

### Φυλλάδιο 3

5/2023

1. Να προσδιοριστεί η φυσική συνοριακή συνθήκη στο  $x = b$  για το πρόβλημα

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx + G(y(b)), \quad y(a) = A,$$

εδώ  $G$  δεδομένη ομαλή συνάρτηση.

2. Να βρεθεί το ακρότατο για το πρόβλημα

$$J(y) = \int_1^e \left( \frac{1}{2} x^2 y'^2 - \frac{1}{8} y^2 \right) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(e) - \text{μη προσδιορισμένο.}$$

3. Να βρεθεί το ακρότατο για το πρόβλημα

$$J(y) = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} y'^2 + y' y + y' + y \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) - \text{μη προσδιορισμένο.}$$

4. Έστω

$$J(u) = \int \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

όπου  $u = u(x, y)$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ .

Να βρεθεί η φυσική συνοριακή συνθήκη στο  $\partial\Omega$ .

5. Διαπιστώστε ότι το συναρτησοειδές

$$J(y) = \int_0^2 (e^{y'} + 3) dx$$

με περιορισμό  $y(0) = 0$ ,  $y(2) = 2$ , λαμβάνει το ισχυρό του ελάχιστο στη συνάρτηση  $y(x) = x$ .

6. Ποιά από τις συναρτήσεις  $y(x) = 0$ ,  $y(x) = x(1 - x)$ , δίνει το ασθενές ελάχιστο του συναρτησοειδούς

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 - y y'^3) dx$$

με περιορισμό  $y(0) = y(1) = 0$ .