Φυλλάδιο 2

4/2023

1. Να βρεθεί το ακρότατο του συναρτησοειδούς

$$J(y) = \int_0^{\ln 2} \left(y''^2 + 2y'^2 + y^2 + f(x)\right) dx$$

με περιορισμό

$$y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1 \;\; y(\ln 2) = 2, \;\; y'(\ln 2) = 2.$$

Εδώ $f(x)$ μια τυχαία ομαλή συνάρτηση.

2. Να βρεθεί το ακρότατο του συναρτησοειδούς

$$J(y_1, y_2) = \int_0^2 F(y_1', y_2') dx$$

με περιορισμό

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \;\; y_1'(2) = 2 \;\; y_2'(2) = 4.$$

Υποθέτουμε ότι για την $F(p, q)$ ισχύει

$$F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 \neq 0.$$

3. Να βρεθεί το ακρότατο του συναρτησοειδούς

$$J(u) = \int_\Omega \left(u(u_x^2 + u_y^2)\right) dxdy.$$

4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $Euler - Lagrange$ για το

$$J(y) = \int_a^b L(y, y', y'') dx$$

μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$L - y'\left(L_{y'} - \frac{d}{dx} L_{y''}\right) - y'' L_{y''} = \text{Σταθερά}.$$

Υποθέτουμε ότι $y' \not\equiv 0$.

5. Να βρεθεί το ακρότατο του συναρτησοειδούς

$$J(u) = \int_\Omega \left(u_t^2 - u_x^2)\right) dtdx.$$