).$$

Αφού η ακολουθία

$$T_m(\theta)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα τότε (λόγω του πρώτου και του δεύτερου θεωρήματος $Harnack$) και η ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων

$$u_m$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $r \leq R$ και το όριο είναι αρμονική συνάρτηση, επίσης

$$u = g \ \text{ για } \ r = R.$$

Αρα η λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big)$$

με $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.

Παράδειγμα 1 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (1), (2) με

$$g(\theta) = 2\sin\theta + \frac{1}{2}\cos 3\theta, \quad R = 1.$$

Λύση. Προφανώς

$$a_k = 0, \;\; \forall k \neq 3, \quad\;\; a_3 = 1/2, \;\; b_1 = 2 \;\; \text{και} \;\; b_k = 0 \;\; \text{για} \;\; k \neq 1$$

άρα

$$u(x,y) = \frac{r}{R} 2\sin\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{1}{2}\cos 3\theta =$$

$$2\sqrt{x^2+y^2}\Big(\sin\big(\arctan\frac{y}{x}\big) + \frac{x^2+y^2}{4}\cos\big(3\arctan\frac{y}{x}\big)\Big).$$

1. β) Παρομοίως θα εξετάσουμε τωρα το πρόβλημα $Neumann$. Θέλουμε να βρουμε τη λύση της εξίσωσης (1) η οποία επαληθεύει τη συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = g(\theta). \tag{3}$$

Εδω υπάρχουν δυο ιδιαιτερότητες σε σχέση με το πρόβλημα $Dirichlet$.

Η πρώτη είναι οτι το πρόβλιμα $Neumann$ για τυχαία g μπορεί να μην έχει λύση.

Πράγματι απο το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\int_{x^2+y^2<R^2} \Delta u dxdy = \int_{x^2+y^2<R^2} div(\nabla u)dxdy = \int_{r=R} \frac{\partial u}{\partial r} ds = \frac{1}{R}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta,$$

συνεπώς (αφού $\Delta u = 0$) η αναγκαία συνθήκη για την υπαρξη της λύσης είναι

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = 0. \tag{4}$$

Η δευτερη ιδιαιτερότητα είναι οτι αν η u είναι λύση του προβλήματος (1), (3) τότε και η

$$u + C$$

με τυχαια σταθερά C είναι επίσης λύση.

Θα κατασκευάσουμε τη λύση του προβλήματος (1), (3) υπο τον περιορισμό (4) και με αυτο θα δείξουμε οτι η συνθήκη (4) είναι ικανή και αναγκαία για την υπαρξη της λύσης.

Απο την (4) προκύπτει οτι $a_0 = 0$, άρα η σειρά $Fourier$ για την g πρέπει να έχει τη μορφή

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big).$$

Η συνάρτηση

$$u_m(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \frac{r^k}{kR^{k-1}} \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big)$$

επαληθευει την εξίσωση (1) (αφου οι συναρτήσεις $r^k \cos\, k\theta$, $r^k \sin\, k\theta$ είναι αρμονικές) και ικανοποιεί την συνθήκη

$$\frac{\partial u_m}{\partial r}\Big|_{r=R} = \tilde{T}_m(\theta) = \sum_{k=1}^{m} \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big)$$

αφου

$$\frac{\partial u_m}{\partial r} = \sum_{k=1}^{m} \frac{r^{k-1}}{R^{k-1}} \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$v_m(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \frac{r^k}{kR^{k-1}} \big(a_k \sin\, k\theta - b_k \cos\, k\theta\big).$$

Προφανώς η v_m είναι αρμονική και

$$\frac{\partial u_m}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_m}{\partial \theta}$$

συνεπώς

$$\frac{\partial v_m}{\partial \theta}\Big|_{r=R} = R\tilde{T}_m(\theta)$$

απ' οπου προκύπτει οτι

$$v_m\Big|_{r=R} = R\int_0^{\theta} T_m(\phi)d\phi + C$$

με C αυθαίρετη σταθερά.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας T_m συνεπάγεται τη ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας

$$\int_0^\theta T_m(\phi)d\phi.$$

Αρα, απο το πρώτο και δευτερο θεώριμα $Harnack$, έχουμε μια ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων

$$v_m$$

που συγκλίνει ομοιόμορφα στον δίσκο $r < R$ στην αρμονική συνάρτηση

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{kR^{k-1}} \big(a_k \sin k\theta - b_k \cos k\theta\big)$$

και

$$v\Big|_{r=R} = R\int_0^\theta g(\phi)d\phi + C, \text{ επίσης } \frac{\partial v}{\partial \theta}\Big|_{r=R} = Rg(\theta).$$

Θα αποδείξουμε οτι η συνάρτηση

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{kR^{k-1}}\big(a_k\cos\,k\theta+b_k\sin\,k\theta\big) \tag{5}$$

είναι λύση του προβλήματος (1), (3).

Παρατηρούμε οτι οι u, v επαληθευουν τις

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta},\quad \frac{\partial v}{\partial\theta}=r\frac{\partial u}{\partial r}. \tag{6}$$

Ευκολα διαπιστώνουμε οτι αν δυο συναρτήσεις u, v επαληθεύουν τις σχέσεις (6) τότε η μια είναι αρμονική αν και μόνο αν είναι αρμονική η άλλη.

Έχουμε οτι η v είναι αρμονική αρα και η u ειναι αρμονική

Επίσης

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R}=g(\theta).$$

Αρα όντως η λύση του προβλήματος (1), (3) δίνεται απο τον τυπο (5).

2. Έστω τώρα το χωρίο είναι ένα ορθογώνιο. Θα περιοριστούμε με το πρόβλημα *Dirichlet*. Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις θα παρούμε το ορθογώνιο $(0,\pi)\times(0,l)$ και θα μελετήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα *Dirichlet*:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \text{ στο } (0,\pi)\times(0,l), \tag{7}$$

$$u(0,y)=u(\pi,y)=0 \text{ για } y\in[0,l], \tag{8}$$

$$u(x,0)=\phi_1(x),\ \ u(x,l)=\phi_2(x) \text{ για } x\in[0,\pi], \tag{9}$$

με $\phi_i(0)=\phi_i(\pi)=0,\ i=1,2$. Ψάχνουμε τη λύση της εξίσωσης (7) σε μορφή

$$u(x,y)=X(x)Y(y) \tag{10}$$

αντικαθιστώντας την (10) στην (7) παίρνουμε

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0,$$

διαιρώντας δια XY έχουμε

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda,\ \ \lambda\in\mathbf{R}. \tag{11}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες (8) για την συνάρτηση $X(x)$ προκύπτει το εξής πρόβλημα

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ \ x\in(0,\pi),\ \ X(0)=X(\pi)=0.$$

Μη τετριμμένες λύσεις υπάρχουν μόνο για $\lambda=\lambda_k=k^2$, $k\in\mathbf{N}$ και δίνονται ως

$$X(x)=C\sin kx,\ \ C-\text{αυθαίρετη σταθερά}.$$

Επίσης από την (11) έχουμε

$$Y''(y)-\lambda_k Y(y)=0\ \ y\in[0,l],$$

προφανώς

$$Y_k(y)=A_ke^{ky}+B_ke^{-ky},\ \ A_k,\ B_k-\text{αυθαίρετες σταθερές}.$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = \left(A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}\right) \sin\, kx$$

επαληθεύουν την εξίσωση (7) και τις συνθήκες (8). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)$$

υπό την προϋπόθεση ότι συγκλίνει και οι παράγωγοι όρο προς όρο πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς x και y επίσης συγκλίνουν.

Για να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες (9) θα ακολουθήσουμε την γνωστή διαδικασία, γράφουμε

$$\phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\, kx, \;\; a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi_1(x) \sin\, kx,$$

και

$$\phi_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\, kx, \;\; b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi_2(x) \sin\, kx.$$

Θέλουμε να ισχύει το εξής

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + B_k)\sin\, kx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\, kx,$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,l) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k e^{kl} + B_k e^{-kl})\sin\, kx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\, kx,$$

άρα πρέπει

$$A_k + B_k = a_k, \;\; \text{και} \;\; A_k e^{kl} + B_k e^{-kl} = b_k,$$

δηλαδή

$$A_k = \frac{a_k - e^{kl} b_k}{1 - e^{2kl}}, \;\; B_k = \frac{b_k - a_k e^{kl}}{1 - e^{2kl}} e^{kl}.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (7)-(9) δίνεται από τον τύπο

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - e^{kl} b_k}{1 - e^{2kl}} e^{ky} + \frac{b_k - a_k e^{kl}}{1 - e^{2kl}} e^{kl} e^{-ky} \right) \sin\, kx$$

(υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και y).

Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν εξ αρχής θα ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin\, kx.$$

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (7)-(9) με

$$l = \pi, \quad \phi_1 \equiv 0, \quad \text{και} \quad \phi_2 = \sin\, x.$$

Λύση. Προφανώς

$$a_k = 0, \quad \forall k, \quad b_1 = 1 \quad \text{και} \quad b_k = 0 \quad \text{για} \quad k \geq 2$$

άρα

$$u(x, y) = \frac{e^{\pi}\left(e^{-y} - e^{y}\right)}{1 - e^{2\pi}} \sin\, x.$$

Φυλλάδιο 5.

1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (1), (2) με
$$g = 1 + 2\sin\theta\,\cos\theta.$$

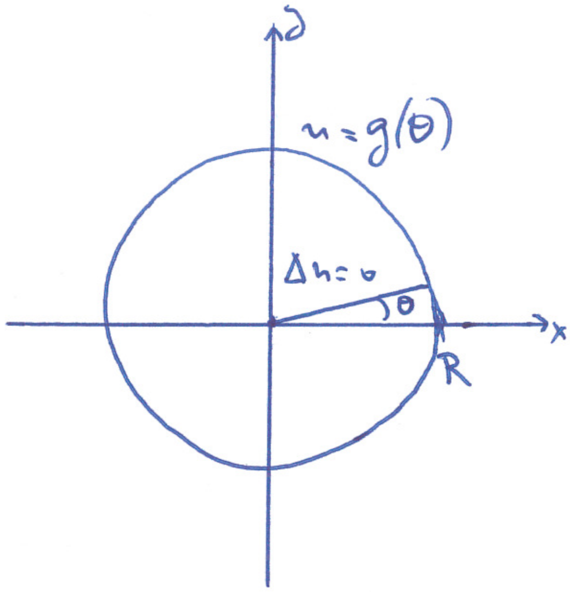
2. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους
$$(r\cos\theta)_x, \quad (r\cos\theta)_y.$$

