

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

πρόχειρες σημειώσεις για μεταπτυχιακό μάθημα
2017

Άλλης Τερσένοβ

Περιεχόμενα	1
Κεφάλαιο I. Εξισώσεις ελλειπτικού τύπου	
§1. Βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων	2
§2. Πρόβλημα <i>Dirichlet</i> για την εξίσωση <i>Laplace</i> για μπάλα	9
§3. Άλλα συνοριακά προβλήματα	16
§4. Πρόβλημα <i>Dirichlet</i> για την εξίσωση <i>Laplace</i> σε γενικά χωρία	18
§5. Πρόβλημα <i>Dirichlet</i> για την εξίσωση <i>Poisson</i> σε γενικά χωρία ...	25
§6. Αρχή του μεγίστου (ασθενής μορφή)	28
§7. Αρχή του μεγίστου (ισχυρή μορφή)	33
§8. <i>A priori</i> εκτιμήσεις	37
§9. Μερικά στοιχεία απο την Συναρτησιακή Ανάλυση	40
§10. <i>A priori</i> εκτιμήσεις <i>Schauder</i> , πρόβλημα <i>Dirichlet</i> στην γενική περίπτωση	45
§11. Μοναδικότητα της λύσης για άλλα συνοριακά προβλήματα	48
§12. Μη γραμμικές εξισώσεις	50
Κεφάλαιο II. Εξισώσεις παραβολικού τύπου	
§1. Αρχή του μεγίστου για παραβολικές εξισώσεις	55
§2. Πρόβλημα <i>Cauchy</i>	61
§3. Εκτιμήσεις <i>Schauder</i> , πρόβλημα <i>Cauchy – Dirichlet</i>	65
Ασκήσεις	66
Κεφάλαιο III. Εξισώσεις υπερβολικού τύπου	
§1. Πρόβλημα <i>Cauchy</i> για την κυματική εξίσωση	68
§2. Πρόβλημα <i>Cauchy</i> για την εξίσωση θερμότητας <i>vs</i> πρόβλημα <i>Cauchy</i> για την κυματική εξίσωση	77
§3. Πρόβλημα <i>Cauchy – Dirichlet</i> για κυματική εξίσωση	79
Ασκήσεις	81
Κεφάλαιο IV. Μη γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξεως	
§1. Πρόβλημα <i>Cauchy</i> για την εξίσωση <i>Hopf</i>	82
§2. Μη ομογενείς εξισώσεις πρώτης τάξης	86
Ασκήσεις	88

Κεφάλαιο I. Εξισώσεις ελλειπτικού τύπου

§1 Βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων

Έστω $u(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ μια συνάρτηση ($x = (x_1, \dots, x_n)$). Εξίσωση *Laplace* ονομάζουμε την εξίσωση

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0.$$

Μια $C^2(\Omega)$ συνάρτηση $u(x)$ που ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace* στο χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ονομάζεται *αρμονική συνάρτηση* σε αυτό το χωρίο.

Πάντα θα υποθέτουμε ότι στο χωρίο Ω ισχύει το θεώρημα της απόκλισης

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \left(= \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} ds \right)$$

εδώ $\partial\Omega$ το προσανατολισμένο σύνορο του χωρίου Ω και το $\boldsymbol{\nu}$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$, $\mathbf{F}(x)$ ένα αρκετά ομαλό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n F_{ix_i}.$$

Έστω οι συναρτήσεις $u, v \in C^2(\Omega)$, τότε έχουμε

$$(1.1) \quad v \Delta u - u \Delta v = \operatorname{div} [v \nabla u - u \nabla v]$$

ή

$$v \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} - u \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^n (v u_{x_i} - u v_{x_i})_{x_i}$$

και

$$(1.2) \quad \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u = \operatorname{div}(v \nabla u)$$

ή

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i} + v \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^n (v u_{x_i})_{x_i}.$$

Θυμίζουμε ότι $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$, $\nabla v = (v_{x_1}, \dots, v_{x_n})$.

Ολοκληρώνοντας την σχέση (1.1) παίρνουμε

$$(1.3) \quad \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) ds,$$

Πράγματι, αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης για

$$\mathbf{F} = v \nabla u - u \nabla v = (v u_{x_1} - u v_{x_1}, \dots, v u_{x_n} - u v_{x_n}),$$

προφανώς

$$\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} = v \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} - u \nabla v \cdot \boldsymbol{\nu} = v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}.$$

Ολοκληρώνοντας την (1.2) παίρνουμε

$$(1.4) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds.$$

Οι τύποι (1.3) και (1.4) ονομάζονται τύποι *Green*. Για να είναι η διαδικασία που εφαρμόσαμε "νόμιμη" προφανώς πρέπει επιπλέον να ζητήσουμε από τις συναρτήσεις u, v να είναι $C^1(\bar{\Omega})$.

Εισάγουμε την συνάρτηση

$$(1.5) \quad E(x, \xi) = E(|x - \xi|) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x - \xi|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x - \xi|, & n = 2 \end{cases}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, ω_n είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας στον \mathbf{R}^n και

$$|x - \xi| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Η συνάρτηση E ονομάζεται *θεμελιώδης λύση* της εξίσωσης *Laplace*. Για $x \neq \xi$ η E είναι αρμονική ως προς x και ως προς ξ , δηλαδή

$$\Delta_x E = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n E_{x_i x_i} = 0,$$

$$\Delta_\xi E = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n E_{\xi_i \xi_i} = 0.$$

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης *Laplace* προκύπτει π.χ. με τον εξής τρόπο. Έστω ξ αυθαίρετο (σταθεροποιημένο) σημείο στον \mathbf{R}^n και $r = |x - \xi|$. Ψάχνουμε ακτινικά συμμετρική λύση E της εξίσωσης *Laplace* (δηλαδή αυτή που εξαρτάται μόνο από το r). Προφανώς

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E(r) = E_r r_{x_i} = E_r \frac{x_i - \xi_i}{r}$$

και

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} E(r) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(E_r \frac{x_i - \xi_i}{r} \right) = E_{rr} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{r^2} + E_r \frac{r^2 - (x_i - \xi_i)^2}{r^3}.$$

Άρα

$$\Delta E \equiv E_{rr} + \frac{n-1}{r} E_r.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$E_{rr} + \frac{n-1}{r} E_r = 0$$

για $n = 2$ είναι η

$$c_0 \ln r + c_1$$

και για $n > 2$ είναι η

$$c_0 r^{2-n} + c_1$$

(c_0, c_1 - αυθαίρετες σταθερές). Παίρνοντας $c_1 = 0$ και

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \text{ για } n = 2, \quad c_0 = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \text{ για } n > 2,$$

καταλήγουμε στη σχέση (1.5).

Λήμμα 1.1. Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, για κάθε $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ισχύει

$$(1.6) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} - E(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} \right] ds + \int_{\Omega} \Delta_\xi u(\xi) E(x, \xi) d\xi.$$

Πόρισμα. Αν επιπλέον η u είναι αρμονική, τότε

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} - E(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} \right] ds.$$

Απόδειξη (του Λήμματος 1.1). Έστω x αυθαίρετο σημείο του χωρίου Ω , υπάρχει μπάλα $B_\varepsilon = \{|x - \xi| < \varepsilon\}$ τ.ω. $B_\varepsilon \subset \Omega$. Έστω $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon$. Προφανώς $E(x, \xi)$ είναι αρμονική στο Ω_ε ως προς το ξ . Στην σχέση (1.3) ως πάρουμε

$$v = E(x, \xi), \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$$

και αντί για Ω το Ω_ε , τότε, αφού $\Delta_\xi E = 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} E(x, \xi) \Delta_\xi u(\xi) d\xi &= \int_{\partial\Omega} \left(E(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} - u(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \right) ds - \\ &\quad \int_{\partial B_\varepsilon} \left(E(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} - u(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \right) ds, \end{aligned}$$

αφού $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon^-$. Το πρόσημο " - " μπροστά στο ολοκλήρωμα ως προς την επιφάνεια ∂B_ε εμφανίζεται διότι παίρνουμε το ν_ξ να είναι εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο για το χωρίο B_ε και όχι Ω_ε (προφανώς $f_\zeta = -f_\eta$ αν $\eta = -\zeta$). Την τελευταία σχέση την ξαναγράφουμε ως εξής

$$(1.7) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} E(x, \xi) \Delta_\xi u(\xi) d\xi + \int_{\partial\Omega} \left(u(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} - E(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} \right) ds = \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} - E(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} \right) ds, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ο σκοπός μας είναι να περάσουμε στο όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$. Η $E(x, \xi)$ είναι ολοκληρώσιμη στο Ω αρα

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} E(x, \xi) \Delta_\xi u(\xi) d\xi = \int_{\Omega} E(x, \xi) \Delta_\xi u(\xi) d\xi.$$

Για να αποδείξουμε την (1.6) πρέπει να δείξουμε ότι το αριστερό μέρος της (1.7) καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ θα μας δώσει $u(x)$.

Πάνω στην σφαίρα $|x - \xi| = \varepsilon$ (δηλαδή στο ∂B_ε) έχουμε

$$E(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n} \varepsilon^{2-n}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon, & n = 2 \end{cases}$$

και

$$\frac{\partial E}{\nu_\xi} = \frac{dE}{d\varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n} \varepsilon^{1-n}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi\varepsilon}, & n = 2 \end{cases}$$

Εστω $n \geq 3$. Το αριστερό μέρος της (1.7) γράφεται ως

$$\frac{1}{\omega_n} \varepsilon^{1-n} \int_{|x-\xi|=\varepsilon} u(\xi) ds - \frac{1}{(2-n)\omega_n} \varepsilon^{2-n} \int_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} ds.$$

Λόγω της συνέχειας της u στο $x = \xi$ και λαμβάνοντας υπ όψιν το γεγονός ότι

$$\int_{|x-\xi|=\varepsilon} ds = \omega_n \varepsilon^{n-1}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} u(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\omega_n} \varepsilon^{1-n} \int_{|x-\xi|=\varepsilon} u(\xi) ds \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\omega_n} \varepsilon^{1-n} u(\xi^*) \int_{|x-\xi|=\varepsilon} ds \right) = u(x) \end{aligned}$$

όπου $\xi^* \in \{|x - \xi| = \varepsilon\}$ αρα $\xi^* \rightarrow x$ όταν $\varepsilon \rightarrow 0$ (εδώ χρησιμοποιούμε το Θεώρημα της Μέσης τιμής για ολοκληρώματα).

Παρομοίως

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} E(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2-n)\omega_n} \varepsilon^{2-n} \int_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} ds \right) = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2-n)\omega_n} \varepsilon^{2-n} \frac{\partial u(\xi^*)}{\partial \nu_\xi} \int_{|x-\xi|=\varepsilon} ds \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2-n} \varepsilon \frac{\partial u(\xi^*)}{\partial \nu_\xi} = 0 \end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε στην (1.6).

Η περίπτωση $n = 2$ αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

□

Παρατήρηση. Το εμβαδόν S_n της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας ρ στον \mathbf{R}^n δίνεται απο τον τύπο

$$S_n = n \mathcal{G}_n \rho^{n-1},$$

ο όγκος V_n της μπάλας ακτίνας ρ στον \mathbf{R}^n δίνεται απο τον τύπο

$$V_n = \mathcal{G}_n \rho^n,$$

όπου η σταθερά \mathcal{G}_n ορίζεται μέσω της Γ συνάρτησης

$$\mathcal{G}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Π.χ.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad \Gamma(3) = 2 \dots$$

Προφανώς (για μοναδιαία σφαίρα) $\omega_n = n \mathcal{G}_n$, για $n = 2, 3$ έχουμε $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$.

Θα αποδείξουμε τώρα μερικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων.

I. Αν $u \in C^1(\bar{\Omega})$ είναι αρμονική, τότε

$$(1.8) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0,$$

εδώ ν - μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από την (1.3) αν θα πάρουμε $v \equiv 1$.

II. Πρώτο Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Έστω u αρμονική στο Ω και $x \in \Omega$ αυθαίρετο σημείο. Τότε $\forall \rho \in (0, d)$, όπου το $d = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ είναι (απόσταση του x από το σύνορο του Ω), ισχύει

$$(1.9) \quad u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} u ds.$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν στην (1.6) θα πάρουμε $\partial\Omega = \{|x - \xi| = \rho\}$, τότε η συνάρτηση E θα είναι σταθερή πάνω στο $\partial\Omega$ και λόγω της (1.8) θα έχουμε

$$u(x) = \int_{|x-\xi|=\rho} u \frac{\partial E}{\partial \nu} ds.$$

Για $|x - \xi| = \rho$ επίσης έχουμε

$$\frac{\partial E}{\partial \nu} = \frac{dE}{d\rho} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n} \rho^{1-n}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi\rho}, & n = 2 \end{cases}$$

Άρα αποδείξαμε την (1.9).

Για $n = 2$ ($x = (x, y)$) την σχέση (1.9) μπορούμε να την γράψουμε και ως εξής

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos\phi, y + \rho \sin\phi) d\phi.$$

Πράγματι για $n = 2$ η (1.9) γράφεται ως εξής

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \rho^2} u(\xi, \eta) ds,$$

θέτοντας

$$\xi = x + \rho \cos\phi, \quad \eta = y + \rho \sin\phi, \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

και λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $ds = \rho d\phi$ παίρνουμε το ζητούμενο.

□

III. Αρχή του Μεγίστου. Η αρμονική στο Ω συνάρτηση u δεν μπορεί να πάρει ούτε την μέγιστη ούτε την ελάχιστη τιμή της στα εσωτερικά σημεία του Ω αν δεν είναι σταθερή.

Απόδειξη. Έστω ότι στο $x_0 \in \Omega$ η u λαμβάνει το μέγιστό της $u(x_0) = M$. Έχουμε

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x_0-\xi|=\rho} u ds \quad \forall \rho > 0 \quad \text{αν} \quad |\xi - x_0| \leq \rho \subset \Omega.$$

Παίρνουμε ένα τυχαίο $\rho \in (0, d)$ ($d = \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$). Θα αποδείξουμε ότι $u \equiv M$ στο $\{|x_0 - \xi| = \rho\}$. Έστω ότι

$$\exists \xi_0 \in \{|x_0 - \xi| = \rho\} \text{ τ.ω. } u(\xi_0) < u(x_0),$$

τότε $u(\xi) < u(x_0) = M$ σε κάποια περιοχή $\Gamma_\varepsilon \subset \{|x_0 - \xi| = \rho\}$ ($\xi_0 \in \Gamma_\varepsilon$). Άρα

$$\begin{aligned} M = u(x_0) &= \frac{1}{\rho^{n-1}\omega_n} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \, ds + \frac{1}{\rho^{n-1}\omega_n} \int_{\{|x_0 - \xi| = \rho\} \setminus \Gamma_\varepsilon} u \, ds < \\ &\frac{1}{\rho^{n-1}\omega_n} \int_{\Gamma_\varepsilon} M \, ds + \frac{1}{\rho^{n-1}\omega_n} \int_{\{|x_0 - \xi| = \rho\} \setminus \Gamma_\varepsilon} M \, ds = \\ &\frac{1}{\rho^{n-1}\omega_n} \int_{|x_0 - \xi| = \rho} M \, ds = M, \end{aligned}$$

δηλαδή $M < M$, άτοπο. Συνεπώς

$$u(\xi) = u(x_0) \quad \forall \xi \in \{|x_0 - \xi| = \rho\}.$$

Επειδή το ρ μπορεί να μεταβάλλεται στο $(0, d)$, έχουμε ότι

$$u(x) = u(x_0) = M \quad \text{για } x \in \{|x - x_0| < d\}.$$

Παίρνουμε τώρα ένα τυχαίο σημείο $y \in \Omega$. Θα αποδείξουμε ότι $u(y) = u(x_0)$. Παίρνουμε μια καμπύλη l που βρίσκεται στο Ω και ενώνει τα σημεία x_0 και y . Έστω $\bar{d} = \text{dist}(l, \partial\Omega)$. Παίρνουμε μια μπάλα

$$B_0 = \{|x - x_0| < \bar{d}\}$$

όπως έχουμε αποδείξει $u(x) \equiv M$ για $x \in B_0$. Ως B_1 παίρνουμε την μπάλα

$$B_1 = \{|x - x^{[1]}| < \bar{d}\}$$

όπου $x^{[1]} \in l$ και $|x_0 - x^{[1]}| = \bar{d}/2$. Εδώ αντί $\bar{d}/2$ μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε θετικό αριθμό μικρότερο του \bar{d} . Προφανώς και στην B_1 έχουμε $u(x) \equiv M$ ($u(x^{[1]}) = M$ δηλαδή στο $x^{[1]}$ η u λαμβάνει μέγιστο). Συνεχίζουμε αυτή την διαδικασία και καλύπτουμε την καμπύλη l με πεπερασμένο πλήθος χωρίων

$$B_0, B_i = \{|x - x^{[i]}| < \bar{d}\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset)$$

(ήτοι μπάλες με ακτίνα \bar{d} και κέντρο στο $x^{[i]}$) όπου $x^{[i]} \in l \quad \forall i$ και $y \in B_m$. Έχουμε $u \equiv M$ στο χωρίο B_1, B_2, \dots, B_m άρα $u(y) = M$.

Συνεπώς αποδείξαμε ότι αν η u λαμβάνει μέγιστο σε ένα σημείο $x_0 \in \Omega$, τότε η u είναι σταθερά.

Παρομοίως εξετάζουμε και την περίπτωση του ελαχίστου.

□

Πόρισμα α). Αν η $u \in C^0(\bar{\Omega})$ είναι αρμονική στο Ω και $u \neq \text{const}$, τότε λαμβάνει το μέγιστο και το ελάχιστο της στο σύνορο $\partial\Omega$ του χωρίου Ω .

Πόρισμα β). Αν η $u \in C^0(\bar{\Omega})$ είναι αρμονική στο Ω και $u \geq 0$ στο $\partial\Omega$, τότε $u \geq 0$ στο $\bar{\Omega}$. Παρομοίως αν $u \leq 0$ στο $\partial\Omega$, τότε $u \leq 0$ στο $\bar{\Omega}$.

Πόρισμα γ). Αν η $u \in C^0(\overline{\Omega})$ είναι αρμονική στο Ω και $u \neq \text{Const}$, τότε

$$\min_{\partial\Omega} u < u < \max_{\partial\Omega} u \text{ σε κάθε σημείο του } \overline{\Omega} \setminus \partial\Omega.$$

IV. Δεύτερο Θεώρημα της μέσης τιμής. Αν η u είναι αρμονική στο Ω και $x \in \Omega$, τότε

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{|x-\xi| \leq r} u \, d\xi, \quad r \in (0, d),$$

$d = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Απόδειξη. Πράγματι, έχουμε από το πρώτο θεώρημα της μέσης τιμής

$$u(x)\omega_n \rho^{n-1} = \int_{|x-\xi|=\rho} u \, ds.$$

Ολοκληρώνουμε αυτή τη σχέση ως προς ρ από 0 έως r , και έχουμε

$$u(x)\omega_n \frac{r^n}{n} = \int_{|x-\xi| \leq r} u \, d\xi.$$

□

Για να αποδείξουμε τις δυο άλλες βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων (αντίστροφος ισχυρισμός και Θεώρημα *Liouville*) θα χρειαστούμε τις γνώσεις από την επόμενη παράγραφο.

Ασκήσεις

1. Διαπιστώστε ότι για $x \neq \xi$ όντως ισχύει

$$\Delta_x E(x, \xi) = 0 \text{ και } \Delta_\xi E(x, \xi) = 0.$$

2. Αποδείξτε το Λήμμα 1.1 για $n = 2$.
3. Αποδείξτε ότι για κάθε ξ

$$\left| \int_{\Omega} E(x, \xi) \, dx \right| < \infty$$

όπου $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ φραγμένο.

4. Έστω $u(x, y)$ αρμονική στο χωρίο $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 5\}$ και $\Omega \subset \{(x, y) : x^2 + y^2 < 5\}$ τυχαίο χωρίο τέτοιο ώστε $(0, 0) \in \Omega$. Υποθέτουμε ότι $u \equiv 1$ στο σύνορο του χωρίου Ω . Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{x^2+y^2 \leq 4} u(x, y) \, dx \, dy.$$

5. Αποδείξτε ότι εαν η $u \in C^2(\Omega)$ και για κάθε μπάλα $B \subset \Omega$ ισχυει

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds = 0$$

τότε η u είναι αρμονική (εδω ν μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του χωρίου B).

6. Έστω $u(x, y)$ αρμονική στον \mathbf{R}^2 συνάρτηση και $u(0, 0) = 1$ υπολογίστε το εξής ολοκλήρωμα

$$\int_{\sqrt{x^2+y^2}=C} u ds$$

$C > 0$ κάποια σταθερά.

7. Έστω ότι οι συναρτήσεις $u(x), v(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ και

$$\Delta u = f(x), \quad \Delta v = f(x) \quad \text{στο } \Omega$$

$$u = \phi(s), \quad v = \psi(s) \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Αποδείξτε ότι αν $\phi(s) \leq \psi(s)$ τότε $u \leq v$ στο $\bar{\Omega}$,

8. Έστω ότι $u \in C^2(\Omega)$ και $\Delta u \geq 0$, αποδείξτε ότι

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} u ds$$

για κάθε μπάλα $|x - \xi| \leq \rho \subset \Omega$.