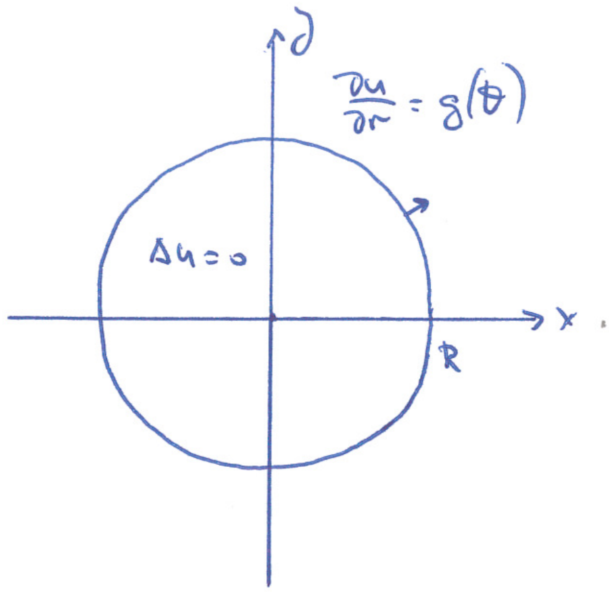
$$(r\cos\theta)_{xx}, \quad (r\cos\theta)_{yy}$$
όπου
$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

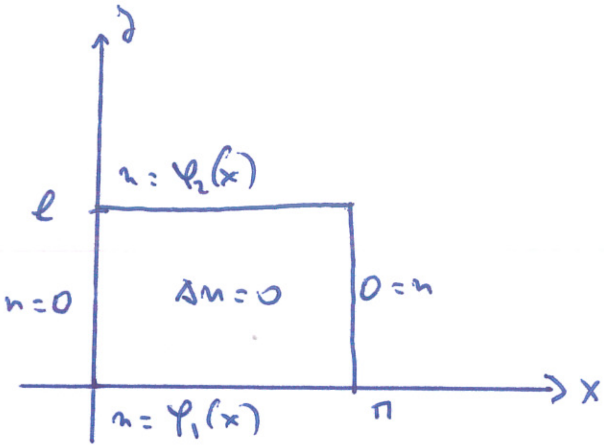
3. Για ποιες τιμές της παραμέτρου α το πρόβλημα
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \;\text{ στο }\; r = \sqrt{x^2+y^2} < R$$
και
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \alpha + \cos\theta.$$
έχει λύση ? Προσδιορίστε τη λύση αυτη.

4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (7)-(9) με $l = \pi$,
$$\phi_1 = \sin\, x + 2\sin 2x \;\text{ και }\; \phi_2 = \sin\, x.$$

Δ. 8







Διάλεξη 9. Συστήματα 2×2 με σταθερούς συντελεστές

Θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό. Με t θα συμβολίζουμε την μεταβλητή και με

$$x(t),\, y(t)$$

τις άγνωστες συναρτήσεις.

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα

$$x' = a\,x + b\,y + f(t),$$
(1)
$$y' = c\,x + d\,y + g(t)$$

όπου

$$a,\, b,\, c,\, d$$

δοσμένες σταθερές και

$$f(t),\, g(t)$$

δοσμένες συναρτήσεις.

Θα υποθέσουμε ότι η $g(t)$ είναι $\mathbf{C}^1$ συνάρτηση,
$f(t)$ είναι $\mathbf{C}^0$
και $c \neq 0$.

Θέλουμε να βρούμε τη λύση του συστήματος (1), δηλαδή τις συναρτήσεις

$$x(t),\, y(t)$$

που επαληθεύουν τις εξισώσεις που απαρτίζουν το σύστημα (1).

Παραγωγίζουμε τη δεύτερη εξίσωση, προφανώς

$$y'' = c\,x' + d\,y' + g' = c(a\,x + b\,y + f) + d\,y' + g'.$$

Αντικαθιστώντας το

$$c\,x \quad \text{με} \quad y' - d\,y - g$$

παίρνουμε

$$y'' - (a+d)y' - (cb - ad)y = cf - ag + g'.$$

Προσδιορίζουμε την $y(t)$ και έπειτα την $x(t)$ απο την σχέση

$$y' = c\,x + d\,y + g$$

.

Αν $c = 0$ τότε λύνουμε πρώτα την εξίσωση

$$y' = d\,y + g$$

και μετά την

$$x' = a\,x + b\,y + f.$$

Το αντίστοιχο πρόβλημα $Cauchy$ είναι:
να βρεθεί η λύση του συστήματος (1) τ.ω.

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$$

όπου t_0, x_0, y_0 - δοσμένες σταθερές.

Πως λύνονται τα συστήματα στην γενική περίπτωση θα το μάθετε στο μάθημα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις.

Παράδειγμα. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$x' = x + y + 1/3,$$
$$y' = 3x - y + e^t.$$

Λύση. Παραγωγίζουμε την δευτερη εξίσωση, προφανώς έχουμε

$$y'' = 3\,x' - y' + e^t$$

αρα (χρησιμοποιώντας) την πρωτη

$$y'' = 3x + 3y + 1 - y' + e^t. \tag{2}$$

Επίσης έχουμε (απο τη δευτερη εξίσωση)

$$3x = y' + y - e^t \tag{3}$$

συνεπώς η (2) γράφεται ως

$$y'' = y' + y - e^t + 3y + 1 - y' + e^t$$

ή

$$y'' - 4y = 1. \tag{4}$$

Βρίσκουμε τη λύση $y(t)$ της (4) και έπειτα την $x(t)$ απο την σχέση (3).

Προφανως η γενική λύση της ομογενούς ($y'' - 4y = 0$) είναι

$$C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

και η μερική λύση της μη ομογενους είναι

$$-1/4$$

αρα η γενική λύση της (4) είναι

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - 1/4$$

και για την $x(t)$ έχουμε (απο (3))

$$x(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}/3 - 1/12 - e^t/3.$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$x(t) = C_1e^{2t} - C_2e^{-2t}/3 - 1/12 - e^t/3,$$
$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - 1/4.$$

Αν έχουμε αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 7/6, \;\; y(0) = 1/6$$

τότε πρέπει

$$C_1 - C_2/3 - 1/12 - 1/3 = 7/6,$$

και

$$C_1 + C_2 - 1/4 = 1/6.$$

Αρα

$$C_1 = 31/24, \quad C_2 = -7/8$$

και η λύση του προβλήματος $Cauchy$ είναι

$$x(t) = \frac{31}{24}e^{2t} + \frac{7}{24}e^{-2t} - \frac{1}{12} - \frac{1}{3}e^t,$$
$$y(t) = \frac{31}{24}e^{2t} - \frac{7}{8}e^{-2t} - \frac{1}{4}.$$

Προφανως εδω μπορούμε να ξεκινήσουμε παραγωγιζοντας την πρώτη εξίσωση:

$$x'' = x' + y' = x' + 3x - y + e^t.$$

Αφου

$$y = x' - x - 1/3 \tag{5}$$

έχουμε

$$x'' = 4x + e^t + 1/3.$$

Συνεπως

$$x(t) = K_1 e^{2t} + K_2 e^{-2t} - \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{12}$$

και απο την (5)

$$y(t) = K_1 e^{2t} - 3K_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}.$$

Αρα η γενική λύση είναι

$$x(t) = K_1 e^{2t} + K_2 e^{-2t} - \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{12}$$
$$y(t) = K_1 e^{2t} - 3K_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}.$$

$$\Big(C_1 = K_1, \quad C_2 = -3K_2.\Big)!$$

Άσκηση.

1. Να βρεθεί η λύση

$$(x(t),\, y(t))$$

του προβλήματος $Cauchy$

$$x' = x - 5y + 1, \;\; x(0) = 0,$$

$$y' = 2x - y - 1, \;\; y(0) = 0.$$

Φυλλάδιο ΜΔΕ 1.

1.
$$u_t + x\,u_x = x\,u, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \ \ |x| < +\infty.$$

Λήση. $\sigma(s) = (t(s), x(s))$

$$\frac{dt}{ds} = 1, \ \ t(s)\Big|_{s=0} = 0,$$
$$\frac{dx}{ds} = x, \ \ x(s)\Big|_{s=0} = x_0,$$

$u(t,x)$ πάνω στην $\sigma(s)$ είναι $u(s) = u(t(s), x(s))$ αρα

$$\frac{du(s)}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} = u_t t' + u_x x' = u_t + x u_x$$

συνεπώς

$$\frac{du(s)}{ds} = x(s)\,u(s), \ \ u(s)\Big|_{s=0} = \phi(x(s))\Big|_{s=0} = \phi(x_0).$$

αρα (σχήμα 1α)

$$t(s) = s, \ \ x(s) = x_0 e^s \quad (\sigma(s) = (s,\, x_0 e^s) - \ \ \text{χαρακτηριστική})$$

και

$$\frac{du}{ds} = x_0 e^s\,u, \ \ u(s)\Big|_{s=0} = \phi(x)\Big|_{s=0} = \phi(x_0)$$
$$\frac{du}{u} = x_0 e^s ds$$
$$\ln|u| - \ln|\phi(x_0)| = x_0 e^s - x_0$$
$$u(s) = \phi(x_0) e^{x_0 e^s - x_0}.$$

Η λύση (σε παραμετρική μορφή)

$$t(s) = s, \ \ x(s) = x_0 e^s, \ \ u(s) = \phi(x_0) e^{x_0 e^s - x_0}.$$

Προσπαθούμε να ¨διώξουμε¨ την παραμετρο s:

$$x(t) = x_0 e^t, \ \ u(t) = \phi(x_0) e^{x_0 e^t - x_0}$$

Θέλουμε τωρα να λύσουμε ως προς u $\quad (u(t) = u(t, x(t))$):

$$x_0 = x e^{-t} \ \ \Rightarrow \ \ u(t,x) = \phi(x e^{-t}) e^{x - x e^{-t}}.$$

αφου $t = s$ μπορούμε να το κάνουμε ποιο απλά

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(t)\Big|_{t=0} = x_0 \ \text{ χαρακτηριστική εξίσωση,}$$

$u(t,x)$ πάνω στην $\sigma(t) = (t, x(t))$ είναι $u(t) = u(t, x(t))$

$$\frac{du}{dt} = x(t)\, u(t), \quad u(t)\Big|_{t=0} = \phi(x(t))\Big|_{t=0} = \phi(x_0).$$

αρα (σχήμα 16)

$$x(t) = x_0 e^t - \quad \text{χαρακτηριστική)}$$

$$\frac{du}{dt} = x_0 e^t\, u, \quad u(t)\Big|_{t=0} = \phi(x_0)$$

$$\frac{du}{u} = x_0 e^t dt$$

$$u(t) = \phi(x_0) e^{x_0 e^t - x_0}.$$

Η λύση (σε παραμετρική μορφή)

$$x(t) = x_0 e^t, \quad u(t) = \phi(x_0) e^{x_0 e^t - x_0}.$$

Θέλουμε τωρα να λύσουμε ως προς u ($u(t) = u(t, x(t))$):

$$x_0 = x e^{-t} \quad \Rightarrow \quad u(t,x) = \phi(x e^{-t}) e^{x - x e^{-t}}.$$

Συνεπώς η λύση είναι

$$u(t,x) = \phi(x e^{-t}) e^{x - x e^{-t}}.$$

2.

$$u_t + u_x = x(u+1), \quad u(0,x) = cos\,x, \quad |x| < +\infty.$$

Λήση.

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = t + x_0 \ \text{ χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = x(u+1), \quad u\Big|_{t=0} = cos\,x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = (t+x_0)(u+1) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u+1} = (t+x_0)dt.$$

Με αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{du}{u+1} = \int (t+x_0)dt + C \quad \Rightarrow$$

$$\ln|u+1| = t^2/2 + x_0 t + C \quad \Rightarrow \quad u+1 = \tilde{C}e^{t^2/2+x_0 t}.$$

Θέλουμε

$$u(0) = \cos x_0 \ \text{ δηλαδή } \ u(0) = \tilde{C} - 1 = \cos x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{C} = \cos x_0 + 1$$

αρα

$$u = (\cos x_0 + 1)e^{t^2/2+x_0 t} - 1.$$

Με ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{\cos x_0}^{u} \frac{d\eta}{\eta+1} = \int_0^t (\tau + x_0)d\tau \quad \Rightarrow$$

$$\ln|u+1| - \ln|\cos x_0 + 1| = t^2/2 + x_0 t \quad \Rightarrow$$

$$u = (\cos x_0 + 1)e^{t^2/2+x_0 t} - 1$$

Έχουμε

$$x(t) = t + x_0$$

$$u(t) = \big(cos\,x_0 + 1\big)e^{t^2/2+x_0 t} - 1$$

συνεπώς η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \big(cos(x-t) + 1\big)e^{xt - t^2/2} - 1.$$

3.

$$u_t - (t+x)\,u_x = (x-1+t)e^t, \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; |x| < +\infty.$$

Ξεχωριστά γράψτε τη λύση για

$$\phi(x) = 2x - 1 \;\text{ και }\; \phi(x) \equiv -1.$$

Λήση.

$$\frac{dx}{dt} = -t - x, \;\; x\Big|_{t=0} = x_0 \;\text{ χαρακτηριστική εξισωση}$$

$$\frac{du}{dt} = (x-1+t)e^t, \;\; u\Big|_{t=0} = \phi(x_0).$$

Λύνουμε το πρ. $Cauchy$

$$x' + x = -t, \;\; x\Big|_{t=0} = x_0,$$

προφανώς

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} - t + 1 \;\text{ χαρακτηριστική}$$

και η εξίσωση κατα μήκος της χαρακτηριστικής

$$\frac{du}{dt} = (x(t) - 1 + t)e^t = ((x_0-1)e^{-t} - t + 1 - 1 + t)e^t = x_0 - 1$$

συνεπώς

$$u(t) = t(x_0 - 1) + \phi(x_0).$$

Αφου

$$x_0 - 1 = (x + t - 1)e^t$$

έχουμε

$$u(t,x) = t(x+t-1)e^t + \phi((x+t-1)e^t + 1),$$

Αν $\phi = -1$, τότε

$$u(t,x) = t(x+t-1)e^t - 1.$$

Αν $\phi = 2x - 1$, τότε

$$u(t,x) = t(x+t-1)e^t + 2((x+t-1)e^t + 1) - 1.$$

6^1.

$$u_t + u_x = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x)$$

όπου

$$\phi(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{για } |x| < \pi/2 \\ 1, & \text{για } x \geq \pi/2 \\ -1, & \text{για } x \leq -\pi/2 \end{cases}$$

Λήση. (βλ. σχημα 2α)

$$\frac{dx}{dt} = 1, \ \ x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = t + x_0,$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \ \ u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u(t) = \phi(x_0).$$

Αρα

$$u(t,x) = \phi(x-t)$$

δηλαδή

$$u(t,x) = \begin{cases} \sin(x-t), & \text{για } |x-t| < \pi/2 \\ 1, & \text{για } x-t \geq \pi/2 \\ -1, & \text{για } x-t \leq -\pi/2 \end{cases}$$

(βλ. σχημα 2β)

6.

$$u_t + u_x = 4, \quad u\Big|_{t=0} = \sin\, x \;\text{ για }\; |x| < 1.$$

Λήση.

$$\frac{dx}{dt} = 1, \;\; x\Big|_{t=0} = x_0 \;\;\Rightarrow\;\; x(t) = t + x_0,$$

$$\frac{du}{dt} = 4, \;\; u\Big|_{t=0} = \sin(x_0) \;\;\Rightarrow\;\; u(t) = 4t + \sin x_0.$$

Αρα

$$u(t,x) = 4t + \sin(x - t).$$

στη λωρίδα

$$|x - t| < 1.$$

4.
$$u_t + \frac{t}{x}\, u_x = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(|x|), \;\; |x| < +\infty.$$

Λήση.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}, \;\; x\Big|_{t=0} = x_0 \;\;\Rightarrow\;\; x^2 - t^2 = x_0^2,$$
$$\frac{du}{dt} = 0, \;\; u\Big|_{t=0} = \phi(|x_0|) \;\;\Rightarrow\;\; u(t) = \phi|x_0|.$$

Έχουμε

$$x^2 - t^2 = x_0^2 \;\;\Rightarrow\;\; |x_0| = \sqrt{x^2 - t^2}$$

ΜΟΝΟ εκει όπου

$$x^2 \geq t^2$$

βλ. σχήμα 3α.
Αρα

$$u(t, x) = \phi(\sqrt{x^2 - t^2}).$$

5^1.

$$u_t - \frac{t}{x}\,u_x = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(|x|), \ \ |x| < +\infty.$$

Λήση. (βλ. σχημα)

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}, \ \ x\Big|_{t=0} = x_0 \ \ \Rightarrow \ \ x^2 + t^2 = x_0^2,$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \ \ u\Big|_{t=0} = \phi(|x_0|) \ \ \Rightarrow \ \ u(t) = \phi(|x_0|).$$

Συνεπώς

$$u(t,x) = \phi(\sqrt{x^2+t^2}).$$

5^2. Εξετάστε αν το ακόλουθο πρόβλημα έχει λύση

$$u_t + \frac{t}{x}\, u_x = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \;\; |x| < +\infty.$$

Λήση.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}, \;\; x\Big|_{t=0} = x_0 \;\; \Rightarrow \;\; x^2 + t^2 = x_0^2,$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \;\; u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \;\; \Rightarrow \;\; u(t) = \phi(x_0).$$

Έχουμε

$$x_0 = \pm(\sqrt{x^2 + t^2})!$$

7.

$$u_t + x\,u_x = (x+t)u, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \;\; x \in [0,1] \cup [2,3].$$

Λήση. (βλ. σχήμα 5)

$$\frac{dx}{dt} = x, \;\; x\Big|_{t=0} = x_0 \;\;\Rightarrow\;\; x(t) = x_0\,e^t,$$

$$\frac{du}{dt} = (x+t)u, \;\; u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \;\;\Rightarrow$$

$$\frac{du}{dt} = (x_0 e^t + t)u, \;\; u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \;\;\Rightarrow$$

$$\frac{du}{u} = (x_0 e^t + t)dt, \;\; u\Big|_{t=0} = \phi(x_0).$$

Με αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{du}{u} = \int (x_0 e^t + t)dt + C$$

αρα

$$\ln|u| = C + x_0 e^t + t^2/2 \;\;\Rightarrow$$
$$|u| = \tilde{C} e^{x_0 e^t + t^2/2}, \;\; \tilde{C} = e^C$$
$$u = C_1 e^{x_0 e^t + t^2/2}, \;\; C_1 \in \mathbf{R}.$$

Αφου θέλουμε

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \;\;\Leftrightarrow\;\; C_1 e^{x_0 e^t + t^2/2}\Big|_{t=0} = \phi(x_0)$$

πρέπει

$$C_1 = e^{-x_0}\phi(x_0).$$

Συνεπώς

$$u = \phi(x_0) e^{x_0 e^t + t^2/2 - x_0}$$

και

$$u(t,x) = \phi(xe^{-t}) e^{x + t^2/2 - xe^{-t}}$$

Με ορισμένο

$$\int_{\phi(x_0)}^{u} \frac{d\eta}{\eta} = \int_0^t (x_0 e^{\tau} + \tau) d\tau$$

αρα

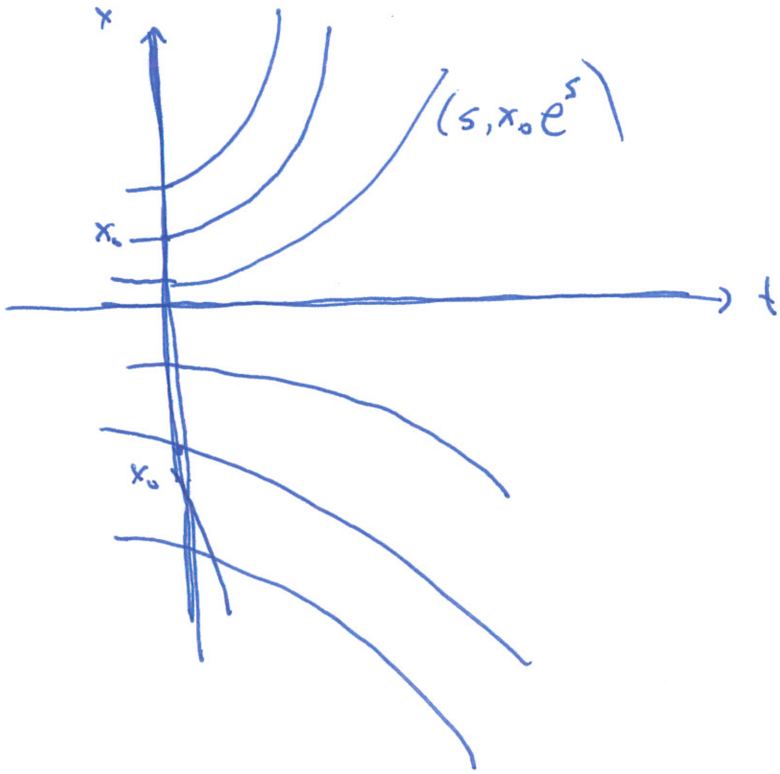
$$\ln|u| - \ln|\phi(x_0)| = x_0 e^t + t^2/2 - x_0$$