9. Έστω $u(x)$ αρμονική στο Ω και πάνω σε ένα ανοιχτό ομαλό τμήμα του $\partial\Omega$ ισχύει ότι

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \nu - \text{μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο στο } \partial\Omega.$$

Αποδείξτε ότι $u(x) \equiv 0$ στο Ω .

§2 Πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Laplace για μπάλα

Έστω τώρα στη σχέση (1.3) η $v(\xi)$ είναι τυχαία αρμονική συνάρτηση, τότε έχουμε

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(u(\xi) \frac{\partial v(\xi)}{\partial \nu_\xi} - v(\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} \right) ds + \int_{\Omega} v(\xi) \Delta u(\xi) d\xi.$$

Προσθέτοντας την σχέση αυτή στην σχέση (1.6), για την συνάρτηση

$$(2.1) \quad G(x, \xi) = E(x, \xi) + v(\xi)$$

θα έχουμε $\forall x \in \Omega$:

$$(2.2) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} - G(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} \right] ds + \int_{\Omega} \Delta u(\xi) G(x, \xi) d\xi.$$

Αν θα υποθέσουμε ότι έχουμε $G = 0$ για $\xi \in \partial\Omega$ (για να εξαφανίσουμε την συνάρτηση $u_{\nu_\xi}(\xi)$ η οποία στην περίπτωση προβλήματος *Dirichlet* δεν είναι δοσμένη στο $\partial\Omega$), τότε ο τύπος (2.2) παίρνει τη μορφή

$$(2.3) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} ds + \int_{\Omega} \Delta u(\xi) G(x, \xi) d\xi,$$

και για αρμονική u τη μορφή

$$(2.4) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} ds, \quad \forall x \in \Omega.$$

Θα πάρουμε την περίπτωση όπου το χωρίο $\Omega = B_R(0)$, δηλαδή το χωρίο είναι μπάλα ακτίνας R και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, κέντρο στο σημείο 0 . Διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση

$$(2.5) \quad G(x, \xi) = \begin{cases} E(|x - \xi|) - E\left(\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|\right), & \text{για } x \neq 0, \\ E(|\xi|) - E(R), & \text{για } x = 0 \end{cases}$$

έχει τις ζητούμενες ιδιότητες δηλαδή έχει τη μορφή (2.1) και είναι μηδέν στο σύνορο του χωρίου (δηλαδή για $|\xi| = R$). Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψη την σχέση

$$(2.6) \quad |x - \xi|^2 = |x|^2 - 2x \cdot \xi + |\xi|^2$$

την συνάρτηση $G(x, \xi)$ την γράφουμε ως εξής

$$G(x, \xi) = E(\sqrt{|x|^2 + |\xi|^2 - 2x \cdot \xi}) - E\left(\sqrt{R^2 - 2x \cdot \xi + \frac{|x|^2|\xi|^2}{R^2}}\right).$$

Απο την τελευταία σχέση άμεσα προκύπτει ότι $G(x, \xi) = 0$ για $|\xi| = R$. Επίσης κάνοντας τις πράξεις διαπιστώνουμε ότι

$$\Delta_\xi E\left(\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|\right) = 0.$$

Πράγματι για $n \geq 3$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_i} E\left(\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|\right) &= \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|^{2-n} = \\ &= -\frac{|x|}{\omega_n R} \left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|^{-n} \left(\frac{R}{|x|}x_i - \frac{|x|}{R}\xi_i\right), \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} E\left(\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|\right) &= \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|^{2-n} = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|^{-n-2} \left[\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|^2 - n \left(\frac{R}{|x|}x_i - \frac{|x|}{R}\xi_i\right)^2 \right] \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. Παρομοίως και για $n = 2$.

Η συνάρτηση $G(x, \xi)$ ονομάζεται συνάρτηση *Green*.

Ευκολα καταλίγουμε και στο ότι

$$\Delta_x E\left(\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|\right) = 0$$

παρατηρώντας την ταυτότητα

$$\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right| = \left|\frac{R}{|\xi|}\xi - \frac{|\xi|}{R}x\right|$$

η οποία άμεσα προκύπτει από την (2.6).

Ας υπολογίσουμε τώρα την $\frac{\partial G}{\partial \nu_\xi} \Big|_{|\xi|=R}$ (έπειτα θα την αντικαταστήσουμε στον τύπο (2.4)). Προφανώς, εδώ $\nu_\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)/R$, άρα

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} = \nabla_\xi \cdot \nu_\xi.$$

Έχουμε (τα ακόλουθα ισχύουν και για $n = 2$ και για $n \geq 3$)

$$\frac{\partial E(|x - \xi|)}{\partial \xi_i} = -\frac{1}{\omega_n} \frac{x_i - \xi_i}{|x - \xi|^n},$$

άρα

$$\frac{\partial E}{\partial \nu_\xi} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_n R} \frac{\xi_i - x_i}{|x - \xi|^n} \xi_i = \frac{|\xi|^2 - x \cdot \xi}{\omega_n R |x - \xi|^n}$$

και

$$(2.7) \quad \frac{\partial E(|x - \xi|)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{|\xi|=R} = \frac{R^2 - x \cdot \xi}{\omega_n R |x - \xi|^n} \Big|_{|\xi|=R}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$E\left(\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|\right) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} E\left(\left|\frac{R^2}{|x|^2}x - \xi\right|\right),$$

συνεπώς

$$\frac{\partial E\left(\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|\right)}{\partial \nu_\xi} = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \frac{\partial E\left(\left|\frac{R^2}{|x|^2}x - \xi\right|\right)}{\partial \nu_\xi} = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \frac{|\xi|^2 - x \cdot \xi \frac{R^2}{|x|^2}}{\omega_n R \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - \xi\right|^n}$$

και

$$\frac{\partial E\left(\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|\right)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{|\xi|=R} = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \frac{R^2 - x \cdot \xi \frac{R^2}{|x|^2}}{\omega_n R \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - \xi\right|^n} \Big|_{|\xi|=R}.$$

Χρησιμοποιώντας την (2.6), για $|\xi| = R$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - \xi\right| &= \\ \frac{R}{|x|} \sqrt{R^2 - 2x \cdot \xi + |x|^2} &= \frac{R}{|x|} \sqrt{|\xi|^2 - 2x \cdot \xi + |x|^2} = \frac{R}{|x|} |x - \xi|, \end{aligned}$$

άρα ισχύει

$$(2.8) \quad \frac{\partial E\left(\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}\xi\right|\right)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{|\xi|=R} = \frac{|x|^2 - x \cdot \xi}{\omega_n R |x - \xi|^n} \Big|_{|\xi|=R}.$$

Αφαιρώντας την (2.8) από την (2.7) παίρνουμε (βλ. (2.5))

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_\xi} \Big|_{|\xi|=R} = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \frac{1}{|x - \xi|^n} \Big|_{|\xi|=R}.$$

Έτσι αποδειξαμε ότι αν η $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$ είναι αρμονική στο χωρίο $B_R(0)$, τότε ισχύει ο ακόλουθος τύπος που ονομάζεται ολοκληρωτικός τύπος *Poisson*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(\xi)}{|x - \xi|^n} ds.$$

Τώρα για να λύσουμε το πρόβλημα *Dirichlet* στο χωρίο $B_R(0)$

$$(2.9) \quad \Delta u = 0 \text{ στην } B_R(0), \quad u \Big|_{\partial B_R(0)} = \phi$$

θα πρέπει να αποδείξουμε κατά κάποιο τρόπο το αντίστροφο.

Ας δώσουμε έναν ορισμό:

Κλασική λύση ονομάζουμε τη συνάρτηση που ανήκει στο $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, επαληθεύει την εξίσωση σε κάθε σημείο του Ω και την συνοριακή συνθήκη σε κάθε σημείο του $\partial\Omega$.

Θεώρημα 2.1 (ύπαρξη). Έστω ότι $\phi \in C^0(\partial B_R(0))$, τότε η συνάρτηση

$$(2.10) \quad u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{\phi(\xi)}{|x - \xi|^n} ds$$

είναι κλασική λύση του προβλήματος (2.9).

Απόδειξη. Το ότι η $u(x)$ είναι αρμονική άμεσα προκύπτει από το γεγονός ότι η $G(x, \xi)$ και η $\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu}$ είναι αρμονικές ως προς το x συναρτήσεις άρα $\Delta_x u = 0$. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι επαληθεύεται η συνοριακή συνθήκη.

Από τον τύπο *Poisson* (θέτοντας $u \equiv 1$) για

$$P(x, \xi) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x - \xi|^n}$$

(η συνάρτηση $P(x, \xi)$ ονομάζεται πυρίνας *Poisson*) έχουμε

$$\int_{\partial B_R} P(x, \xi) ds = 1 \quad \forall x \in B_R(0) \quad (\xi \in \partial B_R(0)).$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη διαφορά $u(x) - \phi(x_0)$ όπου $x_0 \in \partial B_R$. Πιο συγκεκριμένα θέλουμε $\forall \varepsilon > 0$ να υπάρχει ένα $\delta_\varepsilon > 0$ ε.ω. $|u(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon$ όταν $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ($x \in B_R$). Έχουμε

$$\begin{aligned} |u(x) - \phi(x_0)| &= \left| \int_{\partial B_R} P(x, \xi) [\phi(\xi) - \phi(x_0)] ds \right| \leq \\ & \int_{\partial B_R} P(x, \xi) |\phi(\xi) - \phi(x_0)| ds = \\ & \int_{|\xi - x_0| \leq \delta \cap \partial B_R} P(x, \xi) |\phi(\xi) - \phi(x_0)| ds + \\ & \int_{|\xi - x_0| > \delta \cap \partial B_R} P(x, \xi) |\phi(\xi) - \phi(x_0)| ds = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

για κάθε $\delta > 0$.

Θα εκτιμήσουμε τα δυο ολοκληρώματα στο δεξί μέρος. Για κάθε $\varepsilon > 0$ (λόγω της συνέχειας της ϕ) μπορούμε να βρούμε ένα $\delta_1 > 0$ τ.ω.

$$|\phi(\xi) - \phi(x_0)| < \varepsilon/2 \text{ για } |\xi - x_0| < \delta_1 \text{ (}\xi \in \partial B_R\text{)}.$$

Για τέτοια δ_1 έχουμε

$$I_1 = \int_{|\xi-x_0| \leq \delta_1 \cap \partial B_R} P(x, \xi) |\phi(\xi) - \phi(x_0)| ds < \frac{\varepsilon}{2} \int_{\partial B_R} P(x, \xi) ds = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θα εκτιμήσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα I_2 . Έστω $|\phi| \leq M$. Αφού έχουμε επιλέξει το δ_1 , έχουμε

$$I_2 = \int_{|\xi-x_0| > \delta_1 \cap \partial B_R} P(x, \xi) |\phi(\xi) - \phi(x_0)| ds.$$

Ας παρουμε το x τ.ω. $|x - x_0| < \delta_1/2$. Επειδή $|\xi - x_0| > \delta_1$ θα έχουμε

$$|\xi - x_0| \leq |\xi - x| + |x - x_0| \leq |\xi - x| + \frac{\delta_1}{2} \leq |\xi - x| + \frac{1}{2}|\xi - x_0|,$$

άρα

$$|\xi - x| \geq \frac{1}{2}|\xi - x_0| > \frac{\delta_1}{2}.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{|\xi - x|^n} < \frac{1}{(\delta_1/2)^n}.$$

Άρα έχουμε

$$I_2 \leq 2M \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \frac{1}{(\delta_1/2)^n} \int_{|\xi|=R} ds = 2MR^{n-2} \frac{R^2 - |x|^2}{(\delta_1/2)^n}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\int_{|\xi|=R} = \omega_n R^{n-1}.$$

Επιλέγοντας τώρα το $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ αρκετά μικρό (δηλαδή $|x|$ θα είναι κοντά στο R) έχουμε

$$2MR^{n-2} \frac{R^2 - |x|^2}{\delta_1^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

άρα για $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ισχύει ότι

$$|u(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon.$$

□

Παρατήρηση. Για τυχαίο χωρίο η κατασκευή της συνάρτησης *Green* είναι αδήνατη.

Θεώρημα 2.2 (μοναδικότητα). Η κλασική λύση του προβλήματος

$$\Delta u = f(x) \text{ στο } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi$$

είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω ότι εκτός από την λύση u υπάρχει μια άλλη λύση v , τότε για $w \equiv u - v$ έχουμε

$$\Delta w = 0 \text{ στο } \Omega, \quad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

Από την Αρχή του Μεγίστου προκύπτει ότι $w \equiv 0$ στο Ω άρα $u \equiv v$ στο Ω .

□

Παρατήρηση. Την μοναδικότητα την αποδείξαμε για τυχαίο χωρίο και για μη ομογενής εξίσωση.

Είμαστε τώρα έτοιμοι για να αποδείξουμε τις δυο τελευταίες βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων.

V. Αντίστροφος ισχυρισμός. Έστω $v(x)$ συνεχής στο Ω συνάρτηση για την οποία ισχύει το εξής: $\forall x \in \Omega$ και $\forall \rho \in (0, d)$ όπου το $d = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, έχουμε

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} v \, ds.$$

Τότε η $v(x)$ είναι αρμονική συνάρτηση στο Ω .

Απόδειξη. Πράγματι, όπως αποδείξαμε πάνω η v δεν λαμβάνει ούτε το μέγιστό της ούτε το ελάχιστο της στο Ω αν δεν είναι σταθερή. Έστω τώρα u αρμονική στη μπάλα $|x_0 - x| < r \subset \Omega$ συνάρτηση τ.ω.

$$u = v \text{ στο } |x_0 - x| = r.$$

Προφανώς για την $w = u - v$ ισχύει το πρώτο θεώρημα της μέσης τιμής και συνεπώς η w δεν λαμβάνει ούτε το μέγιστο της ούτε το ελάχιστό της στο $|x_0 - x| = r$ (αν δεν είναι σταθερή). Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι στο $|x_0 - x| = r$ η $w = 0$ καταλήγουμε στο ότι $w \equiv 0$ στο $|x_0 - x| \leq r$ δηλαδή $u \equiv v$ στο $|x_0 - x| \leq r$. Συνεπώς η v είναι αρμονική σε κάθε μπάλα $\subset \Omega$ άρα αρμονική στο Ω .

□

Λέμε ότι η $u(x)$ είναι άνω (κάτω) φραγμένη στο Ω αν υπάρχει σταθερά M τ.ω. $u(x) \leq M$ ($u(x) \geq M$).

VI. Θεώρημα 2.3 (Liouville). Έστω η $u(x)$ είναι αρμονική στον \mathbf{R}^n και είναι άνω ή κάτω φραγμένη. Τότε η $u(x)$ είναι σταθερά.

Απόδειξη. Έστω ότι η $u(x)$ είναι κάτω φραγμένη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $u \geq 0$. Αλλιώς θεωρούμε την $v \equiv u - M$ και αρκεί να αποδείξουμε ότι η v είναι σταθερά.

Έστω x τυχαίο σημείο στον \mathbf{R}^n , για κάθε $|x| < R$ και $|\xi| = R$ έχουμε

$$R + |x| \geq |\xi - x|$$

(αφού $(R + |x|)^2 = R^2 + 2|x|R + |x|^2 \geq |\xi|^2 + |x|^2 - 2x \cdot \xi = |\xi - x|^2$), συνεπώς

$$\frac{R - |x|}{(R + |x|)^n} \leq \frac{R - |x|}{|\xi - x|^n}$$

και

$$\frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} \leq \frac{R^2 - |x|^2}{|\xi - x|^n}$$

Επίσης για $|x| < R$ και $|\xi| = R$ έχουμε $|\xi - x| \geq R - |x|$ (αφού $|\xi - x| \geq |\xi| - |x| = R - |x|$), άρα

$$\frac{R + |x|}{|\xi - x|^n} \leq \frac{R + |x|}{(R - |x|)^n}$$

και

$$\frac{R^2 - |x|^2}{|\xi - x|^n} \leq \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}}.$$

Δηλαδή

$$\frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} \leq \frac{R^2 - |x|^2}{|\xi - x|^n} \leq \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση αυτή με $(R\omega_n)^{-1}u(\xi)$ και ολοκληρώνοντας πάνω στο $|\xi| = R$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n R} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} \int_{|\xi|=R} u(\xi) ds &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{|\xi|=R} \frac{u(\xi)}{|\xi - x|^n} ds \leq \\ &\frac{1}{\omega_n R} \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}} \int_{|\xi|=R} u(\xi) ds. \end{aligned}$$

Τώρα λαμβάνοντας υπ όψιν τον τύπο *Poisson* και το πρώτο θεώρημα της Μεσης Τιμής καταλήγουμε στην σχέση

$$(2.12) \quad \frac{(R - |x|)R^{n-2}}{(R + |x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{(R + |x|)R^{n-2}}{(R - |x|)^{n-1}}u(0).$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει $\forall R > |x|$ άρα $(R \rightarrow +\infty)$

$$u(0) \leq u(x) \leq u(0).$$

Συνεπώς $u(x) = u(0)$ για κάθε x δηλαδή η u είναι σταθερά.

Στην περίπτωση της άνω φραγμένης συνάρτησης η απόδειξη είναι παρόμοια.

□

Λήμμα 2.1. (ανισότητα *Harnack*). Έστω $u(x) \geq 0$ αρμονική στο χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ συνάρτηση. Τότε για κάθε φραγμένο χωρίο $\Omega' \subset \Omega$ υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από Ω' , Ω και n ε.ω.

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u.$$

Απόδειξη. Έστω $x, y \in \Omega'$ τ.ω.

$$|x - y| \leq r = \frac{1}{4} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Έχουμε ότι $B_{2r}(x) \subset \Omega$. Προφανώς $B_r(y) \subset B_{2r}(x)$, άρα (2-ο Θεώρημα μέσης τιμής)

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n(2r)^n} \int_{B_{2r}(x)} u d\xi \geq \frac{1}{2^n} \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y)} u d\xi = \frac{1}{2^n} u(y).$$

Συνεπώς $u(x) \geq 1/2^n u(y)$ και λόγω συμμετρίας των x, y , παρομοίως $u(y) \geq 1/2^n u(x)$, δηλαδή

$$(2.13) \quad \frac{1}{2^n} u(y) \leq u(x) \leq 2^n u(y) \quad \text{για } |x - y| \leq r.$$

Καλύπτοντας το χωρίο Ω' με πεπερασμένο πλήθος μπαλών $B_i, i = 1, \dots, m, B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Η (2.13) παίρνουμε ισχύει σε κάθε τέτοια μπάλα, άρα

$$u(x) \leq (2^n)^m u(y) \quad \forall x, y \in \Omega'.$$

Τουτέστιν αποδειξαμε το ζητούμενο με $C = (2^n)^m$.

□

Υπάρχουν και άλλες μορφές αυτής της ανισότητας π.χ. και η (2.12) είναι ανισότητα *Harnack*.

Ασκήσεις

1. Έστω $u(x, y)$ και $v(x, y)$ αρμονικές στον \mathbf{R}^2 συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η $u(x, y)$ είναι φραγμένη στον \mathbf{R}^2 και $u(1, 0) = 2$. Υπολογίστε τη διαφορά $u(0, 0) - v(0, 0)$ αν

$$v \Big|_{x^2+y^2=1} = \sin \phi + 1, \quad \text{όπου } x = \cos \phi, \quad y = \sin \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

2. Έστω $u(x, y)$ και $v(x, y)$ αρμονικές στον \mathbf{R}^2 συναρτήσεις. Τι πρόσημο έχει η διαφορά $u(0, 0) - v(0, 0)$ αν

$$u \Big|_{x^2+y^2=1} = \frac{1}{2} - \sin \phi \quad (\text{όπου } x = \cos \phi, \quad y = \sin \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi))$$

και

$$v \Big|_{(x-2)^2+y^2=3^2} \leq 0.$$

3. Έστω η $u(x)$ αρμονική μη αρνητική στο Ω συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y \in \Omega$ με $|x - y| \leq r \subset \Omega$ ισχύει

$$u(x) \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n u(y).$$

§3 Άλλα συνοριακά προβλήματα

Παρομοίως με το πρόβλημα *Dirichlet* μπορούν να αντιμετωπιστούν και τα δυο άλλα συνοριακά προβλήματα.

Έστω έχουμε τρίτο συνοριακό πρόβλημα (ή αλλιώς μεικτό πρόβλημα ή πρόβλημα *Robin*):

$$\Delta u = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \Big|_{\partial \Omega} = \phi, \quad h \neq 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση στη σχέση (2.2) στο ολοκλήρωμα ως προς $\partial \Omega$ προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο huG για να πάρουμε

$$u(x) = \int_{\partial \Omega} \left[u(\xi) \left(\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} + hG \right) - \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} + hu \right) G(x, \xi) \right] ds +$$

$$(3.1) \quad \int_{\Omega} \Delta u(\xi) G(x, \xi) d\xi.$$

Όπως στην περίπτωση του προβλήματος *Dirichlet* ψάχνουμε τη συνάρτηση *Green* σε μορφή $G = E + v$ εδώ όμως απαιτούμε

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} + hG \Big|_{\partial \Omega} = 0$$

για να εξαφανίσουμε την συνάρτηση $u(\xi)$ η οποία (στην περίπτωση προβλήματος *Robin*) δεν είναι δοσμένη στο $\partial \Omega$. Τότε για αρμονική u ο τύπος (3.1) θα πάρει την μορφή

$$u(x) = - \int_{\partial \Omega} \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_{\xi}} + hu \right) G(x, \xi) ds.$$

Αν το χωρίο μας είναι μπάλα η συνάρτηση *Green* μπορεί να κατασκευαστεί.

Για το πρόβλημα *Neumann*

$$\Delta u = 0 \text{ στο } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = \phi.$$

τα πράγματα είναι λίγο πιο πολύπλοκα. Εδώ θα περίμενε κανείς ότι θα πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση *Green* τ.ω.

$$(3.2) \quad \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0$$

για να εξαφανίσουμε στον τύπο (2.2) την συνάρτηση $u(\xi)$ η οποία δεν είναι δοσμένη στο $\partial \Omega$. Αυτό όμως δεν είναι εφικτό. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι τέτοια συνάρτηση *Green* υπάρχει, τότε πρέπει να υπάρχει μια αρμονική συνάρτηση $v = G - E$ η οποία επαληθευει την συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = - \frac{\partial E}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega}.$$

Θέτοντας στον τύπο (1.6) $u \equiv 1$ θα πάρουμε

$$\int_{\partial \Omega} \frac{\partial E}{\partial \nu} ds = 1$$

άρα άτοπο (βλ. την ιδιότητα I των αρμονικών συναρτήσεων). Για αυτό θα πάρουμε αντί της (3.2) την ακόλουθη

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = S_0$$

όπου το

$$S_0 = \left(\int_{\partial \Omega} ds \right)^{-1}.$$

Τώρα δεν έχουμε αντίφαση, αφού

$$\int_{\partial \Omega} \left(S_0 - \frac{\partial E}{\partial \nu} \right) ds = 0,$$

και για μπάλα τέτοια συνάρτηση μπορεί να κατασκευαστεί. Ο αντίστοιχος (στον (2.4)) τύπος θα είναι ο εξής

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} G(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} ds + C$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά.

Ασκήσεις.

1. Ποια είναι η αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση το εξής πρόβλημα *Neumann*:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x) \text{ στο } \Omega \subset \mathbf{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \phi(s) \text{ στο } \partial\Omega \end{aligned}$$

όπου ν μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$.

§4 Πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Laplace σε γενικά χωρία

Έστω $v(x) \in C^0(\Omega)$ και $B \subset \Omega$ τυχαία (ανοιχτή) μπάλα (στο $B \subset \Omega$). Ορίζουμε την συνεχή συνάρτηση $H_B[v]$ ως εξής

$$H_B[v](x) = \begin{cases} \text{αρμονική για } x \in B, \\ v(x) \text{ για } x \in \Omega \setminus B \end{cases}.$$

Η ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.

Ορισμός. Λέμε ότι η συνάρτηση v είναι *ύφαρμονική* στο Ω αν για κάθε μπάλα $B \subset \Omega$ ισχύει

$$v \leq H_B[v] \quad (v(x) \leq H_B[v](x)).$$

Προφανώς αν οι v_1, \dots, v_n είναι ύφαρμονικές τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους με θετικές σταθερές είναι επίσης ύφαρμονική συνάρτηση. Αν η v είναι αρμονική τότε είναι και ύφαρμονική.

Θα διατυπώσουμε τώρα δυο λήμματα, τις αποδείξεις των οποίων θα δώσουμε αργότερα (βλ. Θεώρημα 7.1).

Λήμμα 4.1. Έστω $u \in C^2(\Omega)$ και $\Delta u \geq 0$ τότε η u δεν λαμβάνει το μέγιστό της στα εσωτερικά σημεία του Ω αν δεν είναι σταθερή.

Από το Λήμμα 4.1 άμεσα προκύπτει ότι αν $v \in C^2(\Omega)$ και $\Delta v \geq 0$, τότε η v είναι ύφαρμονική. Πράγματι,

$$v(x) = H_B[v](x)$$

για $x \in \Omega \setminus B$ (B τυχαία μπάλα στο Ω). Αν $x \in B$ έχουμε

$$\Delta(v - H_B[v]) \geq 0.$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $v, H_B[v] \in C^0(\bar{B})$ και ότι

$$v - H_B[v] \Big|_{\partial B} = 0$$

καταλήγουμε στο ότι $v(x) \leq H_B[v](x)$ και για $x \in B$.

Ορισμός. Λέμε ότι η $C^0(\Omega)$ συνάρτηση v είναι υπεραρμονική στο Ω αν για κάθε μπάλα $B \subset \Omega$ ισχύει

$$v \geq H_B[v].$$

Λήμμα 4.2. Έστω $u \in C^2(\Omega)$ και $\Delta u \leq 0$ τότε η u δεν λαμβάνει το ελάχιστό της στα εσωτερικά σημεία του Ω αν δεν είναι σταθερή.

Απο το Λήμμα 4.2 άμεσα προκύπτει ότι αν $v \in C^2(\Omega)$ και $\Delta v \leq 0$ τότε η v είναι υπεραρμονική. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του Λήμματος 2.

Μερικές ιδιότητες των υπαρμονικών συναρτήσεων

I. Αν η $v \geq 0$ στο Ω τότε και η $H_B[v] \geq 0$ στο Ω .

Πράγματι, για $x \in \Omega \setminus B$ έχουμε $H_B[v] = v \geq 0$, στο B η $H_B[v]$ είναι αρμονική συνεπώς απο αρχή του μεγίστου (αφού $H_B[v] \Big|_{\partial B} \geq 0$) έχουμε $H_B[v] \geq 0$ στο \bar{B}

Απο την ιδιοτητα αυτή προκύπτει οτι αν $v_1 - v_2 \geq 0$ τότε

$$H_B[v_1 - v_2] \equiv H_B[v_1] - H_B[v_2] \geq 0.$$

II. Αρχή του μεγίστου για υπαρμονικές συναρτήσεις. Η υπαρμονική στο Ω συνάρτηση δεν λαμβάνει το μέγιστό της στα εσωτερικά σημεία του Ω αν δεν είναι σταθερά.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι στο σημείο $x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \partial\Omega$ η υπαρμονική συνάρτηση v λαμβάνει το μέγιστό της. Θεωρούμε την μπάλα $B_\rho(x_0) \subset \Omega$ ($\rho < \delta = \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$) και την συνάρτηση $w = H_{B_\rho(x_0)}[v]$. Έχουμε

$$\max w \Big|_{\partial B_\rho(x_0)} = \max v \Big|_{\partial B_\rho(x_0)} \leq v(x_0)$$

(w και v συμπίπτουν στο $\Omega \setminus B_\rho(x_0)$ εξ ορισμού, στο x_0 η v έχει μέγιστο). Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι εξ ορισμού $v(x_0) \leq H_{B_\rho(x_0)}[v](x_0) = w(x_0)$, έχουμε για αρμονική $w(x)$

$$\max w \Big|_{\partial B_\rho(x_0)} \leq w(x_0)$$

άρα (απο αρχή μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις) η $w(x)$ σταθερά στο χωρίο $B_\rho(x_0)$ και συνεπώς η $v(x)$ σταθερά στο σύνορο του $\partial B_\rho(x_0)$. Παρατηρούμε οτι ρ είναι τυχαίο μεταξύ του 0 και $\text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, μεταβάλλοντας τώρα το ρ στο διάστημα $(0, \delta)$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η v είναι σταθερή στη μπάλα $B_\delta(x_0)$.

Το ότι η v θα είναι σταθερή παντού στο Ω αποδεικνυεται όπως και στην περίπτωση των αρμονικών συναρτήσεων.

□

III. Αν οι συναρτήσεις v_1, v_2, \dots, v_m είναι υπαρμονικές σε ένα χωρίο Ω , τότε και η $\max(v_1, v_2, \dots, v_m)$ είναι υπαρμονική στο Ω .

Αυτό προκύπτει από την ιδιότητα I αφού $v - v_i \geq 0$ και συνεπώς (\forall μπάλα B στο Ω) $H_B[v] \geq H_B[v_i] \geq v_i$ ($i = 1, \dots, m$) (η δευτερη ανισότητα ισχύει επειδή οι v_i είναι υφαρμονικές). Άρα

$$v = \max(v_1, v_2, \dots, v_m) \leq H_B[v].$$

□

IV. Αν η συνάρτηση v είναι υφαρμονική σε ένα χωρίο Ω , τότε και η $H_{B_0}[v]$ είναι υφαρμονική στο Ω .

Εδώ B_0 μια μπάλα στο Ω . Αυτό που πρέπει να αποδείξουμε είναι ότι για κάθε μπάλα $B \subset \Omega$ ισχύει

$$w \leq H_B[w] \text{ όπου } w = H_{B_0}[v].$$

Δηλαδή συγκρίνουμε τις συναρτήσεις

$$w(x) = \begin{cases} \text{αρμονική για } x \in B_0, \\ v(x) \text{ για } x \in \Omega \setminus B_0 \end{cases}$$

και

$$H_B[w](x) = \begin{cases} \text{αρμονική για } x \in B, \\ w(x) \text{ για } x \in \Omega \setminus B \end{cases}.$$

όπου v μια υφαρμονική συνάρτηση.

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις.

α). Αν $B \subset B_0$ τότε $w = H_B[w]$.

Πράγματι, στο B οι w και $H_B[w]$ συμπίπτουν επειδή δυο αρμονικές συναρτήσεις αν είναι ίσες στο συνορο του χωρίου θα είναι ίσες και στο χωρίο. Στο $\Omega \setminus B$ αυτές συμπίπτουν εξ ορισμού.

β). Θεωρούμε τώρα την περίπτωση $B_0 \subset B$.

Στο $\Omega \setminus B$ οι w και $H_B[w]$ συμπίπτουν εξ ορισμού. Στο B η $H_B[w]$ είναι αρμονική και η w υφαρμονική (αφού η w στο B_0 αρμονική και στο $B \setminus B_0$ ισούται με v , άρα υφαρμονική). Συνεπώς $w - H_B[w]$ υφαρμονική και (βλ. ιδιότητα II)

$$w - H_B[w] \Big|_{\partial B} = 0 \Rightarrow w - H_B[w] \Big|_B \leq 0.$$

(Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό w υφαρμονική στο B σημαίνει $w \leq H_{B_1}[w]$ για κάθε μπάλα $B_1 \subset B$.)

γ). Αν $B \subset \Omega \setminus B_0$, τότε πάλι όπως στην περίπτωση α), $w \leq H_B[w]$.

Πράγματι, στο B η $H_B[w]$ είναι αρμονική ενώ η $w = v$ στο B υφαρμονική, άρα η $w - H_B[w]$ υφαρμονική στο B και μηδέν στο ∂B , συνεπώς (βλ. την ιδιότητα II) $w - H_B[w] = 0$ στο B (στο $\Omega \setminus B$ προφανώς συμπίπτουν).

δ). Έστω τώρα $B_0 \cap B \neq \emptyset$ και B_0 δεν είναι υποσύνολο το B ούτε το αντίστροφο.

Στο $B \setminus B_0$ ισχύει

$$w = H_{B_0}[v] = v \leq H_B[v] = H_B[w]$$

(η τελευταία σχέση λαμβάνει χώρα επειδή $w = v$ εκτός του B_0).

Στο $B \cap B_0$ οι w και $H_B[w]$ είναι αρμονικές, και στο $\partial(B \cap B_0)$ ισχύει $w \leq H_B[w]$, αρα απο αρχή μεγίστου

$$w \leq H_B[w] \text{ για } x \in B \cap B_0.$$

Προφανώς στο $\Omega \setminus B$ οι w και $H_B[w]$ συμπίπτουν.

□

Θα δώσουμε χωρίς απόδειξη ένα Θεώρημα το οποίο θα μας χρειαστεί παρακάτω.

Θεώρημα 4.1 (συμπάγειας). *Κάθε ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία αρμονικών στο Ω συναρτήσεων έχει υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω . Το όριο είναι αρμονική συνάρτηση.*

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη της λύσης του προβλήματος *Dirichlet* θα εισάγουμε την εννοια της κάτω και άνω συνάρτησης.

Ορισμός. Έστω ότι η συνάρτηση $\phi \in C^0(\partial\Omega)$.

Η συνάρτηση $v \in C^0(\bar{\Omega})$ ονομάζεται κάτω συνάρτηση της ϕ στο Ω αν είναι υφαρμονική στο Ω και στο $\partial\Omega$ έχουμε

$$v|_{\partial\Omega} \leq \phi.$$

Η συνάρτηση $V \in C^0(\bar{\Omega})$ ονομάζεται άνω συνάρτηση της ϕ στο Ω αν είναι υπεραρμονική στο Ω και στο $\partial\Omega$ έχουμε

$$V|_{\partial\Omega} \geq \phi.$$

Προφανώς καθε σταθερά $C \leq \inf_{\partial\Omega} \phi$ είναι κάτω συνάρτηση της ϕ στο Ω και καθε σταθερά $C \geq \sup_{\partial\Omega} \phi$ είναι άνω συνάρτηση της ϕ στο Ω .

Έστω οτι το F_ϕ είναι το σύνολο των κάτω συναρτήσεων της ϕ στο Ω .

Θεώρημα 4.2 (Perron). Η συνάρτηση

$$u(x) = \sup_{v \in F_\phi} v(x)$$

είναι αρμονική στο Ω .

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι λόγω αρχής μεγίστου (βλ. την ιδιότητα II) $\forall v \in F_\phi$ ισχύει ότι

$$v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} \phi(s) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

αρα η $u(x)$ είναι ορισμένη παντού στο $\bar{\Omega}$.

Αυτό που θα κάνουμε τώρα είναι θα κατασκευασουμε σε μια τυχαία μπάλα στο Ω μια αρμονική συνάρτηση $w(x)$ (βλ. παρακάτω) και θα δείξουμε οτι η $u(x)$ συμπίπτει με την $w(x)$ σε αυτήν την μπάλα.

Ας πάρουμε ενα τυχαίο σημείο x_0 στο Ω , απο τον ορισμό της u έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{v_m\} \in F_\phi$ τ.ω.

$$v_m(x_0) \rightarrow u(x_0) \text{ καθώς } m \rightarrow \infty.$$

Η ακολουθία αυτή είναι άνω φραγμένη (αφού $v_m \leq \sup \phi(s)$). Χωρίς βλαβή της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $\{v_m\}$ είναι και κάτω φραγμένη επιλέγοντας αντί της $\{v_m\}$ την $\max(\{v_m\}, \inf \phi)$. Πράγματι

$$\inf \phi \leq \max(\{v_m\}, \inf \phi) \leq \sup \phi,$$

αρα η καινούργια ακολουθία είναι φραγμένη, επίσης έχουμε ότι η συνάρτηση $\max(\{v_m\}, \inf \phi)$ είναι υφαρμονική (βλ. την ιδιότητα III) και

$$\max(\{v_m\}, \inf \phi) \Big|_{\partial\Omega} \leq \phi$$

δηλαδή η συνάρτηση $\max(\{v_m\}, \inf \phi) \in F_\phi \forall m$. Τέλος από την

$$0 \leq u(x_0) - \max(\{v_m(x_0)\}, \inf \phi) \leq u(x_0) - v_m(x_0)$$

προκύπτει ότι

$$\max(\{v_m(x_0)\}, \inf \phi) \rightarrow u(x_0) \text{ όταν } m \rightarrow \infty.$$

Άρα παίρνουμε την $\{v_m\}$ να είναι φραγμένη.

Έστω $B_0 = B_\delta(x_0)$ μια μπάλα με κέντρο στο x_0 και ακτίνα $\delta < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$V_m(x) = H_{B_0}[v_m](x).$$

Η ακολουθία $\{V_m\}$ είναι φραγμένη. Έχουμε ότι η $V_m(x)$ είναι υφαρμονική $\forall m$ (βλ. την ιδιότητα IV) και

$$V_m(x) \Big|_{\partial\Omega} = v_m(x) \Big|_{\partial\Omega} \leq \phi$$

άρα $V_m \in F_\phi$. Επίσης έχουμε (εξ ορισμού των υφαρμονικών συναρτήσεων) ότι οι V_m είναι αρμονικές στο χωρίο B_0 . Από το Θεώρημα της συμπίεσης υπάρχει υπακολουθία $V_{m_k}(x)$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο $B_\rho(x_0) \forall \rho < \delta$ σε μια αρμονική (στο $B_\rho(x_0)$) συνάρτηση $w(x)$. Προφανώς

$$(4.1) \quad v_m \leq V_m \leq u$$

(η πρώτη ανισότητα ισχύει αφού v_m υφαρμονική και η δεύτερη αφού $V_m \in F_\phi$) άρα

$$V_{m_k}(x_0) \rightarrow u(x_0) \text{ καθώς } k \rightarrow \infty$$

και συνεπώς

$$w(x_0) = u(x_0).$$

Επίσης από την (4.1) έχουμε ότι

$$w(x) \leq u(x).$$

Ο σκοπός μας τώρα είναι να αποδείξουμε ότι $w(x) \equiv u(x)$ στη μπάλα B_0 δηλαδή $u(x)$ αρμονική στη B_0 , και λαμβάνοντας υπ όψιν ότι το x_0 είναι αυθαίρετο σημείο του χωρίου Ω , θα καταλήξουμε στο ότι η $u(x)$ είναι αρμονική στο Ω .

Έστω ότι αυτό δεν ισχύει, τουτ έστιν υπάρχει $x_1 \in B_0$ (με $x_1 \neq x_0$) τ.ω.

$$w(x_1) < u(x_1),$$

τότε υπάρχει μια συνάρτηση $\tilde{w}(x) \in F_\phi$ τ.ω.

$$(4.2) \quad w(x_1) < \tilde{w}(x_1).$$

Θεωρούμε την ακολουθία των υφαρμονικών συναρτήσεων (βλ. τις ιδιότητες III, IV)

$$\omega_k = \max(\tilde{w}, V_{m_k})$$

και

$$W_k = H_{B_0}[\omega_k]$$

(προφανώς $\omega_k \in F_\phi$). Όπως και πριν υπάρχει υπακολουθία W_{k_s} που συγκλίνει ομοιόμορφα στο χωρίο $B_\rho(x_0)$ στην αρμονική σε αυτό το χωρίο συνάρτηση ω_1 . Ισχύει ότι

$$V_{m_k} \leq \omega_k \leq H_{B_0}[\omega_k] = W_k$$

συνεπώς

$$(4.3) \quad w(x) \leq \omega_1(x) \leq u(x) \quad \text{στο } B_\rho(x_0)$$

(η δευτερη ανισότητα στο (4.3) λαμβάνει χώρα επειδή $\omega_1 \in F_\phi$). Από την (4.3) αφού $w(x_0) = u(x_0)$ έχουμε ότι

$$w(x_0) = \omega_1(x_0) = u(x_0) \quad \text{στο } B_\rho(x_0).$$

Θεωρούμε την αρμονική συνάρτηση

$$\psi(x) = \omega_1(x) - w(x)$$

για την οποία ισχύει (βλ. (4.3)) $\psi(x) \geq 0$ στην μπάλα $B_{x_0}(\rho)$ και $\psi(x_0) = 0$, άρα (απο αρχή μεγίστου) $\psi(x) \equiv 0$ και συνεπώς $\omega_1(x) \equiv w(x)$ στην μπάλα $B_{x_0}(\rho)$. Καταλήγουμε στο ότι

$$w(x_1) = \omega_1(x_1) \geq \tilde{w}(x_1).$$

άτοπο (βλ. (4.2)).

□

Αποδείξαμε ότι η $u = \sup_{v \in F_\phi} v$ επαληθεύει την εξίσωση *Laplace* στο Ω . Για να λύσουμε το πρόβλημα *Dirichlet* πρέπει να δείξουμε ότι η u επαληθεύει και την συνοριακή συνθήκη.

Θα δούμε τώρα ότι υπο ποιες προϋποθέσεις σχετικά με το χωρίο ισχύει ότι $\forall x_0 \in \partial\Omega$

$$u(x) \rightarrow \phi(x_0) \quad \text{καθώς } x \rightarrow x_0 \quad x \in \Omega,$$

θα θυμίσουμε ότι η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής στο $\partial\Omega$.

Ορισμός. Λέμε ότι το χωρίο Ω επαληθεύει την συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας στο σημείο $x_0 \in \partial\Omega$ αν υπάρχει $y \notin \bar{\Omega}$ και αριθμός $R > 0$ τέτοιοι ώστε

$$\bar{\Omega} \cap \bar{B}_y(R) = \{x_0\}.$$

Λέμε ότι το χωρίο Ω επαληθεύει την συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας αν η συνθήκη αυτή επαληθεύεται σε κάθε σημείο του $\partial\Omega$.