και

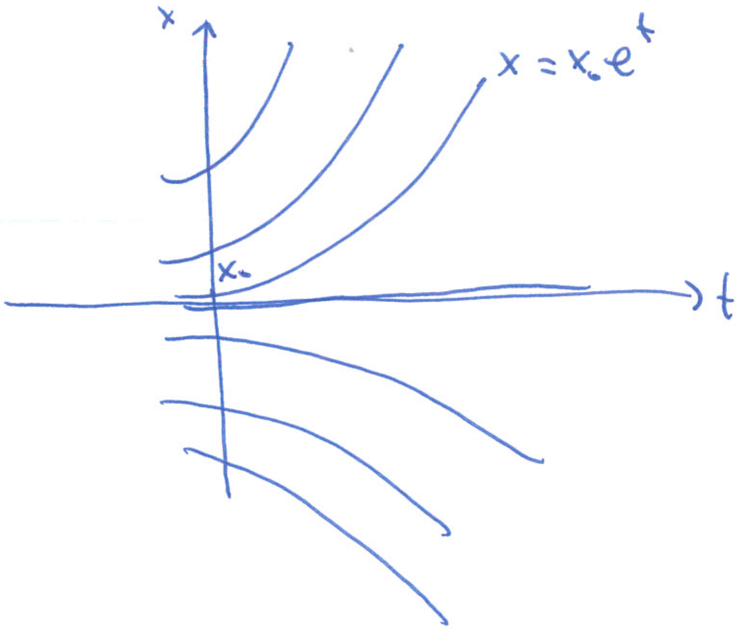
$$|u| = |\phi(x_0)| e^{x_0 e^t + t^2/2 - x_0} \quad \Rightarrow \quad u = \phi(x_0) e^{x_0 e^t + t^2/2 - x_0} \; \Rightarrow$$

$$u(t,x) = \phi(xe^{-t}) e^{x + t^2/2 - xe^{-t}}.$$

[illegible] 1א

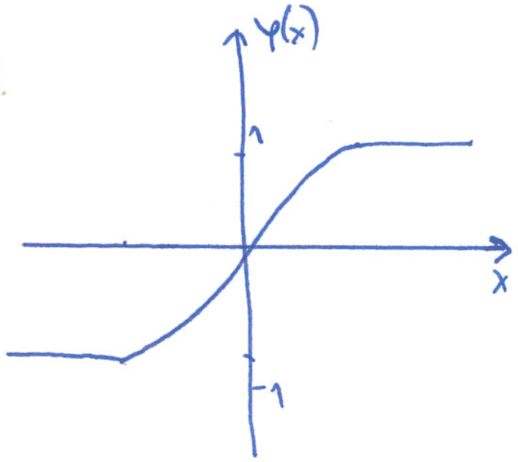


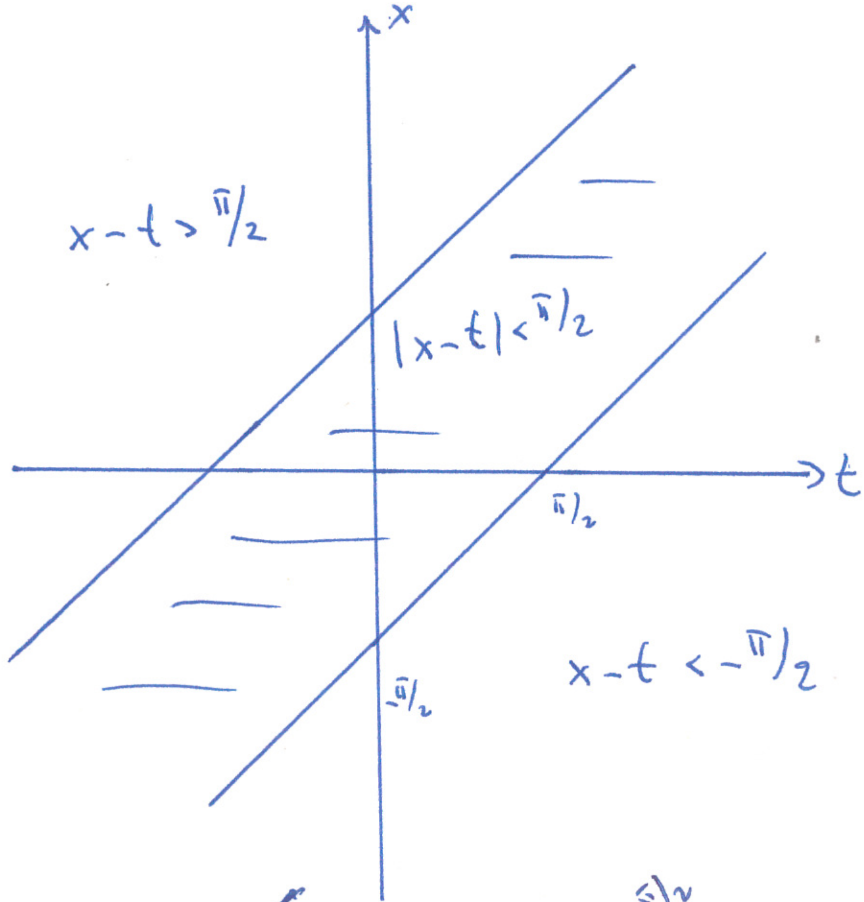
[illegible] 1ב

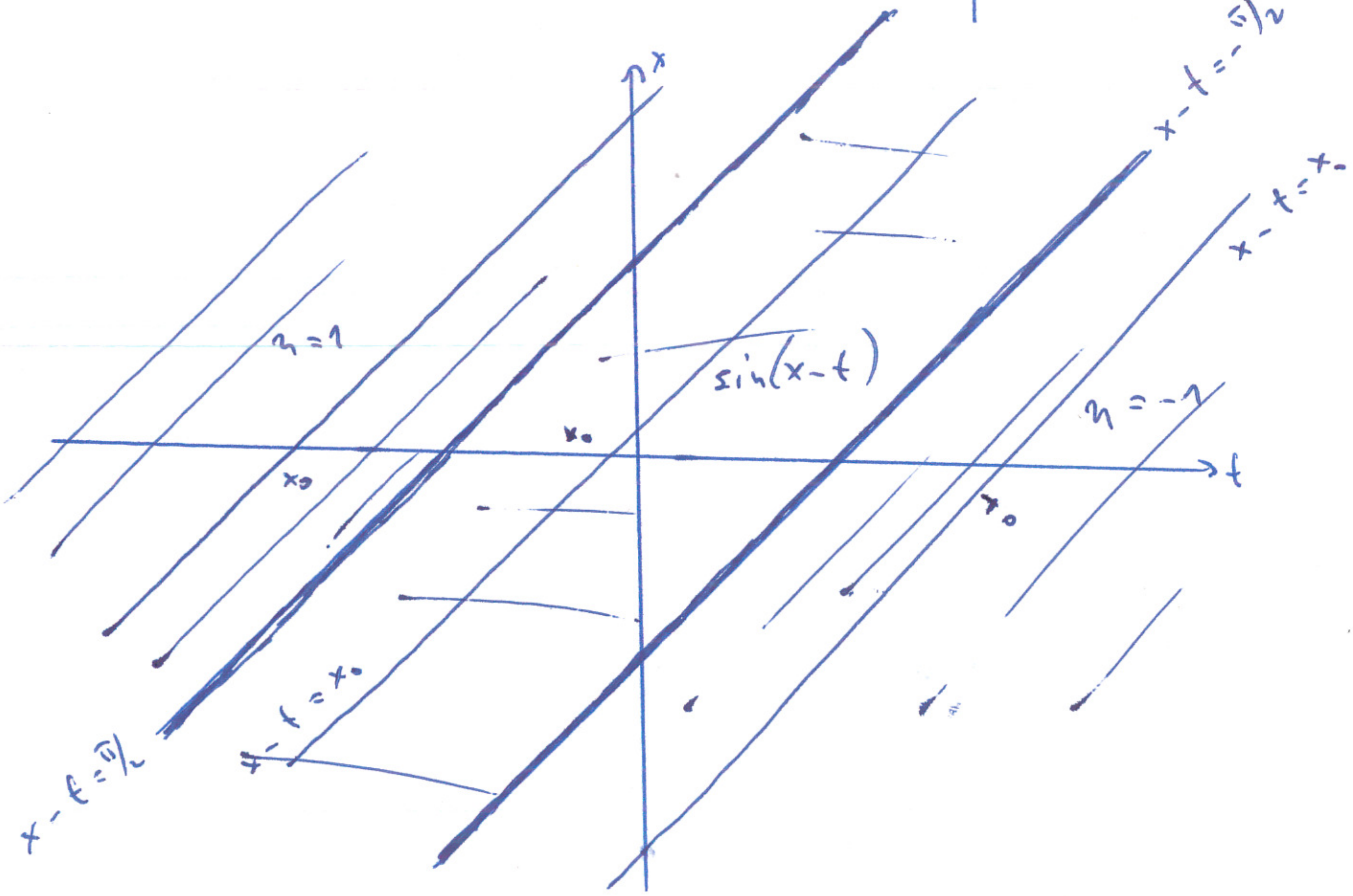


Σχήμα 2

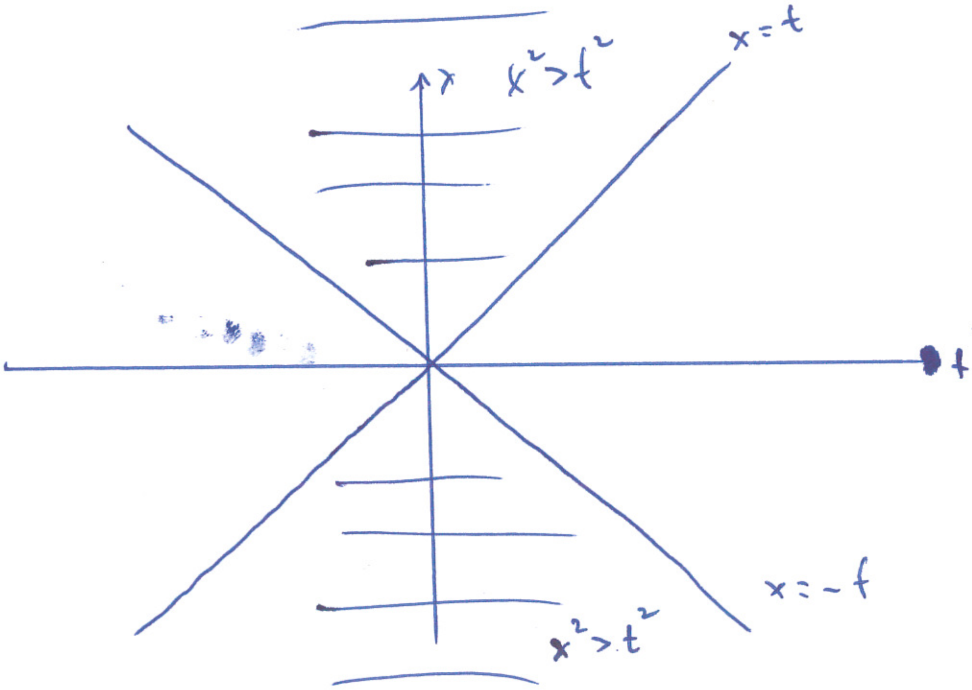
2α

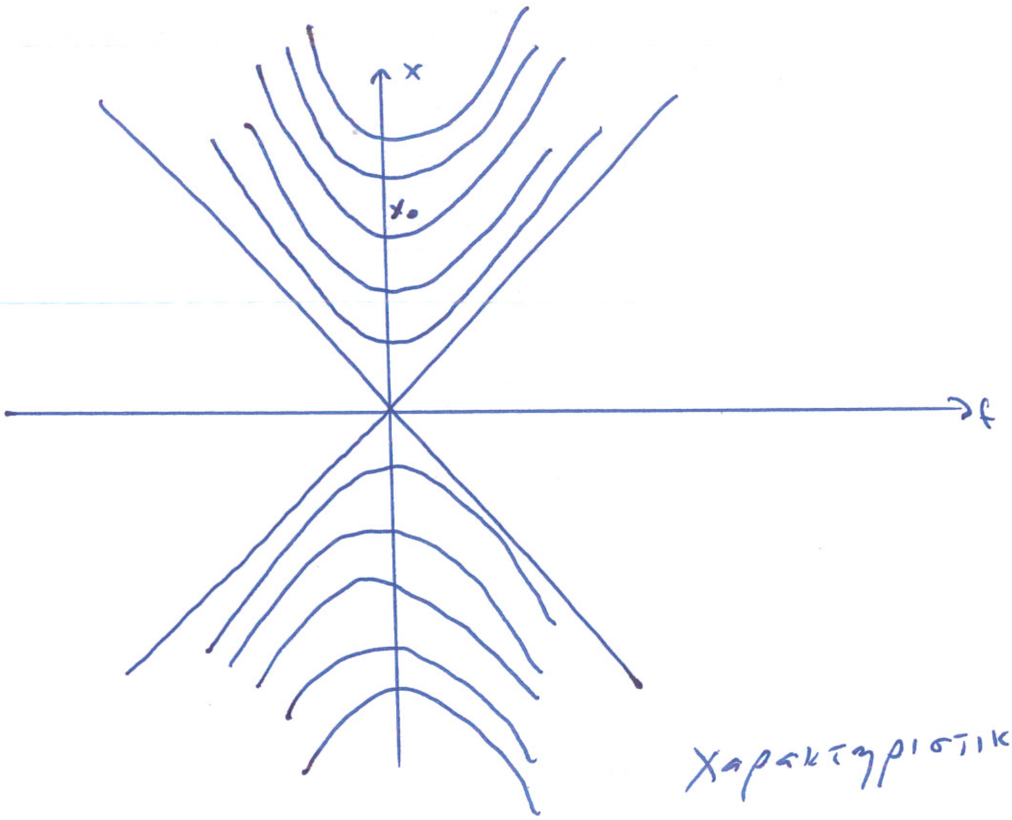

φ(x)
1
-1
x


x
t
x − t > π/2
|x − t| < π/2
x − t < −π/2
π/2
−π/2


x
t
x − t = −π/2
x − t = x₀
η = 1
η = −1
sin(x − t)
x₀
x₀
x₀
x − t = π/2
x − t = x₀