Εδώ $B_y(R)$ μπάλα με κέντρο στο σημείο y και ακτίνα R . Προφανώς $|x_0 - y| = R$.

Θεώρημα 4.3. Αν $u(x) = \sup_{v \in F_\phi} v(x)$ και στο σημείο x_0 το χωρίο Ω επαληθεύει τη συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \phi(x_0) \quad x \in \Omega$$

Απόδειξη. Έστω $n \geq 3$. Ορίζουμε την συνάρτηση $h(x)$:

$$h(x) = \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|^{n-2}}.$$

Προφανώς $h(x_0) = 0$ και $h(x) > 0$ στο $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$. Αφού η ϕ είναι συνεχής έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ ε.ω.

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon \quad \text{για } |x - x_0| < \delta, \quad x \in \partial\Omega.$$

Επίσης υπάρχει σταθερά $C > 0$ τ.ω. $Ch(x) > 2M$ για $|x - x_0| \geq \delta$ αφού $h(x) > 0$ στο $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$, εδώ $M = \sup |\phi|$. Για να αποδείξουμε το Θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$|u(x) - \phi(x_0)| \leq \varepsilon + Ch(x)$$

διότι

$$Ch(x) \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } x \rightarrow x_0.$$

Άρα θέλουμε να ισχύει η

$$(4.4) \quad \phi(x_0) - \varepsilon - Ch(x) \leq u(x) \leq \phi(x_0) + \varepsilon + Ch(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Έχουμε ότι η

$$\phi(x_0) - \varepsilon - Ch(x)$$

είναι κάτω συνάρτηση. Πράγματι, η συνάρτηση αυτή είναι αρμονική άρα και υπεραρμονική και

$$\phi(x_0) - \varepsilon - Ch(x) \Big|_{\partial\Omega} \leq \phi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Το τελευταίο ισχύει διότι στο $\partial\Omega$ για $|x - x_0| < \delta$ έχουμε

$$\phi(x_0) - \phi(x) < \varepsilon$$

και για $|x - x_0| \geq \delta$

$$\phi(x_0) - \phi(x) \leq 2M \leq Ch(x).$$

Συνεπώς η πρώτη ανισότητα στην (4.4) προκύπτει από τον ορισμό της $u(x)$ ως το *supremum* των κάτω συναρτήσεων.

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη ανισότητα της (4.4) θα διαπιστώσουμε πρώτα ότι η

$$\phi(x_0) + \varepsilon + Ch(x)$$

είναι άνω συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι αρμονική άρα και υπεραρμονική και

$$\phi(x_0) + \varepsilon + Ch(x) \Big|_{\partial\Omega} \geq \phi(x), \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Αυτό ισχύει διότι στο $\partial\Omega$ για $|x - x_0| < \delta$ έχουμε

$$\phi(x) - \phi(x_0) < \varepsilon$$

και για $|x - x_0| \geq \delta$

$$\phi(x) - \phi(x_0) \leq 2M \leq Ch(x).$$

Η δεύτερη ανισότητα της (4.4) προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε κάτω συνάρτηση είναι μικρότερη από κάθε άνω συνάρτηση.

Για $n = 2$ η μόνη διαφορά είναι ότι την $h(x)$ την ορίζουμε ως εξής

$$h(x) = \ln \frac{|x - y|}{R}$$

□

Συνοψίζοντας έχουμε:

Θεώρημα 4.4 (ύπαρξης και μοναδικότητας). *Αν η $\phi \in C^0(\partial\Omega)$ και το χωρίο Ω επαληθεύει την συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας, τότε το πρόβλημα Dirichlet*

$$\Delta u = 0 \text{ στο } \Omega, \quad u \Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

έχει μοναδική (κλασική) λύση.

Παρατήρηση. 1. Η συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας δεν είναι βέλτιστη.

2. Υπάρχουν χωρία για τα οποία το πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση *Laplace* δεν έχει λύση. Π.χ. για $n \geq 3$ χωρίο με αρκετά μυτερό εσωτερικό αγκάθι. Η αιχμή του αγκαθιού είναι το σημείο όπου δεν θα επαληθευτεί η συνοριακή συνθήκη.

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι αν η v είναι υπεραρμονική στο Ω τότε η $-v$ είναι υπεραρμονική στο Ω .
2. Αποδείξτε ότι αν $\Delta v \leq 0$ στο Ω τότε η v είναι υπεραρμονική στο Ω .
3. Αποδείξτε ότι αν η υπεραρμονική σε ένα χωρίο Ω συνάρτηση v λαμβάνει το ελάχιστό της σε εσωτερικό σημείο του Ω τότε είναι σταθερή.
4. Αποδείξτε ότι αν οι v_1, \dots, v_m είναι υπεραρμονικές σε ένα χωρίο Ω τότε και η συνάρτηση $v = \min(v_1, \dots, v_m)$ είναι υπεραρμονική στο Ω .
5. Αποδείξτε ότι αν η v είναι υπεραρμονική σε ένα χωρίο Ω τότε και η συνάρτηση $w = H_{B_0}[v]$ είναι υπεραρμονική (B_0 κάποια μπάλα στο Ω).
6. Γιατί η ακολουθία V_m στην απόδειξη του θεωρήματος 4.2 (*Perron*) είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

§ 5. Πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson σε γενικά χωρία

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$(5.1) \quad \Delta u(x) = f(x) \text{ στο } \Omega, \quad u \Big|_{\partial\Omega} = \phi(s).$$

Εισάγουμε την συνάρτηση

$$w(x) = \int_{\Omega} E(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Αν θα αποδείξουμε ότι

$$(5.2) \quad \Delta w(x) = f(x),$$

τότε το πρόβλημα (5.1) ανάγεται στο ομογενές. Πράγματι για την

$$v(x) = u(x) - w(x)$$

έχουμε

$$\Delta v(x) = 0 \text{ στο } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = \chi(s)$$

όπου

$$\chi = \phi - w|_{\partial\Omega}.$$

Την ύπαρξη τετοιας $v(x)$ την έχουμε αποδείξει και η λύση του (5.1) θα δίνεται από τον τύπο

$$u(x) = v(x) + \int_{\Omega} E(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Άρα αυτό που πρέπει να αποδείξουμε είναι η (5.2). Θα το κάνουμε για $f \in C^1(\Omega)$ και φραγμένη.

Θα χρειαστούμε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά μέρη. Ας γράψουμε το θεώρημα της απόκλισης αναλυτικά (παίρνοντας ξ αντί για x):

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n F_{i\xi_i} d\xi = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n F_i \nu_i ds$$

εδώ $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο στο $\partial\Omega$. Όπως προκύπτει από την απόδειξη του Θεωρήματος της απόκλισης ισχύει ότι

$$\int_{\Omega} F_{i\xi_i} d\xi = \int_{\partial\Omega} F_i \nu_i ds, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Αν θα πάρουμε $F_i(\xi) = h(\xi)g(\xi)$, όπου $h(\xi)$, $g(\xi)$ (παραγωγίσιμες) συναρτήσεις, τότε

$$\int_{\Omega} (hg)_{\xi_i} d\xi = \int_{\partial\Omega} hg \nu_i ds, \quad i = 1, \dots, n,$$

ή αλλιώς

$$(5.3) \quad \int_{\Omega} h_{\xi_i} g d\xi = \int_{\partial\Omega} hg \nu_i ds - \int_{\Omega} h g_{\xi_i} d\xi, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ο τύπος (5.3) είναι η ολοκλήρωση κατά μέρη.

Επιτρέφουμε στην απόδειξη της (5.2). Έστω $f \in C^1(\Omega)$, αφού $E_{x_i} = -E_{\xi_i}$ έχουμε

$$w_{x_i}(x) = \int_{\Omega} E_{x_i}(x, \xi) f(\xi) d\xi = - \int_{\Omega} E_{\xi_i}(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

Ολοκληρώνοντας κατα μέρη παίρνουμε

$$w_{x_i}(x) = - \int_{\partial\Omega} f(\xi) E(x, \xi) \nu_i ds + \int_{\Omega} f_{\xi_i}(\xi) E(x, \xi) d\xi.$$

Παραγωγίζουμε άλλη μια φορά

$$w_{x_i x_i}(x) = - \int_{\partial\Omega} f(\xi) E_{x_i}(x, \xi) \nu_i ds + \int_{\Omega} f_{\xi_i}(\xi) E_{x_i}(x, \xi) d\xi.$$

Άρα

$$(5.4) \quad \Delta w = - \int_{\partial\Omega} f(\xi) \sum_{i=1}^n E_{x_i}(x, \xi) \nu_i ds + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n f_{\xi_i}(\xi) E_{x_i}(x, \xi) d\xi.$$

Θα υπολογίσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης. Έστω

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \{|x - \xi| < \varepsilon\}$$

όπου το $\varepsilon > 0$ το επιλέγουμε ε.ω. $\{|x - \xi| < \varepsilon\} \subset \Omega$. Προφανώς

$$I \equiv \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n f_{\xi_i}(\xi) E_{x_i}(x, \xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^n f_{\xi_i}(\xi) E_{x_i}(x, \xi) d\xi.$$

Ολοκληρώνοντας κατα μέρη έχουμε

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f_{\xi_i} E_{x_i} d\xi = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f E_{x_i} \nu_i ds - \int_{\Omega_\varepsilon} f E_{x_i \xi_i} d\xi$$

(εδώ πήραμε τον τύπο (5.3) με $h = f$ και $g = E_{x_i}$). Συνεπώς έχουμε

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^n f E_{x_i} \nu_i ds - \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^n f E_{x_i \xi_i} d\xi \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} f \sum_{i=1}^n E_{x_i} \nu_i ds + \int_{\Omega_\varepsilon} f \sum_{i=1}^n E_{x_i x_i} d\xi \right)$$

(προφανώς $E_{x_i \xi_i} = -E_{x_i x_i}$).

Η E στο Ω_ε είναι αρμονική, συνεπώς

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f \sum_{i=1}^n E_{x_i} \nu_i ds =$$

$$(5.5) \quad \int_{\partial\Omega} f \sum_{i=1}^n E_{x_i} \nu_i ds - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-\xi|=\varepsilon} f \sum_{i=1}^n E_{x_i} \nu_i ds.$$

Ας υπολογίσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα, κάνοντας αντικατάσταση $\zeta = \xi - x$, έχουμε

$$\int_{|x-\xi|=\varepsilon} f(\xi) \sum_{i=1}^n E_{x_i}(|x - \xi|) \nu_i ds = \int_{|\zeta|=\varepsilon} f(\zeta + x) \sum_{i=1}^n E_{x_i}(|\zeta|) \nu_i ds.$$

Στο $|\zeta| = \varepsilon$ ισχύει

$$E_{x_i} = \frac{x_i - \xi_i}{\omega_n \varepsilon^n} = -\frac{\zeta_i}{\omega_n \varepsilon^n}, \text{ και } \nu = \frac{\zeta}{|\zeta|} = \frac{1}{\varepsilon}(\zeta_1, \dots, \zeta_n).$$

Συνεπώς στο $|\zeta| = \varepsilon$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^n E_{x_i} \nu_i = -\frac{|\zeta|^2}{\omega_n \varepsilon^{n+1}} = -\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|=\varepsilon} f(\zeta + x) \sum_{i=1}^n E_{x_i} \nu_i ds &= - \int_{|\zeta|=\varepsilon} f(\zeta + x) \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} ds = \\ &= -f(\zeta^* + x) \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|\zeta|=\varepsilon} ds = -f(\zeta^* + x) \rightarrow -f(x) \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα της Μεσης Τιμής ($\zeta^* \in \{|\zeta| = \varepsilon\}$) και το γεγονός ότι $\zeta^* \rightarrow 0$ καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$). Επιστρέφουμε στην σχέση (5.5) για να πάρουμε

$$I = \int_{\partial\Omega} f(\xi) \sum_{i=1}^n E_{x_i}(x, \xi) \nu_i ds + f(x).$$

Αντικαθιστώντας το I στην (5.4) θα έχουμε το ζητούμενο.

Αρα λαμβάνει χώρα το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 5.1 (υπαρξης και μοναδικότητας). *Αν η $\phi \in C^0(\partial\Omega)$, το χωρίο Ω επαληθεύει την συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας και η f είναι φραγμένη και $C^1(\Omega)$, τότε το πρόβλημα Dirichlet (5.1) έχει μοναδική (κλασική) λύση.*

Παρατήρηση. Το Θεώρημα 5.1 ισχύει και αν η f είναι φραγμένη και Hölder συνεχής συνάρτηση. Αν η f είναι μόνο συνεχής συνάρτηση τότε η εξίσωση $\Delta u = f$ μπορεί να μην έχει δυο φορές παραγωγίσιμη λύση, δηλαδή να μην έχει κλασική λύση.

§ 6. Αρχή του μεγίστου (ασθενής μορφή)

Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$(6.1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x),$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω είναι φραγμένο χωρίο στον \mathbf{R}^n και $a_{i,j}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, $f(x)$ δοσμένες φραγμένες στο χωρίο Ω συναρτήσεις. Θυμίζουμε ότι ένα χωρίο είναι πάντα ανοιχτό σύνολο.

Θα υποθέτουμε ότι η συνάρτηση u είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη άρα $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ συνεπώς χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα θεωρούμε ότι ο πίνακας

$$A(x) = \left(a_{i,j}(x) \right)_{i,j=1}^n$$

είναι συμμετρικός δηλαδή $a_{i,j} = a_{j,i}$. Πράγματι, ας πάρουμε $n = 2$:

$$\begin{aligned} & a_{11}u_{x_1x_1} + a_{12}u_{x_1x_2} + a_{21}u_{x_2x_1} + a_{22}u_{x_2x_2} = \\ & a_{11}u_{x_1x_1} + \frac{a_{12} + a_{21}}{2}u_{x_1x_2} + \frac{a_{12} + a_{21}}{2}u_{x_2x_1} + a_{22}u_{x_2x_2} = \\ & a_{11}u_{x_1x_1} + \tilde{a}_{12}u_{x_1x_2} + \tilde{a}_{21}u_{x_2x_1} + a_{22}u_{x_2x_2}, \end{aligned}$$

όπου

$$\tilde{a}_{12} = \tilde{a}_{21} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}.$$

Παρομοίως στις περισσότερες διαστάσεις

$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}.$$

Αφού ο πίνακας είναι συμμετρικός οι ιδιοτιμές του είναι όλες πραγματικές.

Η εξίσωση (6.1) ονομάζεται ελλειπτικού τύπου αν υπάρχουν σταθερές λ και Λ τ.ω. να ισχύει

$$(6.2) \quad 0 < \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{και} \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\},$$

εδω $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Η συνθήκη (6.2) ονομάζεται συνθήκη ελλειπτικότητας. Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με τις εξής, η συναρτήσεις $a_{i,j}(x)$ είναι φραγμένες και όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A(x)$ είναι θετικές για κάθε $x \in \Omega$.

Λέμε ότι ο πίνακας A είναι *θετικά ορισμένος* αν ισχύει η ανισότητα

$$0 < \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{και} \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

ή ισοδύναμα - όλες οι ιδιοτιμές του $A(x)$ για κάθε σταθεροποιημένο x είναι θετικές

Λέμε ότι ο πίνακας A είναι *μη αρνητικά ορισμένος* αν ισχύει η ανισότητα

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{και} \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\},$$

ή ισοδύναμα - όλες οι ιδιοτιμές του $A(x)$ για κάθε σταθεροποιημένο x είναι μη αρνητικές.

Λέμε ότι ο πίνακας A είναι *αρνητικά ορισμένος (μη θετικά)* αν ο πίνακας $-A$ είναι *θετικά ορισμένος (μη αρνητικά)*.

Για την Λαπλασιανή

$$\sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_i} = 0,$$

ο πίνακας A είναι ο μοναδιαίος και η (6.2) παίρνει τη μορφή

$$0 < \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \xi_i\xi_i \leq \Lambda|\xi|^2$$

που προφανώς ισχύει με $\lambda = \Lambda = 1$.

Για συντομία θα χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό

$$L u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u.$$

Λήμμα 6.1. A.) Έστω η $u(x) \in C^2(\Omega)$ και στο Ω ισχύει ότι

$$(6.3) \quad c(x) \leq 0 \text{ και } L u < 0 \text{ (} L u > 0 \text{)}.$$

Τότε η συνάρτηση $u(x)$ δεν λαμβάνει στο Ω αρνητικό ελάχιστο (θετικό μέγιστο).

B.) Αν επιπλέον $u(x) \in C(\bar{\Omega})$, τότε

$$\min\{0, \inf_{\partial\Omega} u\} \leq \inf_{\bar{\Omega}} u \left(\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \max\{0, \sup_{\partial\Omega} u\} \right)$$

Απόδειξη. A1.) Από τον τύπο του *Taylor* (ανάπτυγμα *Taylor* δεύτερης τάξης) γνωρίζουμε ότι αν στο σημείο $x_0 \in \Omega$ η συνάρτηση $u(x)$ λαμβάνει (αρνητικό) ελάχιστο τότε σε αυτό το σημείο ο πίνακας

$$\left(u_{x_i x_j}(x_0) \right)_{i,j=1}^n$$

είναι μη αρνητικά ορισμένος. Αφού ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος από την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι τότε ισχύει

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x_0) u_{x_i x_j}(x_0) \geq 0.$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι σε αυτό το σημείο επίσης έχουμε ότι

$$c(x_0) u(x_0) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n b_i(x_0) u_{x_i}(x_0) = 0$$

καταλήγουμε στο

$$L u(x_0) \geq 0,$$

άτοπο.

Συνεπώς η $u(x)$ δεν μπορεί να λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο στο Ω .

A2.) Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $u(x)$ λαμβάνει το θετικό της μέγιστο σε ένα σημείο $x^0 \in \Omega$, τότε σε αυτό το σημείο έχουμε

$$c(x^0) u(x^0) \leq 0, \quad \sum_{i=1}^n b_i(x^0) u_{x_i}(x^0) = 0 \text{ και } \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x^0) u_{x_i x_j}(x^0) \leq 0.$$

Επίσης από τον τύπο *Taylor* γνωρίζουμε ότι αν στο σημείο

$x^0 \in \Omega$ η συνάρτηση $u(x)$ λαμβάνει (θετικό) μέγιστο, τότε σε αυτό το σημείο ο πίνακας

$$\left(u_{x_i x_j}(x_0) \right)_{i,j=1}^n$$

είναι μη θετικά ορισμένος. Αφού ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος από την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι τότε ισχύει

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x^0) u_{x_i x_j}(x^0) \geq 0.$$

Καταλήγουμε στο

$$L u(x^0) \leq 0,$$

άτοπο.

Συνεπώς η $u(x)$ δεν μπορεί να λαμβάνει το θετικό της μέγιστο στο Ω .

B.) Για να αποδείξουμε τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι τώρα η u ή θα είναι μη αρνητική ή θα λαμβάνει το αρνητικό ελάχιστό της στο σύνορο του χωρίου. (Παρομοίως ή θα είναι μη θετική ή θα λαμβάνει το θετικό μέγιστό της στο σύνορο του χωρίου).

□

Πόρισμα. Στο Λήμμα 6.1 τη συνθήκη (6.3) μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με

$$c(x) < 0 \text{ και } L u \leq 0 \text{ (} L u \geq 0 \text{)}.$$

Λήμμα 6.2. A.) Έστω ότι η $u(x) \in C^2(\Omega)$ και στο Ω ισχύει ότι

$$c(x) \equiv 0, \text{ και } L u < 0 \text{ (} L u > 0 \text{)}.$$

Τότε η συνάρτηση $u(x)$ δεν λαμβάνει στο Ω ελάχιστο (μέγιστο).

B.) Αν επιπλέον $u(x) \in C(\bar{\Omega})$, τότε

$$\inf_{\partial\Omega} u = \inf_{\bar{\Omega}} u \quad \left(\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \right)$$

Η απόδειξη του Λήμματος 6.2 είναι παρόμοια με αυτή του Λήμματος 6.1.

Θεώρημα 6.1. (αρχή μεγίστου, ασθενής μορφή) Έστω ότι η $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ και στο Ω ισχύει

$$(6.3) \quad c(x) \equiv 0, \text{ και } L u \geq 0 \text{ (} L u \leq 0 \text{)}.$$

Τότε η συνάρτηση $u(x)$ λαμβάνει το μέγιστό της (ελάχιστό της) στο $\partial\Omega$ δηλαδή

$$\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\bar{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

Απόδειξη. Θα περιοριστούμε με την περίπτωση $L u \geq 0$ η περίπτωση $L u \leq 0$ αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Εστω $\gamma > 0$ μια σταθερά την οποία θα την προσδιορίσουμε πιο κάτω. Προφανώς

$$L e^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a_{11}(x) + \gamma b_1) e^{\gamma x_1} \geq \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0) e^{\gamma x_1}$$

όπου

$$b_0 = \frac{\max |b_1|}{\lambda}.$$

Επιλέγουμε τον αριθμό γ ε.ω

$$\gamma > b_0.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$L(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = Lu + \varepsilon L e^{\gamma x_1} > 0.$$

Άρα απο το Λήμμα 6.2 ισχύει οτι

$$\sup_{\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}).$$

Περνώντας στο όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ παίρνουμε το ζητούμενο :

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

□

(Βλ. για σύγκριση το Θεώρημα 7.1 B.)

Θα γενικεύσουμε τώρα το Θεώρημα 6.1 εις την περίπτωση $c(x) \leq 0$.

Λήμμα 6.3. Έστω οτι η $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ και στο Ω ισχύει

$$c(x) \leq 0 \text{ και } Lu \geq 0 \text{ (} Lu \leq 0 \text{)}.$$

Τότε

$$\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \max\{0, \sup_{\partial\Omega} u\} \quad \left(\min\{0, \inf_{\partial\Omega} u\} \leq \inf_{\bar{\Omega}} u \right)$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τον τελεστή

$$L_0 u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i}.$$

(Στο Λήμμα 6.2 και 6.3 ο L_0 συμπίπτει με τον L .)

Θα συμβολίσουμε με Ω^+ το υποσύνολο του Ω όπου $u > 0$ (προφανώς Ω^+ είναι ανοιχτό σύνολο). Δηλαδή

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}.$$

Αν $u \leq 0$, τότε το σύνολο Ω^+ είναι κενό. Έστω ότι το σύνολο Ω^+ δεν είναι κενό. Έχουμε οτι

$$L_0 u \geq -cu \geq 0 \text{ στο } \Omega^+.$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 6.3

$$(6.4) \quad \sup_{\bar{\Omega}^+} u = \sup_{\partial\Omega^+} u$$

Παρατηρούμε ότι

$$\partial\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$$

ήτοι στο $\partial\Omega^+$ η $u(x)$ ισούται με μηδέν. Επίσης

$$u(x) \leq 0 \text{ στο } \Omega \setminus \Omega^+$$

άρα

$$\sup_{\bar{\Omega}^+} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

Συνεπώς ή η συνάρτηση u λαμβάνει το μέγιστο στο $\partial\Omega$ ή είναι μη θετική, δηλαδή

$$\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \max\{0, \sup_{\partial\Omega} u\}.$$

2. Έστω τώρα

$$c(x) \leq 0 \text{ και } Lu \leq 0.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με τη διαφορά ότι αντί για Ω^+ παίρνουμε Ω^- - υποσύνολο του Ω όπου $u < 0$.

□

Πόρισμα α.) Αν στο Λήμμα 6.3 έχουμε ότι

$$Lu = 0,$$

τότε

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|$$

Πόρισμα β.) Αν στο Λήμμα 6.3 έχουμε ότι $Lu \leq 0$ και

$$\inf_{\partial\Omega} u \geq 0,$$

τότε

$$\inf_{\Omega} u \geq 0.$$

Πόρισμα γ.) Αν στο Λήμμα 6.3 έχουμε ότι $Lu \geq 0$ και

$$\sup_{\partial\Omega} u \leq 0$$

τότε

$$\sup_{\Omega} u \leq 0.$$

Θεώρημα 6.2(σύγκρισης) Υποθέτουμε ότι στο Ω ισχύει η συνθήκη (6.2) και $c(x) \leq 0$. Έστω οι συναρτήσεις $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

A.) Αν

$$Lu \geq Lv \text{ στο } \Omega, \quad u \leq v \text{ στο } \partial\Omega,$$

τότε

$$u \leq v \text{ στο } \Omega.$$

B.) Αν

$$Lu = Lv \text{ στο } \Omega, \quad u = v \text{ στο } \partial\Omega,$$

τότε

$$u = v \text{ στο } \Omega.$$

Η απόδειξη είναι προφανής.

§ 7. Αρχή του μεγίστου (ισχυρή μορφή)

Λήμμα 7.1. Έστω $B_R(y)$ μπάλα με ακτίνα R και κέντρο στο σημείο y . Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(B_R(y)) \cap C^1(\bar{B}_R(y))$ και

$$Lu(x) \leq 0, c(x) \leq 0 \text{ για } x \in B_R(y).$$

Αν η u φλαμβάνει στο $x_0 \in \partial B_R(y)$ το αρνητικό της ελάχιστο και $u(x) > u(x_0) \forall x \in B_R(y)$, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

(εδώ ν μοναδιαίο κάθετο ως προς $\partial B_R(y)$)

Απόδειξη. Για $0 < \rho < R$ εισάγουμε την συνάρτηση

$$w(x) = w(r) = e^{-\delta R^2} - e^{-\delta r^2} < 0$$

όπου

$$R^2 > r^2 = |x - y|^2 = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 > \rho^2$$

και δ θετική σταθερά την οποία θα την επιλέξουμε αργότερα. Προφανώς

$$Lw = -e^{-\delta r^2} \left[4\delta^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\delta \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_i(x_i - y_i)) \right] + cw$$

Θεωρούμε τώρα το χωρίο $D = B_R(y) \setminus B_\rho(y)$. Επιλέγουμε την σταθερά δ ε.ω. στο D να ισχύει

$$Lw < 0.$$

Αυτό μπορούμε να το κάνουμε διότι

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) \geq \lambda |x - y|^2 > \lambda \rho^2$$

αρα

$$Lw < -e^{-\delta r^2} \left[4\delta^2 \lambda \rho^2 - 2\delta \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_i(x_i - y_i)) \right] - ce^{-\delta r^2},$$

επιλέγοντας δ αρκετά μεγάλο παίρνουμε το ζητούμενο.

Για την συνάρτηση

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x)$$

με $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό (θα το επιλέξουμε παρακάτω) στο D έχουμε

$$L(u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x)) \leq -cu(x_0) < 0.$$

Στο σύνορο του D ισχύει

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x) \Big|_{\partial D} \geq 0.$$

Πράγματι στο $\partial B_R(y)$ έχουμε $w = 0$, στο $\partial B_\rho(y)$ ισχύει $u(x) - u(x_0) > 0$ αρα μπορούμε να επιλέξουμε ε (αρκετά μικρό) ε.ω.

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x) \Big|_{\partial B_\rho(y)} \geq 0.$$

Συνεπώς (βλ. Λήμμα 6.3, Πρόρισμα β.)) έχουμε

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x) \geq 0 \text{ στο } D.$$

Δηλαδή στο D (αφού προφανώς $w(R) = 0$) ισχύει ότι

$$u(x) - u(x_0) \geq -\varepsilon w(x) = \varepsilon(w(R) - w(r)) \Leftrightarrow$$

$$u(x_0) - u(x) \leq -\varepsilon(w(R) - w(r)) \Leftrightarrow$$

$$(7.1) \quad \frac{u(x_0) - u(x)}{|x_0 - x|} \leq -\varepsilon \frac{w(R) - w(r)}{|x_0 - x|}.$$

Ας πάρουμε το x να βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα σημεία y και x_0 (δηλαδή πάνω στην ακτίνα), τότε πρώτων

$$|x_0 - x| = R - r,$$

δεύτερων

$$r \rightarrow R \text{ καθώς } x \rightarrow x_0.$$

Άρα η (7.1) γράφεται ως

$$\frac{u(x_0) - u(x)}{|x_0 - x|} \leq -\varepsilon \frac{w(R) - w(r)}{R - r}.$$

Από την τελευταία σχέση, περνώντας στο όριο καθώς $x \rightarrow x_0$, παίρνουμε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq -\varepsilon w'(R) < 0.$$

Προφανώς $w'(R) = 2\delta R e^{-\delta R^2} > 0$.

□

Παρατήρηση. Το ότι

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq 0$$

είναι προφανές. Το Λήμμα μας δίνει γνήσια ανισότητα.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και τα ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 7.2. Έστω $B_R(y)$ μπάλα με ακτίνα R και κέντρο στο σημείο y . Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(B_R(y)) \cap C^1(\overline{B_R}(y))$ και

$$L u(x) \geq 0, c(x) \leq 0 \text{ για } x \in B_R(y).$$

Αν η u λαμβάνει στο $x_0 \in \partial B_R(y)$ το θετικό της μέγιστο και $u(x) < u(x_0) \forall x \in B_R(y)$, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Λήμμα 7.3. Έστω $B_R(y)$ μπάλα με ακτίνα R και κέντρο στο σημείο y . Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(B_R(y)) \cap C^1(\overline{B_R}(y))$ και

$$L u(x) \leq 0, c(x) \equiv 0 \text{ για } x \in B_R(y).$$

Αν η u λαμβάνει στο $x_0 \in \partial B_R(y)$ το ελάχιστο της και $u(x) > u(x_0) \forall x \in B_R(y)$, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Λήμμα 7.4. Έστω $B_R(y)$ μπάλα με ακτίνα R και κέντρο στο σημείο y . Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(B_R(y)) \cap C^1(\overline{B_R}(y))$ και

$$L u(x) \geq 0, c(x) \equiv 0 \text{ για } x \in B_R(y).$$

Αν η u λαμβάνει στο $x_0 \in \partial B_R(y)$ το μέγιστο της και $u(x) < u(x_0) \forall x \in B_R(y)$, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Παρατήρηση. Είναι ευκολο να διαπιστώσει κανείς ότι τα παραπάνω λήμματα λαμβάνουν χώρα και εις την περίπτωση που αντί για μπάλα παίρνουμε τυχαίο χωρίο Ω που στο σημείο $x_0 \in \partial\Omega$ επαληθεύει την συνθήκη της εσωτερικής σφαίρας.

Είμαστε τώρα έτοιμοι για να αποδείξουμε την ισχυρή αρχή του μεγίστου.

Θεώρημα 7.1 (ισχυρή αρχή μεγίστου)

A. Έστω

$$c(x) \leq 0 \text{ και } Lu \leq 0 \text{ (} Lu \geq 0 \text{) στο } \Omega.$$

Τότε η $u(x)$ δεν λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο (θετικό μέγιστο) στο Ω αν δεν είναι σταθερή.

B. Έστω

$$c(x) \equiv 0 \text{ και } Lu \leq 0 \text{ (} Lu \geq 0 \text{) στο } \Omega.$$

Τότε η $u(x)$ δεν λαμβάνει το ελάχιστο (μέγιστο) της στο Ω αν δεν είναι σταθερή.

Παρατήρηση. Όπως είχαμε πει το Ω είναι ανοιχτό σύνολο άρα όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά. Τουτέστιν όταν λέμε π.χ. "η u δεν λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο στο Ω " εννοούμε στα εσωτερικά σημεία του Ω .

Απόδειξη (του Θεωρήματος 7.1). Θα περιοριστούμε με την απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού για το αρνητικό ελάχιστο, τα υπόλοιπα αποδεικνύονται παρομοίως.

Δηλαδή έχουμε στι

$$c(x) \leq 0 \text{ και } Lu \leq 0 \text{ στο } \Omega$$

και ας υποθέσουμε ότι η u λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο έστω m , σε κάποιο σημείο του Ω και έστω

$$E = \{x \in \Omega : u(x) = m\} \text{ (} E \text{ - κλειστό σύνολο)}.$$

Αν η u δεν είναι σταθερή τότε $E \subset \Omega$. Έστω $\Omega^+ = \Omega \setminus E \subset \Omega$, δηλαδή Ω^+ αποτελείται απο εκείνα τα σημεία του Ω όπου ισχύει $u(x) > m$. Υπάρχει $x_0 \in \partial E$ και μπάλα $B_\varepsilon(y) \subset \Omega^+$ τ.ω.

$$\overline{B_\varepsilon(y)} \cap E = \{x_0\}.$$

Αρα ισχύει το Λήμμα 7.1, απο την άλλη, αφού το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Ω έχουμε

$$\nabla u(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = 0,$$

άτοπο.

□

Πόρισμα.

A. Έστω

$$c(x) \leq 0 \text{ και } Lu = 0 \text{ στο } \Omega.$$

Τότε η u δεν λαμβάνει ούτε το αρνητικό της ελάχιστο ούτε το θετικό της μέγιστο στο Ω αν δεν είναι σταθερή.

B. Έστω

$$c(x) \equiv 0 \text{ και } Lu \leq 0 \text{ (} Lu \geq 0 \text{) στο } \Omega.$$

Τότε η u δεν λαμβάνει ούτε το ελάχιστο ούτε το μέγιστο της στο Ω αν δεν είναι σταθερή.

Είναι προφανές ότι από το Πόρισμα προκύπτει και η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος *Dirichlet* για την εξίσωση (6.1).

Παρατήρηση. Αν τη συνθήκη (6.2) θα την αντικαταστήσουμε με πιο γενική

$$0 \leq \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

(η εξίσωση σε αυτήν την περίπτωση ονομάζεται *εκφυλισμένη*) τότε εν γένει η αρχή του μεγίστου (και ως συνέπεια η μοναδικότητα) παραβιάζεται. Πράγματι, θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$|x|^2 \Delta u - n x \cdot \nabla u = 0 \text{ για } |x| < R, \text{ και } u|_{|x|=R} = 0.$$

Εδώ έχουμε

$$a_{ii} = |x|^2, \quad a_{ij} = 0 \text{ για } i \neq j,$$

συνεπώς

$$0 \leq |x|^2|\xi|^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

Προφανώς οι

$$u(x) \equiv 0 \text{ και } u(x) = |x|^2 - R^2$$

είναι λύσεις το προβλήματος. Παρατηρούμε ότι η $u = |x|^2 - R^2$ λαμβάνει το ελάχιστό της στο $|x| = 0$.

§ 8. *A priori* εκτιμήσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα εισάγουμε την έννοια της *a priori* εκτίμησης, που σημαίνει εκτίμηση εκ των προτέρων.

A priori εκτίμηση ονομάζουμε την εκτίμηση της λύσης υπο την προϋπόθεση ύπαρξής της. Δηλαδή θέλουμε να βρούμε μια σταθερά η οποία θα εξαρτάται αποκλειστικά από τα δεδομένα του προβλήματος τ.ω. κάποια νόρμα της (κλασικής) λύσης εφόσον υπάρχει θα φράσσεται με αυτή τη σταθερά.

Έχουμε ήδη συναντήσει τετοιου είδους εκτιμήσεις. Π.χ. από το Λήμμα 6.3 (Πόρισμα α.)) εύκολα προκύπτει το συμπέρασμα ότι αν η λύση του προβλήματος

$$Lu = 0 \text{ στο } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi$$

υπάρχει (που δεν το ξέρουμε προς το παρόν) τότε ισχύει

$$(8.1) \quad |u| \leq C_0 = \sup_{\partial\Omega} |\phi|,$$

που είναι *a priori* εκτίμηση.

Το πόσο σημαντικό ρόλο παίζουν οι *a priori* εκτιμήσεις (των παραγώγων πρώτης και δευτερης τάξης) θα το καταλάβουμε λίγο αργότερα στην §10 και §12.

Εδώ θα περιοριστούμε με την εκτίμηση της λύσης για την γενική περίπτωση δηλαδή για το πρόβλημα

$$(8.2) \quad Lu = f \text{ στο } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi, \quad c(x) \leq 0.$$

Λήμμα 8.1. Για την λύση του προβλήματος (8.2) (εφόσον υπάρχει) ισχύει η εκτίμηση

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\phi| + C \sup_{\Omega} |f|$$

όπου η σταθερά C (την οποία θα την βρούμε σε κλειστή μορφή) εξαρτάται μόνο από το μέγεθος του χωρίου Ω σε μια κατεύθυνση.

Απόδειξη. Το χωρίο Ω είναι φραγμένο, αρα υπάρχει ένα $d \leq 0$ τ.ω.

$$x_1 + d \geq 0 \text{ για όλα τα } x \in \Omega.$$

Επιλέγουμε ένα γ ε.ω.

$$\gamma > x_1 + d.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\omega(x_1) = e^{\beta\gamma} - e^{\beta(x_1+d)} > 0,$$

όπου την σταθερά $\beta > 0$ θα επιλέξουμε παρακάτω. Προφανώς ισχύει

$$L\omega(x_1) = -e^{\beta(x_1+d)} (a_{11}\beta^2 + b_1\beta) + c\omega.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$a_{11} \geq \lambda, \quad c \leq 0, \quad \omega > 0$$

έχουμε

$$L\omega(x_1) \leq -e^{\beta(x_1+d)} (\lambda\beta^2 + b_1\beta).$$

Προφανώς επιλέγοντας β αρκετά μεγάλο θα έχουμε

$$L\omega(x_1) \leq -1.$$

Επιλέγουμε τέτοιο β και θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$v_1(x) = h(x_1) - u(x) \quad \text{και} \quad v_2(x) = h(x_1) + u(x)$$

όπου

$$h(x_1) = \omega(x_1) \sup_{\bar{\Omega}} |f| + \sup_{\partial\Omega} |\phi|.$$

Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύει ότι

$$Lv_i = Lh - Lu = \sup_{\Omega} |f| L\omega + c(x) \sup_{\partial\Omega} |\phi| - f \leq -\sup_{\Omega} |f| - f \leq 0,$$

$$Lv_i = Lh + Lu = \sup_{\Omega} |f| L\omega + c(x) \sup_{\partial\Omega} |\phi| + f \leq -\sup_{\Omega} |f| + f \leq 0.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$v_i \geq 0 \text{ στο } \partial\Omega$$

αφού

$$v_i \Big|_{\partial\Omega} = \omega(x_1) \Big|_{\partial\Omega} \sup |f| + \sup |\phi| \pm \phi \geq \sup |\phi| \pm \phi \geq 0.$$

Συνεπώς (βλ. Πρόρισμα β.) στο Λήμμα 6.3)

$$v_i \geq 0 \text{ στο } \Omega \Leftrightarrow -h(x_1) \leq u(x) \leq h(x_1).$$

Δηλαδή

$$|u(x)| \leq h(x_1) \leq \sup_{\partial\Omega} |\phi| + C \sup_{\Omega} |f|$$

όπου

$$C = \sup \omega(x_1).$$

□

Πόρισμα. Η λύση του προβλήματος *Dirichlet* (8.2) (εφόσον υπάρχει) είναι μοναδική

Απόδειξη. Πράγματι, έστω ότι εκτός από την λύση u_1 υπάρχει και κάποια άλλη λύση, έστω η u_2 . Δηλαδή

$$L u_1 = f, \quad L u_2 = f \text{ στο } \Omega, \quad u_1 \Big|_{\partial\Omega} = \phi, \quad u_2 \Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Για $u \equiv u_1 - u_2$ έχουμε

$$L u = 0 \text{ στο } \Omega, \quad u \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

άρα από το Λήμμα 8.1

$$\sup_{\Omega} |u| \leq 0 \Leftrightarrow u \equiv 0 \Leftrightarrow u_1 \equiv u_2.$$

□

Ασκήσεις

Στις παρακάτω ασκήσεις το χωρίο Ω επαληθεύει τη συνθήκη της εσωτερικής σφαίρας και το ν μοναδιαίο κάθετο στο S_2 .

1. Στο χωρίο Ω θεωρούμε ένα ελλειπτικό τελεστή L με $c(x) \leq 0$. Έστω $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$. Τι μπορούμε να πούμε για την λύση του προβλήματος

$$L u = 0 \text{ στο } \Omega, \quad u \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{S_2} = 0.$$

2. Στο χωρίο Ω θεωρούμε ένα ελλειπτικό τελεστή L . Έστω $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$. Τι μπορούμε να πούμε για την λύση του προβλήματος

$$L u = 0 \text{ στο } \Omega, \quad u \Big|_{S_1} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{S_2} = 0$$

αν

α) $c(x) \equiv 0$, β) $c(x) \leq 0$.

3. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$L u = f(x) \text{ στο } \Omega, \quad u \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Αποδείξτε ότι εάν $c(x) \leq -c_0 < 0$ στο $\bar{\Omega}$, τότε ισχύει

$$\min\left\{0, \frac{\min_{\Omega}(-f(x))}{c_0}\right\} \leq u(x) \leq \max\left\{0, \frac{\max_{\Omega}(-f(x))}{c_0}\right\}.$$

4. Έστω $v(x)$ λύση του προβλήματος

$$Lv = f(x) \text{ στο } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = \phi$$

και $u(x)$ λύση του προβλήματος

$$Lu = g(x) \text{ στο } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \chi.$$

Αποδείξτε ότι αν $f(x) \geq g(x)$ στο Ω και $\phi|_{\partial\Omega} \leq \chi|_{\partial\Omega}$ τότε

$$v(x) \leq u(x) \text{ στο } \bar{\Omega}.$$

5. Έστω $u(x)$ λύση του προβλήματος

$$Lu = -1 \text{ στο } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 2, \quad (c(x) \leq 0)$$

Προσδιορίστε τις σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε

$$(*) \quad c_1 \leq u(x) \leq c_2.$$

6. Βελτιώστε την εκτίμηση (*) στο πρόβλημα 5. αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $c(x) \equiv -1$.

7. Αποδείξτε ότι οι συνθήκες (6.3) μπορούν να αντικατασταθούν με

$$c(x) < 0, \quad Lu \leq 0 \quad (Lu \geq 0).$$

8. Αποδείξτε ότι αν στις υποθέσεις του Λήμματος 6.1 επιπλέον $u \in C(\bar{\Omega})$ τότε $u \geq 0$ στο $\partial\Omega$ συνεπάγεται $u \geq 0$ στο Ω ($u \leq 0$ στο $\partial\Omega$ συνεπάγεται $u \leq 0$ στο Ω).