Σχήμα 3





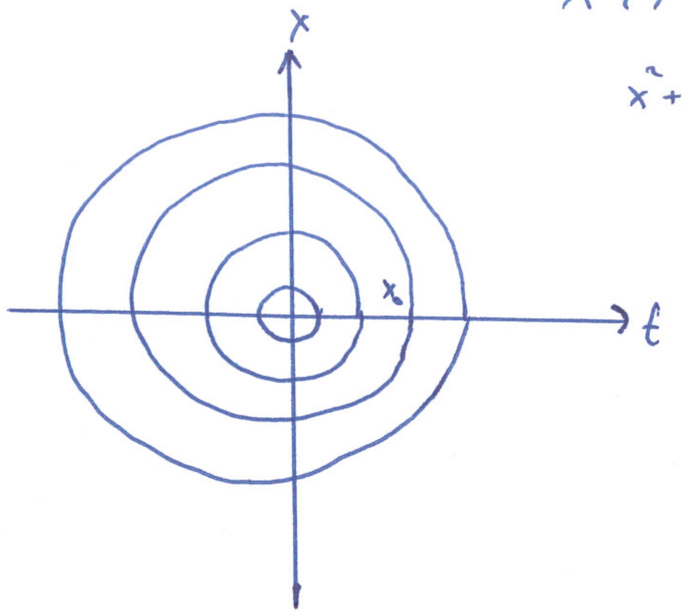
Χαρακτηριστικές

$x^2-t^2=x_0^2$

Σχήμα 4

Χαρ/κες

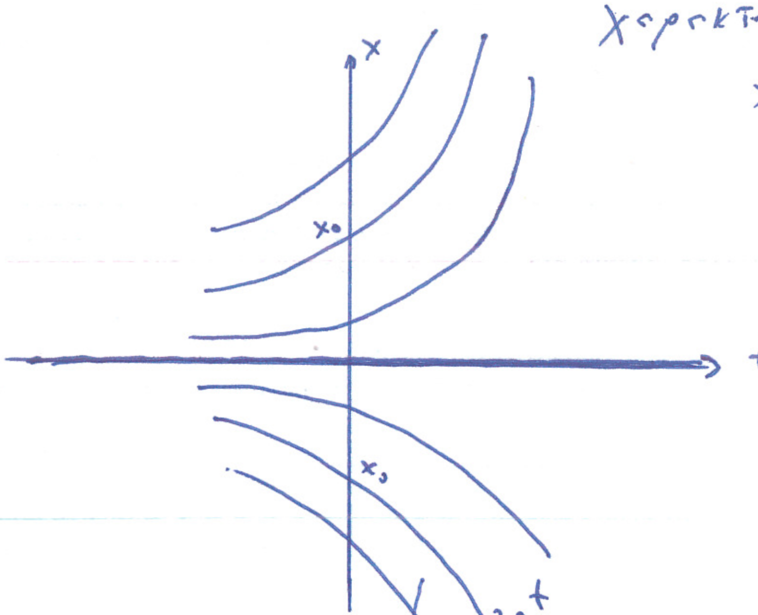
$x^2+t^2=x_0^2$



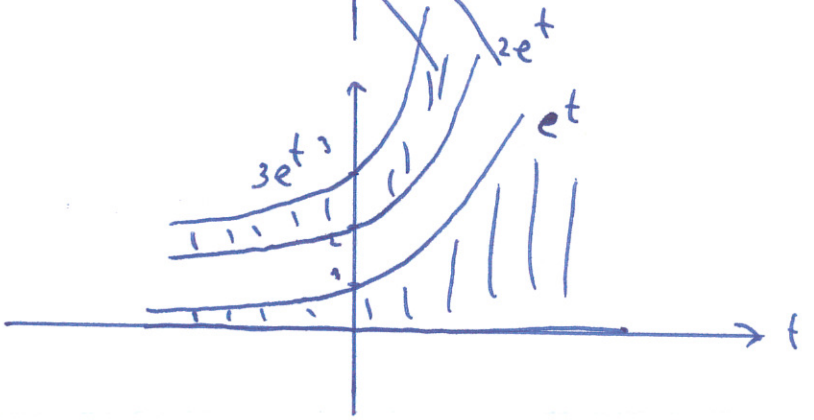
Σχήμα 5

χαρακτηριστικές

$x = x_0 e^t$



χωρίο



Φυλλάδιο ΜΔΕ 2.

1. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \quad a \neq 0 \ \text{ σταθερά}$$

ανάγεται με αντικατάσταση $y = x/a$ στην εξίσωση

$$u_{tt} - u_{yy} = f(t,y)$$

(συνεπώς χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε $a = 1$.)

Λύση. Κάνουμε αλλαγή μεταβλητών

$$(t,x) \quad \to \quad (t,y) \ \text{ όπου } \ y = y(x) = \frac{x}{a}.$$

Έχουμε

$$u(t,x) = u(t,y), \quad f(t,x) = f(t,y)$$

και απο τον κανόνα της αλυσίδας

$$u_x(t,x) = u_x(t,y) = u_y(t,y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}u_y(t,y),$$

$$u_{xx}(t,x) = \frac{1}{a}(u_y(t,y))_x = \frac{1}{a^2}u_{yy}(t,y).$$

Προφανώς

$$u_{tt}(t,x) = u_{tt}(t,y),$$

Αρα

$$u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) = u_{tt}(t,y) - u_{yy}(t,y) = f(t,y).$$

Η (μοναδική) λύση το προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \ \text{ στον } \ \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \ \text{ για } \ |x| < \infty.$$

δίνεται απο τον τύπο

$$u(t,x) =$$

$$\frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau$$

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = t + x \ \text{ στον } \ \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = x^3, \quad u_t(0,x) = \sin\, 2x \ \text{ για } \ |x| < \infty.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) = x^3, \quad \psi(x) = \sin 2x, \quad f(t,x) = t + x,$$

αρα

$$u(t,x) =$$

$$\frac{(x+t)^3 + (x-t)^3}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin 2\zeta d\zeta + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} (\tau+\zeta)d\zeta\Big)d\tau =$$

$$x^3 + 3t^2x - \frac{\cos 2(x+t) - \cos 2(x-t)}{4} +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \Big(\tau(2t-2\tau) + \frac{(x-t+\tau)^2 - (x+t-\tau)^2}{2}\Big)d\tau =$$

$$x^3 + 3t^2x + \frac{1}{2}\sin 2x\, \sin 2t + \int_0^t \Big(\tau(t-\tau) + (t-\tau)x\Big)d\tau =$$

$$x^3 + 3t^2x + \frac{1}{2}\sin 2x\, \sin 2t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2x}{2}.$$

Αυτή είναι η λύση, πράγματι

$$u_t = 6tx + \sin 2x \cos 2t + t^2/2 + tx, \quad u_{tt} = 6x - 2\sin 2x \sin 2t + t + x,$$
$$u_x = 3x^2 + 3t^2 + \cos 2x \sin 2t + t^2/2, \quad u_{xx} = 6x - 2\sin 2x \sin 2t.$$

3. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\text{ στον }\; \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \;\text{ για }\; |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \;\; \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \;\text{ για }\; x \in \mathbf{R} \setminus (0,1) \;\text{ και }\; \phi(x) > 0 \;\text{ για }\; x \in (0,1),$$

$$\psi(x) \equiv 0 \;\text{ στον }\; \mathbf{R}.$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) > 0$.

Λύση. Έχουμε οτι η μοναδική λύση το προβλήματος δίνεται απο τον τύπο $d'Alembert$ (με $\psi = 0$)

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2}$$

Αφου $\phi(\xi) \geq 0$ και $\psi(\xi) \equiv 0$ στον $\mathbf{R}$ και $\phi(\xi) \geq 0$ όταν $\xi \in (0,1)$ για να είναι η u γνησίως θετική πρέπει ή

$$x + t \in (0,1)$$

ή

$$x - t \in (0,1).$$

Δηλαδή το ζητούμενο χωρίο είναι (βλ. σχήμα 1)

$$\{(t,x) : \; 0 \leq x + t \leq 1 \cup 0 \leq x - t \leq 1\}$$

4. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \ \text{ για } \ |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \ \ \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R},$$

$$\psi(x) \equiv 0 \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R} \setminus (-1,0) \ \text{ και } \ \psi(x) > 0 \ \text{ για } \ x \in (-1,0).$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) \equiv 0$.

Λύση. Η μοναδική λύση το προβλήματος δίνεται απο τον τύπο $d'Alembert$ (με $\phi = 0$)

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta) d\zeta.$$

Αφου θέλουμε

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta) d\zeta \equiv 0$$

πρέπει στο διάστημα $(x-t, x+t)$ να μην περιέχονται σημεία όπου $\psi > 0$ δηλαδή

$$(x-t, x+t) \cap (-1,0) = \emptyset.$$

Πότε αυτό συμβαίνει?