§ 9. Μερικά στοιχεία από την Συναρτησιακή Ανάλυση

Θεωρούμε ένα σύνολο στοιχείων \mathcal{V} στο οποίο είναι ορισμένες η πράξεις πρόσθεση "+" και πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό "·" έτσι ώστε αν

α. $f_1 \in \mathcal{V}$ και $f_2 \in \mathcal{V}$ τότε και το άθροισμα $f_1 + f_2 \in \mathcal{V}$,

β. $f \in \mathcal{V}$ και $C \in \mathbf{R}$ τότε και το γινόμενο $C \cdot f \in \mathcal{V}$.

Το σύνολο αυτό ονομάζεται γραμμικός χώρος αν ισχύουν τα παρακάτω

1. $f_1 + f_2 = f_2 + f_1 \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{V}$,
2. $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3) \quad \forall f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{V}$,
3. στο \mathcal{V} υπάρχει μηδενικό στοιχείο \mathbf{o} τέτοιο ώστε $\mathbf{o} \cdot f = \mathbf{o} \quad \forall f \in \mathcal{V}$,
4. $(C_1 + C_2) \cdot f = C_1 \cdot f + C_2 \cdot f \quad \forall f \in \mathcal{V}$ και $\forall C_1, C_2 \in \mathbf{R}$,
5. $C \cdot (f_1 + f_2) = C \cdot f_1 + C \cdot f_2 \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{V}$ και $\forall C \in \mathbf{R}$,
6. $(C_1 C_2) \cdot f = C_1 \cdot (C_2 \cdot f) \quad \forall f \in \mathcal{V}$ και $\forall C_1, C_2 \in \mathbf{R}$,
7. $1 \cdot f = f \quad \forall f \in \mathcal{V}$.

Παραδείγματα γραμμικών χώρων:

το σύνολο $C^k(\Omega)$ των k φορές συνεχώς παραγωγίσιμων στο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ συναρτήσεων ($k = 0, 1, 2, \dots$),

το σύνολο $C_0^k(\Omega)$ των k φορές συνεχώς παραγωγίσιμων στο Ω συναρτήσεων που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$,

το σύνολο $C^\alpha(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1)$ των *Hölder* συνεχών στο Ω συναρτήσεων,

το σύνολο $C_0^\alpha(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1)$ των *Hölder* συνεχών στο Ω συναρτήσεων που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$,

το σύνολο $C^{k+\alpha}(\Omega)$ των k φορές συνεχώς παραγωγίσιμων στο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ συναρτήσεων, τ.ω. όλες οι παράγωγοι k τάξης να είναι *Hölder* συνεχείς στο Ω ,

το σύνολο $C_0^{k+\alpha}(\Omega)$ που είναι υποσύνολο του $C^{k+\alpha}(\Omega)$ με επιπλέον προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$.

Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση f είναι *Hölder* συνεχής στο Ω αν υπάρχει σταθερά $K > 0$ και $\alpha \in (0, 1)$ τ.ω. για κάθε $x, y \in \Omega$ ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

με K και α να μην εξαρτώνται από x, y .

Γραμμικός χώρος με νόρμα (ή μέτρο) ονομάζεται γραμμικός χώρος στον οποίον ορίζεται ένα συναρτισσειδές $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ δηλαδή μια απεικόνιση από τον \mathcal{V} στον \mathbf{R} :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{V}} : f \in \mathcal{V} \rightarrow \|f\|_{\mathcal{V}} \quad \forall f \in \mathcal{V}$$

τετοια ώστε

1. $\|f\|_{\mathcal{V}} \geq 0$ και $\|f\|_{\mathcal{V}} = 0$ αν και μόνο αν $f = \mathbf{0}$ (μηδενικό στοιχείο),
2. $\|Cf\|_{\mathcal{V}} = |C| \|f\|_{\mathcal{V}}$, $\forall f \in \mathcal{V}$ και $\forall C \in \mathbf{R}$,
3. $\|f_1 + f_2\|_{\mathcal{V}} \leq \|f_1\|_{\mathcal{V}} + \|f_2\|_{\mathcal{V}} \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{V}$.

Ο αριθμός $\|f\|_{\mathcal{V}}$ ονομάζεται νόρμα (ή μέτρο) του στοιχείου f .

Λέμε ότι η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{V}$ συγκλίνει στο στοιχείο $f \in \mathcal{V}$ αν

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{V}} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Λέμε ότι η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{V}$ είναι ακολουθία *Cauchy* αν

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{V}} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } n, m \rightarrow \infty.$$

Ο χώρος \mathcal{V} είναι *πλήρης* αν το όριο κάθε ακολουθίας *Cauchy* ανήκει στον \mathcal{V} . Πλήρης γραμμικός χώρος με νόρμα ονομάζεται *χώρος Banach*.

Ο χώρος $C^0(\Omega)$ (το σύνολο των συνεχών στο Ω συναρτήσεων) γίνεται χώρος *Banach* αν θα τον εφοδιάσουμε με την νόρμα

$$\|f\|_{C^0(\Omega)} = \max_{\Omega} |f|,$$

Ο χώρος $C^1(\Omega)$ (και $C_0^1(\Omega)$) γίνεται χώρος *Banach* αν θα τον εφοδιάσουμε με την νόρμα

$$\|f\|_{C^1(\Omega)} = \|f\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|f_{x_i}\|_{C^0(\Omega)}.$$

Ο χώρος $C^2(\Omega)$ (και $C_0^2(\Omega)$) γίνεται χώρος *Banach* αν θα τον εφοδιάσουμε με την νόρμα

$$\|f\|_{C^2(\Omega)} = \|f\|_{C^1(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \|f_{x_i x_j}\|_{C^0(\Omega)},$$

παρομοίως και ο χώρος $C^k(\Omega)$ (και $C_0^k(\Omega)$) για $k = 3, 4, \dots$

Ο χώρος $C^\alpha(\Omega)$ (και $C_0^\alpha(\Omega)$) γίνεται χώρος *Banach* αν θα τον εφοδιάσουμε με την νόρμα

$$\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} = \|f\|_{C^0(\Omega)} + \tilde{K}$$

όπου

$$\tilde{K} = \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Ο χώρος $C^{2+\alpha}(\Omega)$ (και $C_0^{2+\alpha}(\Omega)$) γίνεται χώρος *Banach* αν θα τον εφοδιάσουμε με την νόρμα

$$\|f\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{C^2(\Omega)} + \mathbf{K},$$

όπου

$$\mathbf{K} = \sup_{x', x'' \in \Omega, x' \neq x''} \sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{x_i x_j}(x') - f_{x_i x_j}(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}.$$

Έστω \mathbf{T} τελεστής που δρα από τον \mathcal{V} στον \mathcal{V} , δηλαδή απεικονίζει τον \mathcal{V} στον \mathcal{V}

$$\mathbf{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}.$$

Ορισμός. Λέμε ότι ο \mathbf{T} είναι *συστολή* αν υπάρχει ένας θετικός αριθμός $\gamma < 1$ τ.ω.

$$\|\mathbf{T}f - \mathbf{T}g\|_{\mathcal{V}} \leq \gamma \|f - g\|_{\mathcal{V}}, \forall f, g \in \mathcal{V}.$$

Σταθερό σημείο της απεικόνισης \mathbf{T} ονομάζουμε ένα στοιχείο $f \in \mathcal{V}$ τ.ω. ισχύει

$$\mathbf{T}f = f.$$

Θεώρημα 9.1. Έστω $\mathbf{T} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ συστολή και \mathcal{B} χώρος *Banach*. Τότε ο τελεστής \mathbf{T} έχει μοναδικό σταθερό σημείο στον \mathcal{B} .

Απόδειξη. 1. Υπαρξη (μεθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων).

Έστω f_0 τυχαίο στοιχείο του \mathcal{B} . Κατασκευάζουμε την ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{B}$ με την σχέση

$$f_n = \mathbf{T}^n f_0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

δηλαδή

$$f_1 = \mathbf{T}f_0, \quad f_2 = \mathbf{T}f_1 = \mathbf{T}(\mathbf{T}f_0) \equiv \mathbf{T}^2 f_0, \quad f_3 = \mathbf{T}f_2 = \mathbf{T}(\mathbf{T}^2 f_0) \equiv \mathbf{T}^3 f_0, \dots$$

Για $n \geq m$ έχουμε

$$\|f_n - f_m\| = \|f_{m+1} - f_m + f_{m+2} - f_{m+1} + \dots + f_{n-1} - f_{n-2} + f_n - f_{n-1}\| \leq$$

$$\sum_{k=m+1}^n \|\mathbf{T}^{k-1} f_1 - \mathbf{T}^{k-1} f_0\| \leq \sum_{k=m+1}^n \gamma^{k-1} \|f_1 - f_0\| =$$

$$\|f_1 - f_0\| \sum_{k=m+1}^n \gamma^{k-1} = \|f_1 - f_0\| \frac{\gamma^m - \gamma^n}{1 - \gamma} \leq$$

$$\|f_1 - f_0\| \frac{\gamma^m}{1 - \gamma} \rightarrow 0 \text{ καθώς } m \rightarrow \infty \text{ (} n \geq m \text{)}$$

Άρα η ακολουθία $\{f_n\}$ είναι ακολουθία *Cauchy* και συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $f \in \mathcal{B}$. Προφανώς

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}f_n = \mathbf{T}f$$

διότι

$$\|\mathbf{T}f_n - \mathbf{T}f\| \leq \gamma \|f_n - f\| \rightarrow 0.$$

Επίσης

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1} = f,$$

Συνεπώς

$$\mathbf{T}f = f.$$

2. Μοναδικότητα.

Έστω ότι υπάρχουν δυο σταθερά σημεία f και g με $f \neq g$, δηλαδή $\mathbf{T}f = f$, $\mathbf{T}g = g$ και $\|f - g\| > 0$. Έχουμε

$$\|f - g\| = \|\mathbf{T}f - \mathbf{T}g\| \leq \gamma \|f - g\| < \|f - g\|,$$

άτοπο. Άρα $f = g \Leftrightarrow \|f - g\| = 0$.

□

Έστω V_1 και V_2 γραμμικοί χώροι με νόρμα. Λέμε ότι η απεικόνιση

$$L : V_1 \rightarrow V_2$$

είναι *γραμμικός τελεστής* αν

$$L(C_1u_1 + C_2u_2) = C_1L(u_1) + C_2L(u_2)$$

για κάθε $u_1, u_2 \in V_1$ και για κάθε $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Το σύνολο των γραμμικών τελεστών ορισμένων σε κάποιο γραμμικό χώρο με νόρμα είναι επίσης γραμμικός χώρος. Ορίζουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό με προφανή τρόπο:

$$L = L_1 + L_2 \Leftrightarrow Lu = L_1u + L_2u,$$

$$(CL)u = CLu.$$

Παράδειγμα. Ο τελεστής Δ είναι γραμμικός τελεστής που δρα από C^k στο C^{k-2}

$$\Delta : u \in C^k \rightarrow f = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \in C^{k-2}.$$

Ο γραμμικός τελεστής $L : V_1 \rightarrow V_2$ ονομάζεται *φραγμένος* αν

$$\|L\| < \infty,$$

όπου

$$\|L\| = \sup_{u \in V_1, u \neq 0} \frac{\|L(u)\|_{V_2}}{\|u\|_{V_1}}.$$

Προφανώς θεωρούμε ότι ο L είναι ορισμένος σε ολό το V_1 .

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το συναρτισσοειδές

$$\|\cdot\| : L \rightarrow \|L\| \in \mathbf{R}$$

είναι νόρμα και συνεπώς το σύνολο των γραμμικών τελεστών ορισμένων σε κάποιο γραμμικό χώρο με νόρμα είναι επίσης γραμμικός χώρος με νόρμα.

Από την Συναρτησιακή Ανάλυση γνωρίζουμε ότι ο γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι συνεχής.

Ορισμός 1. Λέμε ότι ο τελεστής (ή η απεικόνιση) $L : B \rightarrow V$ (όπου B και V γραμμικοί χώροι με νόρμα) είναι *επί* αν για κάθε $f \in V$ υπάρχει $u \in B$ τ.ω. $f = Lu$. Με άλλα λόγια για κάθε $f \in V$ η εξίσωση $Lu = f$ έχει λύση (που ανήκει στο B).

2. Λέμε ότι ο τελεστής $L : B \rightarrow V$ είναι *ένα-προς-ένα* αν για κάθε $f \in V$ υπάρχει ένα και μόνο ένα $u \in B$ τ.ω. $f = Lu$, και αντιστρόφως.

Θεώρημα 9.2. Έστω B χώρος Banach, V γραμμικός χώρος με νόρμα και L_0, L_1 γραμμικοί φραγμένοι τελεστές

$$L_0 : B \rightarrow V, \quad L_1 : B \rightarrow V.$$

Για κάθε $t \in [0, 1]$ ορίζουμε τον τελεστή L_t :

$$L_t = (1 - t)L_0 + tL_1.$$

Έστω ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τ.ω. για κάθε $t \in [0, 1]$ και για κάθε $u \in B$ ισχύει

$$(9.1) \quad \|u\|_B \leq C \|L_t u\|_V.$$

Τότε ο τελεστής $L_1 : B \rightarrow V$ είναι *επί* αν και μόνο αν είναι *επί* ο τελεστής $L_0 : B \rightarrow V$.

(Η σταθερά C στην ανισότητα (9.1) είναι ανεξάρτητη του u και του t)

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $s \in [0, 1]$ (π.χ. για $s = 0$) ο τελεστής L_s είναι *επί*. Τότε ο L_s είναι *ένα-προς-ένα* λόγω της (9.1) και της γραμμικότητας του L_s . Πράγματι έχουμε για κάθε $u_1, u_2 \in B$

$$\|u_1 - u_2\|_B \leq C \|L_s(u_1 - u_2)\|_V = C \|L_s u_1 - L_s u_2\|_V,$$

αρα αν $L_s u_1 = L_s u_2$, τότε $u_1 = u_2$.

Αφού ο L_s είναι *ένα-προς-ένα*, ορίζεται ο τελεστής L_s^{-1} (αντίστροφη απεικόνιση από το V στο B) ο οποίος είναι γραμμικός και φραγμένος. Θεωρούμε την εξίσωση

$$(9.2) \quad L_t u = f$$

με τυχαίο t . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο L_t είναι *επί*. Εδώ f δοσμένο στοιχείο (του V) και η u λύση της εξίσωσης που θέλουμε να βρούμε (στο B). Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο L_t είναι *επί*. Η (9.2) μπορεί να γραφτεί ως

$$L_s u = f + L_s u - L_t u$$

ή

$$L_s u = f + (L_s - L_t)u$$

ή (αφου $L_t = (1 - t)L_0 + tL_1$ και $L_s = (1 - s)L_0 + sL_1$)

$$L_s u = f + (t - s)L_0 u - (t - s)L_1 u.$$

Εφαρμόσουμε τον L_s^{-1} στην τελευταία σχέση και παίρνουμε

$$u = L_s^{-1}(f + (t - s)L_0 u - (t - s)L_1 u)$$

και, εφόσον ο L_s^{-1} είναι γραμμικός,

$$(9.3) \quad u = L_s^{-1}f + (t - s)L_s^{-1}[L_0 - L_1]u.$$

Ορίζουμε τον τελεστή \mathbf{T} ως

$$\mathbf{T} \equiv L_s^{-1}f + (t - s)L_s^{-1}[L_0 - L_1],$$

τότε η εξίσωση (9.3) (ουσιαστικά η (9.2)) γράφεται ως

$$(9.4) \quad u = \mathbf{T}u.$$

Ευκολα διαπιστώνουμε ότι ο \mathbf{T} απεικονίζει τον χώρο B στον εαυτό του. Πράγματι,

$$\mathbf{T}u = L_s^{-1}f + (t - s)L_s^{-1}[L_0 - L_1]u,$$

το στοιχείο $f \in V$ αρα

$$L_s^{-1}f \in B,$$

το $u \in B$ αρα

$$(L_0 - L_1)u \in V \quad \text{και} \quad L_s^{-1}(L_0 - L_1)u \in B.$$

Ας εξετάσουμε τώρα πότε ο \mathbf{T} είναι συστολή. Έχουμε

$$\|\mathbf{T}u_1 - \mathbf{T}u_2\|_B =$$

$$\|L_s^{-1}f + (t - s)L_s^{-1}[L_0 - L_1]u_1 - L_s^{-1}f + (t - s)L_s^{-1}[L_0 - L_1]u_2\|_B =$$

$$|t - s| \|L_s^{-1}[L_0 - L_1](u_1 - u_2)\|_B.$$

Το στοιχείο

$$w = L_s^{-1}(L_0 - L_1)(u_1 - u_2)$$

ανήκει στο B και λόγω της (9.1) έχουμε

$$\|w\|_B \leq C \|L_s w\|_V = C \|[L_0 - L_1](u_1 - u_2)\|_V \leq$$

$$C \|[L_0 - L_1]\| \|(u_1 - u_2)\|_B.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της νόρμας του τελεστή. Άρα καταλήγουμε στο ότι

$$\|\mathbf{T}u_1 - \mathbf{T}u_2\|_B \leq C|t - s| \|[L_0 - L_1]\| \|(u_1 - u_2)\|_B \leq$$

$$C|t - s|(\|L_0\| + \|L_1\|) \|(u_1 - u_2)\|_B.$$

Άρα ο \mathbf{T} είναι συστολή όταν

$$C|t - s|(\|L_0\| + \|L_1\|) < 1.$$

Συνεπώς για όλα τα $t \in [0, 1]$ που επαληθευουν την σχέση

$$|t - s| < \delta = \frac{1}{(C\|L_0\| + \|L_1\|)}$$

ο \mathbf{T} είναι συστολή και η εξίσωση (9.4) έχει λύση άρα και η (9.2) έχει λύση δηλαδή ο L_t για τειοιες τιμές του t είναι επί.

Τώρα χωρίζουμε το διάστημα $[0, 1]$ σε διαστήματα μήκους $\tilde{\delta} < \delta$ ($\tilde{\delta} > 0$), αν ο L_0 είναι επι τότε και ο L_t είναι επι για $t \in [0, \tilde{\delta}]$, αφού τώρα ο $L_{\tilde{\delta}}$ είναι επι θα είναι επί και ο L_t για $t \in [0, 2\tilde{\delta}]$. Συνεχίζοντας ετσι σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων θα φτάσουμε στον L_1 . Προφανώς με την ίδια διαδικασία αν ο L_1 είναι επί τότε και ο L_0 θα είναι επι.

□

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε το σύνολο των συνεχών στο Ω συναρτήσεων. Το συναρτησοειδές που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\|f\| = \int_{\Omega} f^2 dx$$

είναι νόρμα ;

2. Θεωρούμε το σύνολο των συνεχών στο Ω συναρτήσεων. Το συναρτησοειδές που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2}$$

είναι νόρμα ;

3. Θεωρούμε το σύνολο των συνεχών στο Ω συναρτήσεων. Το συναρτησοειδές που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\|f\| = \sum_{i=1}^n \sup_{\Omega} |f_{x_i}|$$

είναι νόρμα ;

4. Αποδείξτε ότι ο αντίστροφος του γραμμικού είναι γραμμικός.

§ 10. Εκτιμήσεις Schauder, προβλήμα Dirichlet στην γενική περίπτωση

Έστω Ω φραγμένο χωρίο στον \mathbf{R}^n τ.ω. $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$. Θεωρούμε στο Ω το εξής πρόβλημα Dirichlet :

(10.1)

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x) \text{ στο } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (6.2) και $c(x) \leq 0$. Επίσης υποθέτουμε ότι οι $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ και $f(x)$ είναι $C^\alpha(\bar{\Omega})$ ενώ η $\phi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$. Τότε λαμβάνει χώρα η ακόλουθη εκτίμηση της λύσης του προβλήματος (10.1)

$$(10.2) \quad \|u\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C(\|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|\phi\|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)}).$$

η οποία ονομάζεται *a priori* εκτίμηση *Schauder*. Η σταθερά C εξαρτάται από το χωρίο Ω , τις νόρμες $\|a_{ij}\|_{C^\alpha}$, $\|b_i\|_{C^\alpha}$, $\|c\|_{C^\alpha}$ και από την σταθερά ελλειπτικότητας λ , δηλαδή από τα δεδομένα του προβλήματος.

Θα εφαρμόσουμε τώρα το Θεώρημα 9.2 για να αποδείξουμε την ύπαρξη της λύσης του προβλήματος (10.1) χρησιμοποιώντας την εκτίμηση (10.2).

Και αρχάς ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ϕ είναι ορισμένη σε όλο το χωρίο Ω και $\phi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Τότε τη συνοριακή συνθήκη μπορούμε να την βλέπουμε ως

$$u|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}.$$

(Γενικώς το πρόβλημα επέκτασης μιας συνάρτησης ορισμένης στο σύνορο ενός χωρίου στο εσωτερικό του χωρίου αυτού είναι αρκετά πολύπλοκο, θα σημειώσουμε μόνο ότι αν $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ και $\phi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$, τότε μπορούμε να την επεκτείνουμε την ϕ σε όλο το Ω ε.ω. η ϕ να ανήκει στο $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.)

Προφανώς η αντικατάσταση $u = v + \phi$ ανάγει το πρόβλημα (10.1) στο

$$Lv = \tilde{f} \text{ στο } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

όπου

$$\tilde{f} = f - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\phi_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\phi_{x_i} + c(x)\phi.$$

Συνεπώς χωρίς βλάβη της γενικότητας εξ αρχής μπορούμε να πάρουμε μηδενικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή να θεωρούμε το πρόβλημα

$$(10.3) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x) \text{ στο } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Πάμε πίσω στο Θεώρημα 9.2. Ως χώρο B θα πάρουμε τον $C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ δηλαδή

$$B = \{u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

και ως V θα πάρουμε τον $C^\alpha(\bar{\Omega})$.

Ορίζουμε τους τελεστές L_t ως εξής

$$L_t u = tL u + (1-t)\Delta u, \quad t \in [0, 1].$$

Προφανώς $L_0 = \Delta$, $L_1 = L$ και

$$L_0 : C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega}), \quad L_1 : C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega}), \quad L_t : C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega}).$$

Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$L_0 u = f, \quad \text{και} \quad L_1 u = f$$

και

$$L_t u = f \quad (\text{αφού } L_t u = t f + (1-t)f = f).$$

Παρατηρούμε ότι η επιλυσιμότητα του προβλήματος

$$L u = f \quad \text{στο } \Omega, \quad u \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

ανάγεται στο αν η απεικόνιση

$$L : C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$$

είναι "επί". Δηλαδή αν για κάθε $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ υπάρχει $u \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ τ.ω. η f είναι εικόνα της u και προφανώς αυτή η u θα είναι λύση του προβλήματος (10.3).

Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση

$$L_0(\equiv \Delta) : C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$$

είναι "επί". Άρα για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 9.2 και ως συνέπεια να έχουμε ότι είναι επί η απεικόνιση L πρέπει να βεβαιωθούμε ότι λαμβάνει χώρα η *a priori* εκτίμηση (9.1). Δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}$$

που είναι η εκτίμηση *Schauder*. Άρα ισχύει το εξής θεώρημα

Θεώρημα 10.1. Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (6.2) και $c(x) \leq 0$. Επίσης υποθέτουμε ότι οι $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, $f(x)$ είναι $C^\alpha(\bar{\Omega})$ συναρτήσεις και θεωρούμε ότι $\phi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$.

Τότε υπάρχει μοναδική λύση $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ του προβλήματος (10.1).

Την μοναδικότητα την έχουμε αποδείξει στην §8.

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι αν η f είναι μόνο συνεχής συνάρτηση, τότε το πρόβλημα (10.1) μπορεί να μην έχει κλασική λύση (το ίδιο ισχύει και για τους συντελεστές). Πράγματι, θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Dirichlet*:

(10.4)

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = f(x_1, x_2) \quad \text{στην μπάλα } B_R(0) : |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R < 1,$$

$$(10.5) \quad u \Big|_{|x|=R} = (x_1^2 - x_2^2) \sqrt{-\ln R} \Big|_{|x|=R},$$

όπου η συνεχής (όχι όμως *Hölder* συνεχής) συνάρτηση f ορίζεται να είναι

$$f = \begin{cases} \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2} \left(\frac{4}{(-\ln|x|)^{1/2}} + \frac{1}{2(-\ln|x|)^{3/2}} \right), & \text{για } |x| > 0, \\ 0, & \text{για } |x| = 0 \end{cases}$$

Με άμεσους υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση

$$(10.6) \quad u(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2) (-\ln|x|)^{1/2}$$

ανήκει στον χώρο $C^\infty(\overline{B_R(0)} \setminus \{0\}) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$, επαληθεύει την συνοριακή συνθήκη και επαληθεύει την εξίσωση στο $B_R(0) \setminus \{0\}$. Όμως

$$u_{x_1 x_1} = 2(-\ln|x|)^{1/2} + \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^4(-\ln|x|)^{1/2}} - \frac{2x_1^2}{|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}} - \frac{x_1^2 - x_2^2}{2|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}} - \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{4|x|^4(-\ln|x|)^{3/2}}.$$

Προφανώς

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} u_{x_1 x_1} = \infty,$$

άρα η (10.6) δεν μπορεί να είναι (κλασική) λύση του προβλήματος (10.4), (10.5). Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα αυτό δεν έχει (κλασική) λύση.

Τέλος, ως επισημάνουμε ότι με πιο λεπτές διαδικασίες είναι δυνατόν να αποδείξουμε την ύπαρξη της λύσης υπο λιγότερες προϋποθέσεις σχετικά με την ομαλότητα της ϕ και του $\partial\Omega$.

§ 11. Μοναδικότητα της λύσης για άλλα συνοριακά προβλήματα

Κατ' αρχάς θα επισημάνουμε ότι η ύπαρξη της λύσης για δευτερο και τρίτο συνοριακό μπορεί να κατασκευαστεί παρόμοια με το πρόβλημα *Dirichlet*. Στο μάθημα αυτό θα περιοριστούμε με την απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης για αυτά τα προβλήματα.

Θεωρούμε το πρόβλημα *Neumann*

$$(11.1) \quad Lu = f \text{ στο } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Θεώρημα 11.1. Υποθέτουμε ότι $c(x) \leq 0$ και η $c(x)$ σε κάποια σημεία του Ω είναι γνησίως αρνητική. Τότε η λύση του προβλήματος (11.1) είναι μοναδική.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια άλλη λύση η v , δηλαδή:

$$Lv = f \text{ στο } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Για την $w \equiv u - v$ έχουμε

$$Lw = 0 \text{ στο } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Αν η w δεν είναι σταθερά τότε λόγω συνοριακής συνθήκης δεν λαμβάνει στο $\partial\Omega$ ούτε το θετικό της μέγιστο ούτε το αρνητικό της ελάχιστο, αλλιώς (βλ. §7) στο σημείο αυτό θα είχαμε

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} > 0 \text{ ή } \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} < 0.$$

Επίσης αν η w δεν είναι σταθερά τότε δεν λαμβάνει ούτε το θετικό της μέγιστο ούτε το αρνητικό της ελάχιστο και στα εσωτερικά σημεία του Ω , συνεπώς η

w είναι σταθερά. Απο την υπόθεση ότι ο μη θετικός συντελεστής $c(x)$ είναι αρνητικός τουλάχιστον σε κάποια σημεία προκύπτει ότι η σταθερά αυτή πρέπει να είναι μηδέν, τουτέστιν $w \equiv 0 \Leftrightarrow u \equiv v$.

□

Παρατηρούμε ότι αν $c(x) \equiv 0$ τότε η λύση του προβλήματος *Neumann* δεν είναι μοναδική διότι οποιαδήποτε σταθερά C θα είναι λύση του ομογενούς προβλήματος. Δηλαδή αν η u είναι λύση του προβλήματος (11.1) με $c(x) \equiv 0$, τότε και η $u + C$ θα είναι επίσης λύση του (11.1).

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα *Robin*

$$(11.2) \quad Lu = f \text{ στο } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Θεώρημα 11.2. Υποθέτουμε ότι $c(x) \leq 0$, $h(x) \geq 0$. Επιπλέον ζητάμε ή η $c(x)$ σε κάποια σημεία του Ω να είναι γνησίως αρνητική ή η $h(x)$ σε κάποια σημεία του $\partial\Omega$ να είναι γνησίως θετική. Τότε η λύση του προβλήματος (11.2) είναι μοναδική.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια άλλη λύση η v , δηλαδή:

$$Lv = f \text{ στο } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} + hv \Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Για την $w \equiv u - v$ έχουμε

$$Lw = 0 \text{ στο } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} + hw \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Αν η w δεν είναι σταθερά τότε δεν λαμβάνει στο $\partial\Omega$ ούτε το θετικό της μέγιστο ούτε το αρνητικό της ελάχιστο. Πράγματι, αν στο σημείο $x_0 \in \partial\Omega$ το θετικό της μέγιστο (αρνητικό ελάχιστο), τότε σε αυτό το σημείο έχουμε

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + hw \Big|_{x_0} > 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} + hw \Big|_{x_0} < 0 \right)$$

άτοπο.

Επίσης αν η w δεν είναι σταθερά τότε δεν λαμβάνει ούτε το θετικό της μέγιστο ούτε το αρνητικό της ελάχιστο και στα εσωτερικά σημεία του Ω , συνεπώς η w είναι σταθερά.

Απο την υπόθεση ότι ή ο $c(x) \leq 0$ είναι αρνητικός τουλάχιστον σε κάποια σημεία προκύπτει ή ότι η $h(x) \geq 0$ είναι θετική τουλάχιστον σε κάποια σημεία προκύπτει ότι σταθερά αυτή πρέπει να είναι μηδέν, τουτέστιν $w \equiv 0$.

□

§ 12. Μη γραμμικές εξισώσεις

Η μη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} + b(x, u, \nabla u) = 0,$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $a_{ij} = a_{ji}$, ονομάζεται ελλειπτικού τύπου (ή ελλειπτική) στο χωρίο Ω αν υπάρχουν συναρτήσεις $\lambda(x, u, \mathbf{p})$, $\Lambda(x, u, \mathbf{p})$ τ.ω. ισχύει

(12.1)

$$0 < \lambda(x, u, \mathbf{p})|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \mathbf{p})\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x, u, \mathbf{p})|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

και για όλα τα $x \in \Omega$, $u \in \mathbf{R}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$. Όπως θα δούμε στο παράδειγμα παρακάτω οι λ και Λ είναι συχνά η μεγαλύτερη και η μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα $A = (a_{ij})$.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Dirichlet*

$$(12.2) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, u, \nabla u)u_{x_i x_j} + b(x, u, \nabla u) = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi$$

Ορισμός. Λέμε ότι ο τελεστής \mathbf{T} που απεικονίζει τον χώρο Banach B στον εαυτό του (δηλαδή $\mathbf{T} : B \rightarrow B$) είναι συμπαγής αν η εικόνα κάθε φραγμένου συνόλου είναι συμπαγές σύνολο.

Θεώρημα 12.1 (*Leray – Schauder*). Έστω \mathbf{T} συμπαγής τελεστής που απεικονίζει τον χώρο Banach B στον εαυτό του και έστω ότι υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ τ.ω. για κάθε $u \in B$ και κάθε $\sigma \in [0, 1]$ που επαληθευουν την εξίσωση

$$u = \sigma \mathbf{T} u$$

ισχύει η ανισότητα

$$(12.3) \quad \|u\|_B \leq M.$$

Τότε η απεικόνιση \mathbf{T} έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $u \in B$ τ.ω. $u = \mathbf{T} u$.

Προφανώς εννοούμε ότι η σταθερά M δεν εξαρτάται ούτε από την u ούτε από το σ !

Κατασκευάζουμε την απεικόνιση (τον τελεστή)

$$\mathbf{T} : C^{1,\beta}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$$

ως εξής: έστω v τυχαία συνάρτηση από τον χώρο $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$

$$\mathbf{T} : v \rightarrow u \Leftrightarrow u = \mathbf{T} v,$$

όπου η u μοναδική λύση του γραμμικού προβλήματος

$$(12.4) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, v, \nabla v)u_{x_i x_j} = -b(x, v, \nabla v) \quad \text{στο } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi$$

με $a_{ij}, b \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$, $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$. Λόγω εκτιμήσεων *Schauder* έχουμε ότι $u \in C^{2,\alpha\beta}(\bar{\Omega})$ άρα ο τελεστής \mathbf{T} απεικονίζει

$$\mathbf{T} : C^{1,\beta}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{2,\alpha\beta}(\bar{\Omega}).$$

Ο τελεστής είναι φραγμένος, άρα αν θα πάρουμε τον περιορισμό του στον $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ θα είναι συμπαγής. Συνοψίζοντας έχουμε έναν συμπαγή τελεστή ο οποίος δρα απο τον χώρο *Banach* $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ στον ίδιο:

$$\mathbf{T} : C^{1,\beta}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{1,\beta}(\bar{\Omega}).$$

Είναι προφανές ότι το σταθερό σημείο της απεικόνισης \mathbf{T} είναι λύση του προβλήματος (12.2). Για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα *Leray – Schauder* πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει η (12.3).

Κατ αρχάς ας καταλάβουμε την εξίσωση

$$u = \sigma \mathbf{T} u.$$

Εφόσον $u = \mathbf{T} v$ προφανώς

$$\sigma u = \sigma \mathbf{T} v,$$

δηλαδή ο τελεστής $\sigma \mathbf{T}$ απεικονίζει κάθε $v \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ στην σu όπου u (όπως και πριν) λύση του προβλήματος (12.4). Πολλαπλασιάζουμε την (12.4) με σ :

$$(12.5) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, v, \nabla v)(\sigma u)_{x_i x_j} = -\sigma b(x, v, \nabla v) \text{ στο } \Omega, \quad \sigma u \Big|_{\partial\Omega} = \sigma \phi.$$

Για $w = \sigma u$ η (12.5) γράφεται ως

$$(12.6) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, v, \nabla v)w_{x_i x_j} = -\sigma b(x, v, \nabla v) \text{ στο } \Omega, \quad w \Big|_{\partial\Omega} = \sigma \phi.$$

Άρα

$$\sigma \mathbf{T} : v \rightarrow w \Leftrightarrow w = \sigma \mathbf{T} v$$

όπου w λύση του προβλήματος (12.6).

Χρησιμοποιώντας u αντι w μπορούμε να πούμε ότι

$$\sigma \mathbf{T} : v \rightarrow u \Leftrightarrow u = \sigma \mathbf{T} v$$

όπου u είναι λύση του προβλήματος

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, v, \nabla v)u_{x_i x_j} = -\sigma b(x, v, \nabla v) \text{ στο } \Omega, \quad u \Big|_{\partial\Omega} = \sigma \phi.$$

Άρα η εξίσωση

$$u = \sigma \mathbf{T} u$$

(βλ. (12.3)) ισοδυναμεί με το πρόβλημα *Dirichlet*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, u, \nabla u)u_{x_i x_j} + \sigma b(x, u, \nabla u) = 0 \text{ στο } \Omega, \quad u \Big|_{\partial\Omega} = \sigma \phi.$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι η απόδειξη της ύπαρξης της λύσης του προβλήματος (12.2) ανάγεται στην *a priori* εκτίμηση της νόρμας $\|u\|_{C^{1,\beta}(\bar{\Omega})}$ της λύσης αυτού του προβλήματος (θυμίζουμε ότι $\sigma \in (0, 1)$). Δηλαδή αν υποθέσουμε ότι η (κλασική) λύση υπάρχει και μπορούμε να βρούμε μια απόλυτη

σταθερά C η οποία θα εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα του προβλήματος (όπως π.χ. στην § 8) τ.ω.

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\bar{\Omega})} \leq C,$$

τότε το θεώρημα *Leray–Schauder* εξασφαλίζει ότι η (κλασική) λύση υπάρχει.

Ίσως το πιο γνωστό παράδειγμα μη γραμμικής εξίσωσης είναι η εξίσωση της ελάχιστης επιφάνειας.

Θεωρούμε μια επιφάνεια η οποία είναι γράφημα της συνάρτησης $u = u(x, y)$ με $(x, y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$. Το εμβαδόν \mathcal{I} της επιφάνειας αυτής δίνεται από τον τύπο

$$(12.7) \quad \mathcal{I}(u) = \int \int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \, dx dy.$$

Έστω τώρα η επιφάνεια αυτή στο $\partial\Omega$ παίρνει δοσμένες τιμές

$$(12.8) \quad u|_{\partial\Omega} = \phi$$

και θέλουμε να βρούμε την επιφάνεια η οποία επαληθεύει την (12.8) και έχει ελάχιστο δυνατό εμβαδόν. Πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησοειδές (12.7) με περιορισμό (12.8). Από τον Λογισμό Μεταβολών έχουμε ότι το ζητούμενο ελάχιστο είναι λύση του προβλήματος *Dirichlet* :

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0 \text{ στο } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Η σχέση (12.1) για την τελευταία εξίσωση ισχύει με

$$\lambda = 1 \text{ και } \Lambda = 1 + u_x^2 + u_y^2.$$

Παρατηρούμε ότι αυτά είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 + u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & 1 + u_x^2 \end{pmatrix}.$$

Τέλος, ας αναφέρουμε ένα μη γραμμικό πρόβλημα το οποίο έχει μοναδική κλασική λύση αλλά έχει και μια άλλη λύση.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Dirichlet*:

$$\Delta u + |\nabla u|^2 = 0 \text{ για } |x| < R < 1, \quad (x = (x_1, x_2))$$

$$u|_{|x|=R} = 0.$$

Η μοναδική κλασική λύση του προβλήματος είναι $u \equiv 0$. Ταυτοχρόνως υπάρχει και άλλη λύση η

$$(12.9) \quad u(x) = u(|x|) = \ln \ln \frac{1}{|x|} - \ln \ln \frac{1}{R}.$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} \nabla u &= -\left(\frac{x_1}{|x|^2 \ln \frac{1}{|x|}}, \frac{x_2}{|x|^2 \ln \frac{1}{|x|}} \right) = -\frac{\nabla |x|}{|x| \ln \frac{1}{|x|}}, \\ |\nabla u|^2 &= |x|^{-2} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την δευτερη παράγωγο:

$$u_{x_i x_i} = 2 \frac{x_i^2}{|x|^4 \ln \frac{1}{|x|}} - \frac{x_i^2}{|x|^4 \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^2} - \frac{1}{|x|^2 \ln \frac{1}{|x|}}.$$

Άρα

$$\Delta u = -|x|^{-2} \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^{-2} = -|\nabla u|^2.$$

Επίσης

$$u(x) \Big|_{|x|=R} = u(R) = 0.$$

Προφανώς η συνάρτηση (12.9) δεν είναι φραγμένη αρα δεν είναι κλάσικη λύση. Παρατηρούμε οτι η $u(x)$ και το ∇u είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Βιβλιογραφία:

[1] *D.Gilbarg, N.Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer – Verlag, 1983.*

[2] *L.C.Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19, AMS.*

[3] *V.P.Mikhailov, Partial Differential Equations, Mir, 1978.*

Κεφάλαιο II. Εξισώσεις παραβολικού τύπου

§1. Αρχή του μεγίστου για παραβολικές εξισώσεις

Εστω $Q_T = (0, T) \times \Omega$ κύλινδρος με κάτω βάση Ω - φραγμένο χωρίο στο \mathbf{R}^n . Με S_T θα συμβολίζουμε την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, δηλαδή $S_T = (0, T] \times \partial\Omega$ και με Γ_T το παραβολικό σύνορο του χωρίου Q_T δηλαδή $\Gamma_T = \Omega \cup S_T$.

Στο Q_T θεωρούμε την εξίσωση

$$(1.1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u - u_t = f(t,x).$$

Στο εξής

$$L \cdot \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \frac{\partial \cdot}{\partial x_i} + c(t,x) \cdot - \frac{\partial \cdot}{\partial t}$$

άρα η εξίσωση (1.1) γράφεται σε μορφή

$$Lu = f(t,x).$$

Λέμε ότι η εξίσωση (1.1) είναι παραβολικού τύπου (ή παραβολική) αν υπάρχουν σταθερές $\Lambda \geq \lambda > 0$ στο Q_T τ.ω.

$$(1.2) \quad \lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \quad \text{και } \forall (t,x) \in Q_T.$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις a_{ij} , b_i , c (συντελεστές της (1.1)) και f (δεύτερο μέρος) είναι ορισμένες στο Q_T και τουλάχιστον φραγμένες.

Λήμμα 1.1 Έστω $u(t,x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T)$. Εάν στο Q_T ισχύει

$$c \leq 0, \quad Lu < 0 \quad (Lu > 0)$$

ή

$$c < 0, \quad Lu \leq 0 \quad (Lu \geq 0),$$

τότε η u δεν λαμβάνει το αρνητικό ελάχιστο (θετικό μέγιστο) της στο Q_T .

Απόδειξη. Θεωρούμε την περίπτωση $c \leq 0$, $Lu < 0$, οι υπόλοιπες αποδεικνύονται παρομοίως. Αν σε κάποιο σημείο $(t_0, x_0) \in Q_T$ (δηλαδή $(t_0, x_0) \in \overline{Q_T} \setminus \partial Q_T$) η u λαμβάνει αρνητικό ελάχιστο τότε σε αυτό το σημείο έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n b_i(t,x) u_{x_i} = 0, \quad c(t,x)u \geq 0, \quad -u_t = 0$$

αυτό όμως αντιφάσκει στην υπόθεση

$$Lu \Big|_{t_0, x_0} < 0.$$

Άτοπο.