1. Έστω

$$x - t \le x + t \quad \Leftrightarrow \quad t \ge 0.$$

Έχουμε ότι πρέπει

$$x - t \le x + t \le -1$$

ή

$$0 \le x - t \le x + t$$

Αρα για $t \ge 0$ το ζητούμενο χωρίο είναι (βλ. σχήμα 2α)

$$\{(t,x) : t \ge 0, \ \ x + t \le -1\} \cup \{(t,x) : t \ge 0, \ \ 0 \le x - t\}$$

2. Έστω τώρα

$$x + t \le x - t \quad \Leftrightarrow \quad t \le 0.$$

Έχουμε ότι πρέπει

$$x + t \le x - t \le -1$$

ή

$$0 \le x + t \le x - t$$

Αρα για $t \geq 0$ το ζητούμενο χωρίο είναι (βλ. σχήμα 2β)

$$\{(t,x) : t \leq 0, \;\; x - t \leq -1\} \cup \{(t,x) : t \leq 0, \;\; 0 \leq x + t\}$$

Δηλαδή το ζητούμενο χωρίο είναι (βλ. σχήμα 2)

$$\{(t,x) :\}$$

5. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \ \text{ για } \ |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \ \ \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R} \setminus (0,1) \ \text{ και } \ \phi(x) < 0 \ \text{ για } \ x \in (0,1),$$

$$\psi(x) \equiv 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R} \setminus (2,3) \ \text{ και } \ \psi(x) < 0 \ \text{ για } \ x \in (2,3),$$

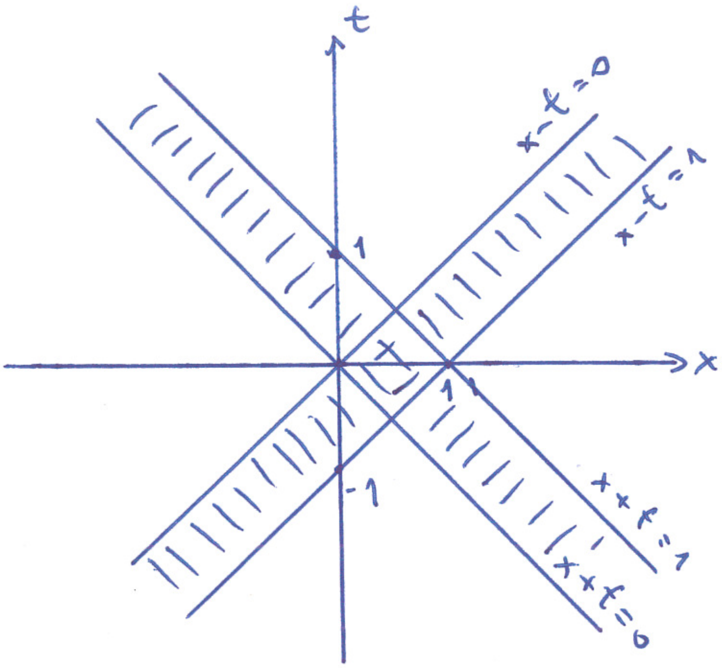
Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) < 0$.

Λύση. Η μοναδική λύση το προβλήματος δίνεται απο τον τύπο $d'Alembert$

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta) d\zeta.$$

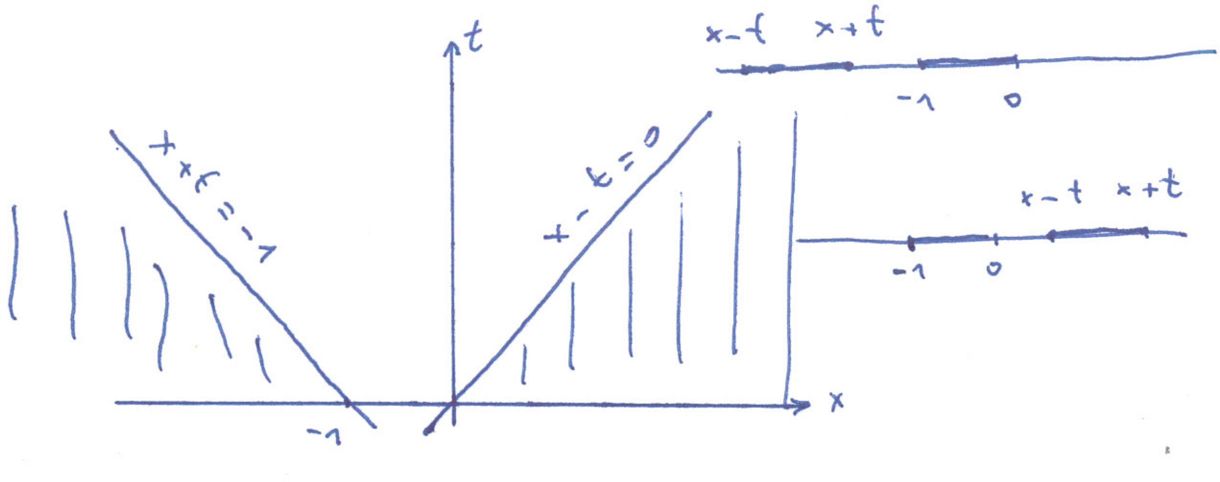
$$\{(t,x) :\}$$

σχήμα 1

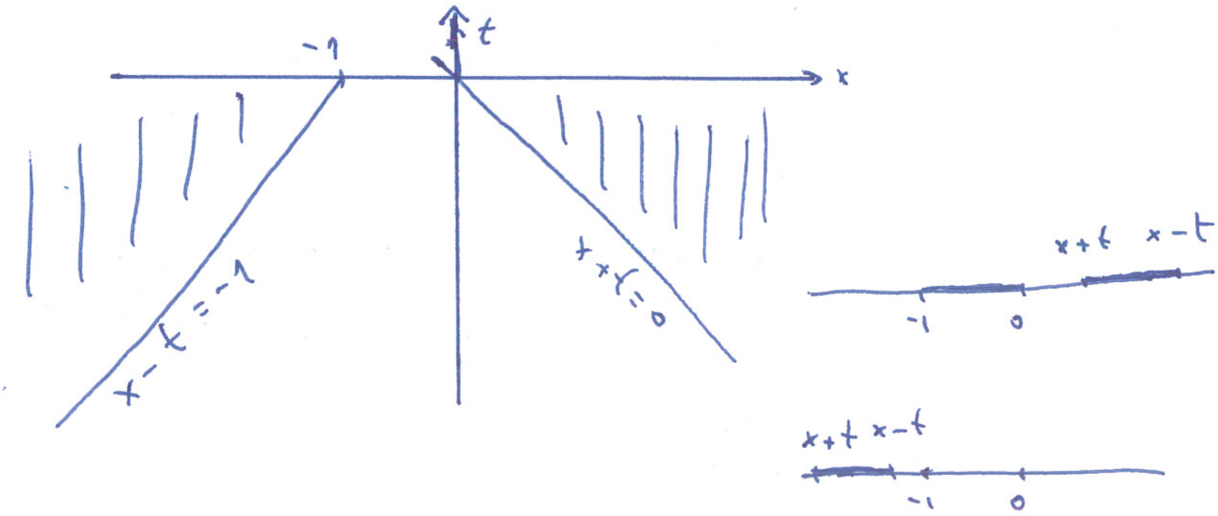


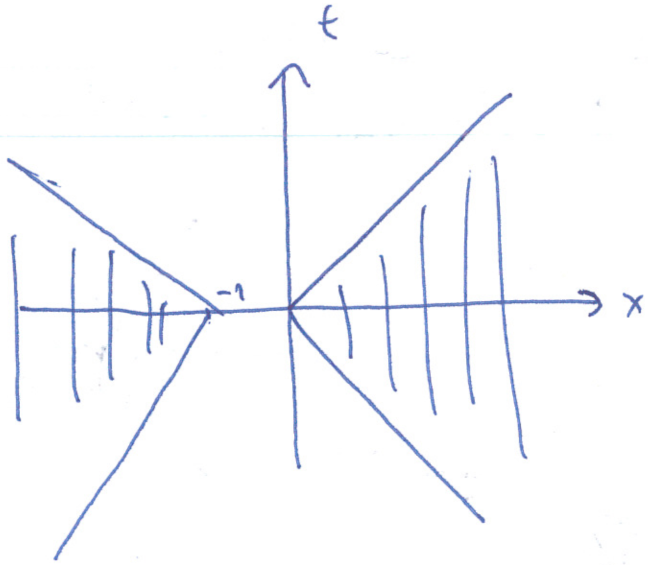
σχήμα 2

α)



β)





Φυλλάδιο ΜΔΕ 3.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων.

1.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ για } |t| < \infty, 0 < x < \pi$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad |t| < \infty,$$

$$u(0,x) = \sin\, x + \sin 2x \quad u_t(0,x) = \sin\, 2x + \sin 3x, \quad 0 < x < \pi.$$

Λύση. Εδω

$$\phi(x) = \sin\, x + \sin 2x, \quad \psi(x) = \sin\, 2x + \sin 3x.$$

θέλουμε να τις γράψουμε σε μορφή

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin kx, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx$$

όπου α_k και β_k συντελεστές $Fourier$ της ϕ και ψ αντίστοιχα.

Προφανώς

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_k = 0 \text{ για } k > 2,$$
$$\beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 1, \quad \beta_k = 0 \text{ για } k = 1 \text{ και για } k > 3.$$

Φυσικά μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $Fourier$ χρησιμοποιώντας τους τύπος

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(x) \sin kx dx,$$
$$\beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(x) \sin kx dx,$$

(για να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα).

Αρα αν ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx$$

για τον προσδιορισμό των

$$u_k(t)$$

θα έχουμε

$$u_1''(t) + u_1(t) = 0, \quad u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0,$$
$$u_2''(t) + 4u_2(t) = 0, \quad u_2(0) = 1, \quad u_2'(0) = 1,$$
$$u_3''(t) + 9u_3(t) = 0, \quad u_3(0) = 0, \quad u_3'(0) = 1,$$

και

$$u_k''(t) + k^2 u_3(t) = 0, \quad u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0.$$

Εχουμε

$$u_1(t) = \cos t, \quad u_2(t) = \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t,$$
$$u_3(t) = \frac{1}{3}\sin 3t \ \text{ και για } \ k > 3 \ \ u_k(t) = 0.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \cos t \sin x + (\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3t \sin 3x$$

Θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει τον τύπο

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k \, coskt + \frac{1}{k}\beta_k \, \sin kt]\sin kx.$$

με

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_k = 0 \ \text{ για } \ k > 2,$$
$$\beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 1, \quad \beta_k = 0 \ \text{ για } \ k = 1 \ \text{ και για } \ \ k > 3.$$

2.

$$u_{tt} - u_{xx} = 2\sin\, x + \sin 2x + \sin 3x \text{ για } |t| < \infty, 0 < x < \pi$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ \ |t| < \infty,$$

$$u(0,x) = 0 \ \ u_t(0,x) = 0 \ \ 0 < x < \pi.$$

Λύση. Εδω

$$\phi(x) = \psi(x) = 0$$

αρα

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \ \ \forall \ \ k.$$

Θέλουμε να γράψουμε το δευτερο μερος

$$f = 2\sin\, x + \sin 2x + \sin 3x$$

σε μορφή σειρας ως προς τα $\sin kx$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kx.$$

Προφανώς

$$f_1 = 2, \ \ f_2 = 1, \ \ f_3 = 1, \ \ f_k = 0 \text{ αν } k > 3.$$

Φυσικά μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές *Fourier* χρησιμοποιώντας τους τύπος

$$f_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f \sin kx dx,$$

(για να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα).

Αρα αν ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx$$

για τον προσδιορισμό των

$$u_k(t)$$

θα έχουμε

$$u_1''(t) + u_1(t) = 2, \ \ u_1(0) = 0, \ \ u_1'(0) = 0,$$
$$u_2''(t) + 4u_2(t) = 1, \ \ u_2(0) = 0, \ \ u_2'(0) = 0,$$
$$u_3''(t) + 9u_3(t) = 1, \ \ u_3(0) = 0, \ \ u_3'(0) = 0$$

και

$$u_k''(t) + k^2 u_3(t) = 0, \ \ u_k(0) = 0, \ \ u_k'(0) = 0.$$

Προφανώς

$$u_1(t) = 2 - 2\cos t, \ \ u_2(t) = \frac{1}{4}\big(1 - \cos 2t\big),$$

$$u_3(t) = \frac{1}{9}\big(1 - \cos 3t\big) \text{ και για } k > 3 \ \ u_k(t) = 0.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = (2-2\cos t)\sin x + \frac{1}{4}\big(1-\cos 2t\big)\sin 2x + \frac{1}{9}\big(1-\cos 3t\big)\sin 3x$$

Θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει τον τύπο

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\alpha_k coskt + \frac{1}{k}\beta_k \sin kt\Big]\sin kx +$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{k}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin k(t-\tau)\,d\tau\Big]\sin kx.$$

με

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \;\;\forall\;\; k,$$

$$f_1 = 2, \;\; f_2 = 1, \;\; f_3 = 1, \;\; f_k = 0 \;\; \text{αν} \;\; k > 3.$$

3.

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{2} \sin\, x \ \text{ για } \ |t| < \infty, 0 < x < \pi$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ \ |t| < \infty,$$

$$u(0,x) = \sin\, x + \sin 2x \ \ \ u_t(0,x) = \sin\, 2x + \sin 3x, \ \ 0 < x < \pi.$$

Λύση.
Παρομοίως

$$\alpha_1 = 1, \ \ \alpha_2 = 1, \ \ \alpha_k = 0 \ \text{ για } \ k > 2,$$
$$\beta_2 = 1, \ \ \beta_3 = 1, \ \ \beta_k = 0 \ \text{ για } \ k = 1 \ \text{ και για } \ \ k > 3.$$

και

$$f_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ και για} k > 1 \ \ f_k = 0.$$

Αρα αν ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx$$

για τον προσδιορισμό των

$$u_k(t)$$

θα έχουμε

$$u_1''(t) + u_1(t) = \frac{1}{2}, \ \ u_1(0) = 1, \ \ u_1'(0) = 0,$$
$$u_2''(t) + 4u_2(t) = 0, \ \ u_2(0) = 1, \ \ u_2'(0) = 1,$$
$$u_3''(t) + 9u_3(t) = 0, \ \ u_3(0) = 0, \ \ u_3'(0) = 1,$$

και

$$u_k''(t) + k^2 u_3(t) = 0, \ \ u_k(0) = 0, \ \ u_k'(0) = 0.$$

Προφανώς

$$u_1(t) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos t\big), \ \ u_2(t) = \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t,$$

$$u_3(t) = \frac{1}{3}\sin 3t \ \text{ και για } \ k > 3 \ \ u_k(t) = 0.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos t\big)\sin x + \big(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\big)\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3t \sin 3x.$$

4.

$$u_{tt} - u_{xx} = 2\big(1 - \frac{2x}{\pi}\big) \ \text{για} \ \ |t| < \infty, \ \ 0 < x < \pi,$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = t^2 \ \text{για} \ \ |t| < \infty,$$

$$u(0,x) = \sin\,x, \ \ u_t(0,x) = \sin\,x \ \text{για} \ \ 0 < x < \pi.$$

Λύση.
Μη μηδενικές συνοριακές συνθήκες!
Παίρνουμε

$$v(t,x) = u(t,x) - h(t,x) \ \text{με} \ h(t,x) = t^2$$

προφανώς

$$v(t,0) = v(t,\pi) = t^2 - t^2 = 0,$$

αρα για την $v(t,x)$ έχουμε μηδενικές συνοριακές συνθήκες. Επίσης έχουμε

$$v(0,x) = \sin x, \ \ v_t(0,x) = \sin x$$

και

$$v_{tt} - v_{xx} = u_{tt} - u_{xx} - \big(h_{tt} - h_{xx}\big) = 2\big(1 - \frac{2x}{\pi}\big) - 2 = -\frac{4x}{\pi}$$

δηλαδή για την $v(t,x)$ έχουμε

$$v_{tt} - v_{xx} = -\frac{4x}{\pi},$$
$$v(t,0) = 0, \ \ v(t,\pi) = 0,$$
$$v(0,x) = \sin x, \ \ v_t(0,x) = \sin x.$$

Αρα

$$\alpha_1 = 1, \ \ \alpha_k = 0 \ \text{αν} \ \ k > 1,$$

και

$$\beta_1 = 1, \ \ \beta_k = 0 \ \text{αν} \ \ k > 1.$$

Υπολογίζουμε τα f_k:

$$f_k = -\frac{8}{\pi^2}\int_0^\pi x\ \sin\ kxdx = -\frac{8}{k^2\pi^2}\big(\sin kx - kx\cos kx\big)\Big|_0^\pi.$$

αφου

$$\frac{1}{k^2}(\sin kx - kx\cos kx)' = x\sin kx$$

Συνεπώς

$$f_k = \begin{cases} \frac{-8}{k\pi}, & \text{για } \ k = 1,3,5,... \\ \frac{8}{k\pi}, & \text{για } \ k = 2,4,6,... \end{cases}$$

Ψάχνουμε τωρα την $v(t,x)$ σε μορφή

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin kx$$

και για τον προσδιορισμό των

$$v_k(t)$$

θα έχουμε

$$v_1''(t) + v_1(t) = -\frac{8}{\pi}, \ \ v_1(0) = 1, \ \ v_1'(0) = 1,$$

$$v_k''(t) + k^2 v_2(t) = \frac{8}{k\pi}, \ \ v_k(0) = 0, \ \ v_k'(0) = 0, \ \ \ k = 2,4,6,...$$

$$v_k''(t) + k^2 v_k(t) = -\frac{8}{k\pi}, \ \ v_k(0) = 0, \ \ v_k'(0) = 0, \ \ k = 3,5,7,...$$

Προφανώς

$$v_1(t) = -\frac{8}{\pi} + \frac{8+\pi}{\pi}\cos t + \sin t,$$

$$v_k(t) = \frac{8}{k^3\pi} - \frac{8}{k^3\pi}\cos kt \ \ \text{και για} \ \ k - \text{άρτια},$$

$$v_k(t) = -\frac{8}{k^3\pi} + \frac{8}{k^3\pi}\cos kt \ \ \text{και για} \ \ k > 1 - \text{περιττά}.$$

Αρα

$$v(t,x) = \big(\frac{8+\pi}{\pi}\cos t + \sin t - \frac{8}{\pi}\big)\sin x +$$

$$\sum_{k=2(k-\text{άρτια})}^{\infty} \frac{8}{k^3\pi}\big(1 - \cos kt\big)\sin kx +$$

$$\sum_{k=3(k-\text{περιττά})}^{\infty} \frac{8}{k^3\pi}\big(\cos kt - 1\big)\sin kx.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \big(\frac{8+\pi}{\pi}\cos t + \sin t - \frac{8}{\pi}\big)\sin x +$$
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 8}{k^3\pi}\big(1-\cos kt\big)\sin kx + t^2.$$

5.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ \text{για} \ |t| < \infty, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \ \text{για} \ |t| < \infty,$$

$$u(0,x) = \cos\, x + \cos 3x, \quad u_t(0,x) = 2\cos 2x + \cos 4x \ \text{για} \ 0 < x < \pi.$$

Λύση.
Ψάχνουμε τη λύση $u(t,x)$ σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos kx.$$

Έχουμε

$$\phi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx,$$
$$\psi(x) = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos kx,$$

αρα

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_k = 0, \quad k > 3,$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 1, \quad \beta_k = 0, \quad k > 4.$$

Συναπώς για να βρούμε τα $u_k(t)$ έχουμε

$$u_1''(t) + u_1(t) = 0, \quad u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0,$$
$$u_2''(t) + 4u_2(t) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 2,$$
$$u_3''(t) + 9u_3(t) = 0, \quad u_3(0) = 1, \quad u_3'(0) = 0,$$
$$u_4''(t) + 16u_4(t) = 0, \quad u_4(0) = 0, \quad u_4'(0) = 1,$$

και

$$u_k''(t) + k^2 u_3(t) = 0, \quad u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k > 4.$$

Προφανώς

$$u_1 = \cos t, \quad u_2 = \sin 2t, \quad u_3 = \cos 3t, \quad u_4 = \frac{1}{4}\sin 4t, \quad u_k = 0, \quad k > 4.$$

Αρα η λύση είναι

$$u(t,x) = \cos t \cos x + \sin 2t \cos 2x + \cos 3t \cos 3x + \frac{1}{4} \sin 4t \cos 4x.$$

6.

$$u_{tt} - u_{xx} = \cos\, x + \cos 2x + \cos 3x \ \text{ για } \ |t| < \infty, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \ \text{ για } \ |t| < \infty,$$

$$u(0,x) = \cos\, x, \quad u_t(0,x) = 0 \ \text{ για } \ 0 < x < \pi.$$

Φυλλάδιο 4.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων.

1.

$$u_t - u_{xx} = t^2 \sin\, x \;\text{ για }\; t > 0, \;\; 0 < x < \pi,$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \;\text{ για }\; t > 0,$$

$$u(0,x) = \sin\, 2x \;\text{ για }\; 0 < x < \pi.$$

Λύση. Εδω

$$\phi(x) = \sin 2x, \quad f(t,x) = t^2 \sin x.$$

Προφανώς

$$\alpha_2 = 1, \quad \alpha_k = 0 \;\text{ για }\; k \neq 2$$

και

$$f_1(t) = t^2, \quad f_k = 0 \;\text{ για }\; k > 1.$$

Αρα αν ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx$$

για τον προσδιορισμό των

$$u_k(t)$$

θα έχουμε

$$u_1'(t) + u_1(t) = t^2, \quad u_1(0) = 0,$$

$$u_2'(t) + 4u_2(t) = 0, \quad u_2(0) = 1,$$

και

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \quad u_k(0) = 0 \;\; k > 2.$$

Προφανώς

$$u_1(t) = t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t},$$

$$u_2(t) = e^{-4t},$$

$$u_k(t) = 0, \quad k > 2.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \left(t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t}\right)\sin x + e^{-4t}\sin 2x.$$

Θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει τον τύπο (*)

$$(*)\ \ u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\int_0^t f_k(\tau)e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau}d\tau \sin\frac{k\pi}{l}x$$

με

$$\alpha_2 = 1,\ \ \alpha_k = 0 \ \text{ για } \ k \neq 2,\ \ f_1(t) = t^2,\ \ f_k = 0 \ \text{ για } \ k > 1.$$

Πράγματι απο (*) έχουμε

$$e^{-4t}\sin 2x + e^{-t}\int_0^t \tau^2 e^{\tau} d\tau\ \sin x =$$

$$e^{-4t}\sin 2x + e^{-t}\left(t^2e^t - 2te^t + 2e^t - 2\right)\sin x =$$

$$\left(t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t}\right)\sin x + e^{-4t}\sin 2x.$$

2.

$$u_t - u_{xx} = 2\sin\, x \cos\, x \;\; \text{για} \;\; t > 0, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \;\; \text{για} \;\; t > 0,$$
$$u(0,x) = \sin\, x + \sin 3x \;\; \text{για} \;\; 0 < x < \pi.$$

Λύση. Προφανώς

$$f(t,x) = 2\sin\, x \cos\, x = \sin 2x,$$

$$\phi(x) = \sin x + \sin 3x.$$

Δηλαδή

$$\alpha_1 = 1, \;\; \alpha_3 = 1, \;\; \alpha_k = 0 \;\; \text{για} \;\; k \neq 1, 3$$

και

$$f_2(t) = 1, \;\; f_k = 0 \;\; \text{για} \;\; k \neq 2.$$

Αρα αν ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx$$

για τον προσδιορισμό των

$$u_k(t)$$

θα έχουμε

$$u_1'(t) + u_1(t) = 0, \;\; u_1(0) = 1,$$

$$u_2'(t) + 4u_2(t) = 1, \;\; u_2(0) = 0,$$

$$u_3'(t) + 9u_3(t) = 0, \;\; u_3(0) = 1,$$

και

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \;\; u_k(0) = 0, \;\; k > 3.$$

Εχουμε

$$u_1(t) = e^{-t}, \quad u_2(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{-4t}),$$

$$u_3(t) = e^{-9t}, \quad u_k(t) = 0, \;\; k > 3.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = e^{-t}\sin x + \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})\sin 2x + e^{-9t}\sin 3x.$$

Προφανώς μπορούμε και εδω να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (*)

3.

$$u_t - u_{xx} = \frac{t^2}{2}\cos\, x \;\; \text{για} \;\; t > 0, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \;\; \text{για} \;\; t > 0,$$
$$u(0,x) = \cos\, x \;\; \text{για} \;\; 0 < x < \pi.$$

Λύση.

$$\phi(x) = \cos x, \quad f(t,x) = \frac{t^2}{2}\cos x.$$

Αρα αν ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\cos kx$$

για τον προσδιορισμό των

$$u_k(t)$$

θα έχουμε

$$u_1'(t) + u_1(t) = t^2/2, \quad u_1(0) = 1,$$

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \quad u_k(0) = 0, \quad k \neq 1.$$

Εχουμε

$$u_1(t) = \frac{t^2}{2} - t + 1,$$

$$u_k(t) = 0, \quad k \neq 1.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \big(\frac{t^2}{2} - t + 1\big)\cos x.$$

Προφανώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (**):

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} cos\frac{k\pi}{l}x + \int_0^t f_0(\tau)d\tau +$$

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \int_0^t f_k(\tau) e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau} d\tau cos\frac{k\pi}{l}x.$$

με

$$a_1 = 1, \quad f_1 = t^2/2$$

$$a_k = f_k = 0, \text{ γαι } k \neq 1.$$

$$e^{-t}\cos x + e^{-t}\frac{1}{2}\int_0^t \tau^2 e^{\tau} d\tau \cos x =$$

$$e^{-t}\cos x + \frac{1}{2}e^{-t}\cos x\big(t^2e^t - 2te^{-t} + 2e^t - 2\big) =$$

$$\big(\frac{t^2}{2} - t + 1\big)\cos x.$$

4.

$$u_t - u_{xx} = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{x^2}{2\pi} - \frac{t}{\pi}, \text{ για } t > 0, \ \ 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = 0, \ \ u_x(t,\pi) = t \text{ για } t > 0,$$
$$u(0,x) = \frac{1}{2}\cos x \text{ για } 0 < x < \pi.$$

Λύση. Μη μηδενικές συνοριακές συνθήκες!

Προφανώς η

$$h(t,x) = \frac{x^2}{2\pi} t$$

είναι τ.ω.

$$h_x(t,x) = \frac{x}{\pi} t, \ \ h_x(t,0) = 0, \ \ h_x(t,\pi) = t.$$

Άρα για

$$v(t,x) = u(t,x) - h(t,x)$$

εχουμε:

$$v(0,x) = \frac{1}{2}\cos x,$$

$$v_x(t,0) = 0, \ \ v_x(t,\pi) = 0$$

και

$$v_t - v_{xx} = u_t - u_{xx} - \big(h_t - h_{xx}\big) =$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x + \frac{x^2}{2\pi} - \frac{t}{\pi} - \big(\frac{x^2}{2\pi} - \frac{t}{\pi}\big) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Δηλαδή

$$v_t - v_{xx} = \cos 2x.$$

Αρα αν ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \cos kx$$

για τον προσδιορισμό των

$$v_k(t)$$

θα έχουμε

$$v_1'(t) + v_1(t) = 0, \ \ u_1(0) = 1/2,$$

$$v_2'(t) + 4v_2(t) = 1, \ \ v_2(0) = 0,$$

$$v_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \quad v_k(0) = 0, \quad k \neq 1, 2.$$

Προφανώς

$$v_1(t) = \frac{1}{2} e^{-t},$$

$$v_2(t) = \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big),$$

$$v_k(t) = 0, \quad k \neq 1, 2.$$

Αρα

$$v(t, x) = \frac{1}{2} e^{-t} \cos x + \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big) \cos 2x.$$

Προφανώς μπορούμε και εδω να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (**).

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t, x) = \frac{1}{2} e^{-t} \cos x + \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big) \cos 2x + \frac{x^2}{2\pi} t.$$

Φυλλάδιο 5.

1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος *Dirichlet*:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ στο } \ r = \sqrt{x^2 + y^2} < R,$$

$$u\Big|_{r=R} = 1 + 2\sin\theta\,\cos\theta.$$

Λύση. Έχουμε

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\big),$$

προφανώς

$$g = 1 + \sin 2\theta$$

αρα

$$a_0 = 2, \quad a_k = 0, \quad k > 0, \quad b_2 = 1, \quad b_k = 0, \quad k \neq 2.$$

Συνεπώς

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \big(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\big) =$$

$$1 + \frac{r^2}{R^2} \sin 2\theta.$$

Οι

$$r^k \sin k\theta, \quad r^k \cos k\theta$$

είναι αρμονικές (ως συναρτήσεις των x, y) $\forall k = 0, 1, 2, \ldots.$

2. α.) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους

$$(r\,\cos\theta)_x, \quad (r\,\cos\theta)_y$$

$$(r\,\cos\theta)_{xx}, \quad (r\,\cos\theta)_{yy}$$

όπου

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \ \ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

β.) Αποδείξτε οτι η συνάρτηση $r\,\cos\theta$ είναι αρμονική (ως συνάρτηση των x, y).

Λύση. Προφανώς

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = x(x^2+y^2)^{-1/2}, \\ r_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = y(x^2+y^2)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{1}$$

και

$$r_{xx} = y^2(x^2+y^2)^{-3/2}, \quad r_{yy} = x^2(x^2+y^2)^{-3/2}$$

Παρατηρούμε οτι

$$r_{xx} + r_{yy} = \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} \tag{2}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{-y}{x^2} = -y(x^2+y^2)^{-1}, \\ \theta_y &= \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x} = x(x^2+y^2)^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

και

$$\theta_{xx} = 2xy(x^2+y^2)^{-2}, \quad \theta_{yy} = -2xy(x^2+y^2)^{-2}.$$

Αρα

$$\theta_x^2 + \theta_y^2 = \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad r\big(\theta_x^2+\theta_y^2\big) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}. \tag{4}$$

και

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0 \tag{5}$$

Επίσης απο (1) και (3) έχουμε

$$r_x\theta_x + r_y\theta_y = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0. \tag{6}$$

Υπολογίζουμε τη δευτερη παράγωγο της $r\cos\theta$ ως προς x:

$$(r\cos\theta)_{xx} = \big(r_x\cos\theta - r\theta_x\sin\theta\big)_x =$$

$$r_{xx}\cos\theta - r_x\theta_x\sin\theta - r_x\theta_x\sin\theta - r\theta_{xx}\sin\theta - r\theta_x^2\cos\theta =$$

$$\cos\theta\big[r_{xx} - r\theta_x^2\big] - \sin\theta\big[2r_x\theta_x + r\theta_{xx}\big].$$

και ως προς y:

$$(r\cos\theta)_{yy} = \big(r_y\cos\theta - r\theta_y\sin\theta\big)_y =$$

$$r_{yy}\cos\theta - r_y\theta_y\sin\theta - r_y\theta_y\sin\theta - r\theta_{yy}\sin\theta - r\theta_y^2\cos\theta =$$

$$\cos\theta\big[r_{yy} - r\theta_y^2\big] - \sin\theta\big[2r_y\theta_y + r\theta_{yy}\big].$$

Παρατηρούμε οτι

$$(r\cos\theta)_{xx} + (r\cos\theta)_{yy} =$$

$$\cos\theta\big[r_{xx} + r_{yy} - r(\theta_x^2 + \theta_y^2)\big] - \sin\theta\big[2r_x\theta_x + 2r_y\theta_y + r(\theta_{xx} + \theta_{yy})\big].$$

Απο (2) και (4) έχουμε

$$r_{xx} + r_{yy} - r(\theta_x^2 + \theta_y^2) = 0,$$

επίσης απο (5) και (6)

$$2r_x\theta_x + 2r_y\theta_y + r(\theta_{xx} + \theta_{yy}) = 0$$

Συνεπώς η $r\cos\theta$ είναι αρμονική (ως συνάρτηση των x, y).

Παρομοίως και η $r\sin\theta$, παρομοίως και οι $r^k\sin k\theta$, $r^k\cos k\theta$.

3. Για ποιες τιμές της παραμέτρου α το πρόβλημα

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ στο } \ r = \sqrt{x^2 + y^2} < R$$

και

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \alpha + \cos\theta.$$

έχει λύση ? Προσδιορίστε τη λύση αυτη.

Λύση. Για να υπάρχει λύση πρέπει

$$\int_0^{2\pi} (\alpha + \cos\theta) d\theta = 0.$$

Εχουμε

$$\int_0^{2\pi} (\alpha + \cos\theta) d\theta = 2\pi\alpha$$

άρα

$$\alpha = 0.$$

Προφανώς στη σειρά

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\big),$$

έχουμε

$$a_1 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 1, \quad b_k = 0.$$

Αρα η λύση είναι

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{kR^{k-1}} \big(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\big) =$$

$$r \, \cos\theta.$$

4. Να βρεθέι η λύση του προβλήματος *Dirichlet*:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ στο } (0,\pi) \times (0,\pi),$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \text{ για } y \in [0,\pi],$$

$$u(x,0) = \sin\, x + 2\sin 2x, \quad u(x,\pi) = \sin\, x \text{ για } x \in [0,\pi].)$$

Λύση.

$$\phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_k = 0 \text{ για } k > 2,$$

$$\phi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad \Rightarrow \quad b_1 = 1, \quad b_k = 0 \text{ για } k > 1.$$

Αρα ή λύση είναι

$$u(x,y) =$$

$$\Big(\frac{1-e^{\pi}}{1-e^{2\pi}} e^{y} + \frac{1-e^{\pi}}{1-e^{2\pi}} e^{\pi} e^{-y}\Big) \sin\, x + \Big(\frac{2}{1-e^{4\pi}} e^{2y} - \frac{2e^{2\pi}}{1-e^{4\pi}} e^{2\pi} e^{-2y}\Big) \sin\, 2x$$