□

Λήμμα 1.2 Αν στο Λήμμα 1.1 έχουμε επιπλέον ότι $u(t, x) \in C^0(\overline{Q}_T)$ και

$$u|_{\Gamma_T} \geq 0 \quad (u|_{\Gamma_T} \leq 0),$$

τότε

$$u \geq 0 \text{ στο } Q_T \quad (u \leq 0 \text{ στο } Q_T).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την περίπτωση

$$u|_{\Gamma_T} \geq 0 \text{ και } c \leq 0, \quad Lu < 0 \text{ στο } Q_T$$

ή

$$u|_{\Gamma_T} \geq 0 \text{ και } c < 0, \quad Lu \leq 0 \text{ στο } Q_T.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$v = \varepsilon(T - t)^{-\alpha} + u,$$

για κάποιο $\alpha > 0$. Προφανώς

$$Lv = L(\varepsilon(T - t)^{-\alpha}) + Lu \leq -\alpha\varepsilon(T - t)^{-\alpha-1} < 0.$$

Συνεπώς η v δεν λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστό στο Q_T . Αφού είναι συνεχής στο \overline{Q}_T το λαμβάνει στο ∂Q_T . Επειδή όμως στο ∂Q_T ισχύει $v \geq 0$ καταλήγουμε στο ότι $v \geq 0$ στο Q_T . Άρα

$$\varepsilon(T - t)^{-\alpha} + u \geq 0 \text{ στο } Q_T \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Περνώντας στο όριο $\varepsilon \rightarrow 0$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Η περίπτωση $u \leq 0$ αποδεικνύεται παρομοίως.

□

Θα συμβολίσουμε

$$Q_{t_1} = (0, t_1) \times \Omega, \quad S_{t_1} = (0, t_1] \times \partial\Omega, \quad \Gamma_{t_1} = \Omega \cup S_{t_1}.$$

Θεώρημα 1.1 (apriori εκτίμηση) Έστω $a_{ij}, b_i, c, f \in C^0(\overline{Q}_T)$ και $u(t, x) \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q}_T)$ είναι λύση της εξίσωσης (1.1) στο Q_T .

1. Αν $c(t, x) \leq 0$, τότε ισχύει

$$|u(t, x)| \leq \max_{\Gamma_{t_1}} |u| + C \max_{Q_{t_1}} |f| \quad \forall t \leq t_1 \in (0, T), \quad x \in \Omega.$$

2. Αν $c(t, x) \leq \gamma$ ($\gamma > 0$ σταθερά), τότε ισχύει

$$|u(t, x)| \leq e^{\gamma t} \max_{\Gamma_{t_1}} |ue^{-\gamma t}| + Ce^{\gamma t} \max_{Q_{t_1}} |fe^{-\gamma t}| \quad \forall t \leq t_1 \in (0, T), \quad x \in \Omega.$$

Εδώ $C > 0$ είναι μια σταθερά την οποία θα την προσδιορίσουμε πιο κάτω.

Απόδειξη. 1. Λόγω της (1.2) έχουμε ότι $a_{11} \geq \lambda > 0$. Επειδή το χωρίο Ω είναι φραγμένο υπάρχει σταθερά $q > 0$ τ.ω. $q > x_1$ στο Ω . Θέτουμε

$$M = \max_{\Gamma_{t_1}} |u|, \quad N = \max_{Q_{t_1}} |f|.$$

Για $\alpha > 0, \rho > 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v(t, x) \equiv \varepsilon(t_1 - t)^{-\alpha} + M + (e^{\rho q} - e^{\rho x_1})N \pm u(t, x)$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$(1.3) \quad v \geq 0 \text{ στο } \partial Q_{t_1}$$

και

$$\begin{aligned} Lv = L(\varepsilon(t_1 - t)^{-\alpha} + M + (e^{\rho a} - e^{\rho x_1})N) \pm Lu = \\ -(a_{11}\rho^2 + b_1\rho)e^{\rho x_1}N + \\ c(\varepsilon(t_1 - t)^{-\alpha} + M + (e^{\rho a} - e^{\rho x_1})N) - \varepsilon\alpha(t_1 - t)^{-\alpha-1} \pm f \leq \\ -(\lambda\rho^2 + b_1\rho)Ne^{\rho x_1} \pm f. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας το ρ αρκετά μεγάλο (ε.ω. $\lambda\rho^2 + b_1\rho > 1$) παίρνουμε ότι

$$(1.4) \quad Lv < 0 \text{ στο } Q_{t_1}.$$

Απο (1.3), (1.4) (και Λήμμα 1.2) έχουμε $v \geq 0$ στο \bar{Q}_{t_1} δηλαδή

$$|u| \leq M + (e^{\rho a} - e^{\rho x_1})N + \varepsilon(t_1 - t)^{-\alpha} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Προφανώς

$$|u| \leq M + CN + \varepsilon(t_1 - t)^{-\alpha} \quad \forall \varepsilon > 0$$

όπου

$$C = \max_{\Omega} (e^{\rho a} - e^{\rho x_1}).$$

Στέλνοντας το ε στο μηδέν καταλήγουμε στο ζητούμενο.

2. Έστω τώρα $c(t, x) \leq \gamma$. Εισάγουμε τη συνάρτηση

$$w(t, x) = u(t, x) e^{-\gamma t}, \quad (u(t, x) = w(t, x) e^{\gamma t})$$

η οποία επαληθεύει την εξίσωση

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)w_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x)w_{x_i} + \tilde{c}(t, x)w - w_t = \tilde{f}(t, x)$$

με

$$\tilde{c}(t, x) = c(t, x) - \gamma \leq 0 \text{ και } \tilde{f}(t, x) = f(t, x)e^{-\gamma t}.$$

Προφανώς $\tilde{c}(t, x) \leq 0$ άρα βρισκόμαστε στην περίπτωση 1. και έχουμε

$$|w(t, x)| \leq \max_{\Gamma_{t_1}} |w| + C \max_{Q_{t_1}} |\tilde{f}| \quad \forall t \leq t_1 \in (0, T), \quad x \in \Omega.$$

Επιστρέφοντας στην u καταλήγουμε στο ζητούμενο.

□

Θα δείξουμε τώρα ότι η άμεση συνέπεια του Θεωρήματος είναι η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος *Dirichlet* για την εξίσωση (1.1).

Πρόβλημα *Cauchy – Dirichlet* : Στο χωρίο Q_T να βρεθεί η λύση της εξίσωσης (1.1) η οποία επαληθεύει την αρχική και την συνοριακή συνθήκη

$$(1.5) \quad u \Big|_{\Gamma_T} = \phi,$$

όπου η συνεχής συνάρτηση ϕ είναι ορισμένη στο Γ_T .

Θεώρημα 1.2 (μοναδικότητας για το πρόβλημα *Cauchy – Dirichlet*). Το πρόβλημα (1.1), (1.5) έχει μοναδική (κλασική) λύση.

Απόδειξη. Έστω u_1 λύση του προβλήματος (1.1), (1.5) και η u_2 μια άλλη λύση. Προφανώς η είναι λύση του προβλήματος

$$Lu = 0 \text{ στο } Q_T, \quad u|_{\Gamma_T} = 0.$$

Απο το Θεώρημα 1.1 έχουμε (αφου $f \equiv 0$) ότι στο Q_T

$$|u| \leq 0 \Leftrightarrow u \equiv 0 \Leftrightarrow u_1 \equiv u_2.$$

□

Θα δώσουμε τώρα μια άλλη προσέγγιση στην εκτίμηση της λύσης. Στο Q_T θεωρούμε την εξίσωση (1.1). Εισάγουμε τη συνάρτηση $v = u e^{-\gamma t}$ με

$$\gamma > c_0 = \max_{Q_T} c,$$

για την οποία έχουμε

$$(1.6) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)v_{x_i} + (c(t,x) - \gamma)v - v_t = e^{-\gamma t} f(t,x).$$

Επιλέγουμε τυχαίο $t_1 \in (0, T)$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. $v \leq 0$ στο \bar{Q}_{t_1} ,
2. η v παίρνει το θετικό της μέγιστο στο \bar{Q}_{t_1} σε κάποιο σημείο του Γ_{t_1} ,
3. η v παίρνει το θετικό της μέγιστο στο \bar{Q}_{t_1} σε κάποιο σημείο του $\bar{Q}_{t_1} \setminus \Gamma_{t_1}$.

Θεωρούμε την τρίτη περίπτωση, η v λαμβάνει το θετικό της μέγιστο στο σημείο $(t^0, x^0) \in (0, t_1] \times \Omega$. Σε αυτο το σημείο ισχυεί

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{x_i x_j} \leq 0, \quad v_{x_i} = 0, \quad -v_t \leq 0$$

$(v_t(t^0, x^0) = 0$ για $t^0 \in (0, t_1)$ και $v_t(t^0, x^0) \geq 0$ αν $t^0 = t_1 = T$).

Συνεπώς, απο την εξίσωση (1.6) έχουμε

$$(\gamma - c(t^0, x^0))v(t^0, x^0) \leq -e^{-\gamma t^0} f(t^0, x^0).$$

δηλαδή

$$(1.7) \quad v(t^0, x^0) \leq -\frac{e^{-\gamma t^0} f(t^0, x^0)}{\gamma - c_0}.$$

Αφου στο σημείο (t^0, x^0) η v λαμβάνει (θετικό) μέγιστο απο την σχέση (1.7) προκύπτει

$$v(t, x) \leq v(t^0, x^0) \leq -\frac{e^{-\gamma t^0} f(t^0, x^0)}{\gamma - c_0} \leq \max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0}, \quad \forall (t, x) \in Q_{t_1}.$$

Συνεπώς

$$(1.8) \quad v \leq \max \left\{ 0, \max_{\Gamma_{t_1}} v, \max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0} \right\}, \quad \forall (t, x) \in \bar{Q}_{t_1}$$

και

$$u \leq \max \left\{ 0, e^{\gamma t} \max_{\Gamma_{t_1}} u e^{-\gamma t}, e^{\gamma t} \max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0} \right\}, \forall (t, x) \in \overline{Q}_{t_1}.$$

Διακρίνουμε τρεις άλλες περιπτώσεις:

1. $v \geq 0$ στο \overline{Q}_{t_1} ,
2. η v παίρνει το αρνητικό της ελάχιστο στο \overline{Q}_{t_1} σε κάποιο σημείο του Γ_{t_1} ,
3. η v παίρνει το αρνητικό της ελάχιστο στο \overline{Q}_{t_1} σε κάποιο σημείο του $\overline{Q}_{t_1} \setminus \Gamma_{t_1}$.

Θεωρούμε την τρίτη περίπτωση, η v λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο στο σημείο $(t_0, x_0) \in (0, t_1] \times \Omega$. Σε αυτο το σημείο ισχυεί

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i x_j} \geq 0, \quad v_{x_i} = 0, \quad -v_t \geq 0.$$

Παρομοίως με την προηγούμενη περίπτωση καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$v(t_0, x_0) \geq -\frac{e^{-\gamma t_0} f(t_0, x_0)}{\gamma - c_0}.$$

Αφου στο σημείο (t^0, x^0) η v λαμβάνει (αρνητικό) ελάχιστο έχουμε

$$v(t, x) \geq v(t_0, x_0) \geq -\frac{e^{-\gamma t_0} f(t_0, x_0)}{\gamma - c_0} \geq \min_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0}, \quad \forall (t, x) \in Q_{t_1}.$$

Συμπεώς

$$u \geq \min \left\{ 0, e^{\gamma t} \min_{\Gamma_{t_1}} u e^{-\gamma t}, e^{\gamma t} \min_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0} \right\}, \forall (t, x) \in \overline{Q}_{t_1}.$$

Αρα αποδειξαμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.3. Για την κλασική λύση $u(t, x)$ του προβλήματος (1.1), (1.5) ισχύει η εκτίμηση

$$\sup_{\gamma > c_0} \min \left\{ 0, e^{\gamma t} \min_{\Gamma_{t_1}} \phi e^{-\gamma t}, e^{\gamma t} \min_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0} \right\} \leq$$

$$u(t, x) \leq$$

$$\inf_{\gamma > c_0} \max \left\{ 0, e^{\gamma t} \max_{\Gamma_{t_1}} \phi e^{-\gamma t}, e^{\gamma t} \max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0} \right\},$$

$$\forall (t, x) \in \overline{Q}_{t_1}.$$

Παρόμοιο θεώρημα λαμβάνει χώρα και για το τρίτο συνοριακό πρόβλημα. Θεωρούμε την (1.1) με τις συνθήκες

$$(1.9) \quad u(0, x) = \phi(x), \quad x \in \Omega, \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u \Big|_{S_T} = \chi, \quad \alpha \beta > 0.$$

Θεώρημα 1.4. Για την κλασική λύση $u(t, x)$ του προβλήματος (1.1), (1.9) ισχύει η εκτίμηση

$$\sup_{\gamma > c_0} \min \left\{ 0, e^{\gamma t} \min_{\Omega} \phi e^{-\gamma t}, e^{\gamma t} \min_{S_{t_1}} \frac{\chi e^{-\gamma t}}{\beta}, e^{\gamma t} \min_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0} \right\} \leq$$

$$u(t, x) \leq$$

$$\inf_{\gamma > c_0} \max \left\{ 0, e^{\gamma t} \max_{\Omega} \phi e^{-\gamma t}, e^{\gamma t} \max_{S_{t_1}} \frac{\chi e^{-\gamma t}}{\beta}, e^{\gamma t} \max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0} \right\},$$

$\forall (t, x) \in \overline{Q}_{t_1}$.

Η μόνη διαφορά στην απόδειξη είναι στην παράπλευρη επιφάνεια. Για την v η συνθήκη (1.9) γράφεται ως

$$v(0, x) = \phi(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial v}{\partial \nu} + v \Big|_{S_T} = \frac{1}{\beta} e^{-\gamma t} \chi.$$

Συνεπώς αν σε κάποιο σημείο της S_{t_1} η v λαμβάνει μέγιστο (ελάχιστο), τότε σε αυτό το σημείο

$$v \Big|_{S_{t_1}} \leq \frac{1}{\beta} e^{-\gamma t} \chi \quad (v \Big|_{S_{t_1}} \geq \frac{1}{\beta} e^{-\gamma t} \chi)$$

(εδώ χρησιμοποιήσαμε το ότι προφανώς στο σημείο όπου έχουμε μέγιστο ισχύει $v_\nu \geq 0$ και στο σημείο όπου έχουμε ελάχιστο ισχύει $v_\nu \leq 0$). Άρα η (1.8) παίρνει τη μορφή

$$v \leq \max \left\{ 0, \max_{\Omega} \phi e^{-\gamma t}, \max_{S_{t_1}} \frac{1}{\beta} e^{-\gamma t} \chi, \max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0} \right\}, \quad \forall (t, x) \in \overline{Q}_{t_1}$$

και συνεπώς

$$u(t, x) \leq$$

$$\max \left\{ 0, e^{\gamma t} \max_{\Omega} \phi e^{-\gamma t}, e^{\gamma t} \max_{S_{t_1}} \frac{\chi e^{-\gamma t}}{\beta}, e^{\gamma t} \max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0} \right\},$$

$\forall (t, x) \in \overline{Q}_{t_1}$.

Παρομοίως και η κάτω εκτίμηση

$$u(t, x) \geq$$

$$\min \left\{ 0, e^{\gamma t} \min_{\Omega} \phi e^{-\gamma t}, e^{\gamma t} \min_{S_{t_1}} \frac{\chi e^{-\gamma t}}{\beta}, e^{\gamma t} \min_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t, x)}{\gamma - c_0} \right\}.$$

Τα υπόλοιπα όπως στο προηγούμενο θεώρημα.

Η απόδειξη του Θεωρήματος που ακολουθεί είναι όμοια με το αντίστοιχο θεώρημα για της ελλειπτικές εξισώσεις.

Θεώρημα 1.5. (Αρχή του μεγίστου) 1. Έστω $c(t, x) \equiv 0$. Αν η συνάρτηση $u(t, x)$ στο Q_T επαληθεύει την ανισότητα $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$), τότε η u δεν λαμβάνει το μέγιστό της (το ελάχιστό της) στα σημεία $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ αν δεν είναι σταθερά.

2. Έστω $c(t, x) \leq 0$. Αν η συνάρτηση $u(t, x)$ στο Q_T επαληθεύει την ανισότητα $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$), τότε η u δεν λαμβάνει το θετικό της μέγιστο (αρνητικό της ελάχιστό) στα σημεία $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ αν δεν είναι σταθερά.

§2. Πρόβλημα *Cauchy*

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Cauchy*: στο $(0, T) \times \mathbf{R}^n$ να βρεθεί η φραγμένη λύση της εξίσωσης (1.1) η οποία επαλυθευει τη αρχική συνθήκη

$$(2.1) \quad u(0, x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Πρώτα θα αποδείξουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.1 Έστω a_{ij}, b_i, c, f συνεχείς και φραγμένες στο $(0, T) \times \mathbf{R}^n$ συναρτήσεις και $u(t, x)$ είναι (κλασική) λύση του προβλήματος *Cauchy*.

1. Αν $c(t, x) \leq 0$, τότε ισχύει

$$(2.2) \quad |u(t, x)| \leq \max_{\mathbf{R}^n} |\phi(x)| + t \max_{(0, T) \times \mathbf{R}^n} |f(t, x)| \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbf{R}^n.$$

2. Αν $c(t, x) \leq \gamma$ ($\gamma > 0$ σταθερά), τότε ισχύει

$$(2.3) \quad |u(t, x)| \leq e^{\gamma t} \left[\max_{\mathbf{R}^n} |\phi(x)| + t \max_{(0, T) \times \mathbf{R}^n} |f(t, x)| \right] \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbf{R}^n.$$

Απόδειξη. 1. Στον κύλινδρο

$$Q_R = (0, T) \times \{|x| < R\}$$

θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v(t, x) = m + Nt + \frac{M}{R^2} (|x|^2 + CRt) \pm u(t, x).$$

Εδώ

$$m = \max_{\mathbf{R}^n} |\phi(x)|, \quad N = \max_{(0, T) \times \mathbf{R}^n} |f(t, x)|, \quad |u(t, x)| \leq M,$$

R - τυχαία σταθερά και η σταθερά $C > 0$ θα προσδιοριστεί παρακάτω. Στο Q_R έχουμε

$$(2.4) \quad \begin{aligned} Lv &= L \left(m + Nt + \frac{M}{R^2} (|x|^2 + CRt) \right) \pm f = \\ &= \frac{M}{R^2} \left(2 \sum_{i=1}^n a_{ii} + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) + c \left(m + Nt + \frac{M}{R^2} (|x|^2 + CRt) \right) - N - \frac{M}{R} C \pm f \leq \\ &= -N \pm f - \frac{M}{R^2} \left[CR - 2 \sum_{i=1}^n a_{ii} - 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i \right]. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας το $C > 0$ αρκετά μεγάλο (ανεξάρτητο του R !) θα έχουμε

$$CR - 2 \sum_{i=1}^n a_{ii} - 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i \geq 0.$$

συνεπώς από (2.4) έχουμε ότι

$$Lv \leq -N \pm f \leq 0 \quad \text{στο } Q_T.$$

Θεωρούμε τώρα τη v στο παραβολικό σύνορο του Q_T :

$$v(0, x) = m + \frac{M}{R^2} |x|^2 \pm \phi(x) \geq m \pm \phi(x) \geq 0,$$

$$v \Big|_{|x|=R} = m + Nt + M + \frac{CMt}{R} \pm u \geq M \pm u \geq 0.$$

Δηλαδή

$$Lv \leq 0 \text{ στο } Q_T, \quad v \Big|_{\Gamma_T} \geq 0,$$

αρα

$$v \geq 0 \text{ στο } \bar{Q}_T,$$

συνεπώς

$$|u(t, x)| \leq m + Nt + \frac{M}{R^2}(|x|^2 + CRt) \text{ για κάθε } (t, x) \in Q_T.$$

Περνάμε στο όριο καθώς $R \rightarrow 0$ και παίρνουμε το ζητούμενο.

2. Στον κύλινδρο $Q_R = (0, T) \times \{|x| < R\}$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v(t, x) = m + Nt + \frac{M}{R^2}(|x|^2 + CRt) \pm u(t, x)e^{-\gamma t}.$$

Όπως και πριν θα έχουμε

$$v \Big|_{\Gamma_T} \geq 0.$$

Ορίζουμε τον τελεστή

$$\tilde{L} \equiv L - \gamma.$$

Έχουμε

$$\tilde{L}v = \tilde{L}\left(m + Nt + \frac{M}{R^2}(|x|^2 + CRt)\right) \pm \tilde{L}(ue^{-\gamma t}).$$

Προφανώς

$$\begin{aligned} \tilde{L}(ue^{-\gamma t}) &= e^{-\gamma t} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu - u_t + \gamma u \right) - \gamma e^{-\gamma t} u = \\ &e^{-\gamma t} L u = e^{-\gamma t} f, \end{aligned}$$

και

$$\tilde{L}\left(m + Nt + \frac{M}{R^2}(|x|^2 + CRt)\right) \leq -N \text{ για αρκετά μεγάλο } C$$

(οπώς και πριν το C μπορούμε να το επιλέξουμε να είναι ανεξάρτητο του R).

Συνεπώς

$$\tilde{L}v \leq -N \pm fe^{-\gamma t} \leq 0 \text{ στο } Q_T.$$

Αρα

$$v \geq 0 \text{ στο } \bar{Q}_T,$$

δηλαδή

$$|u| \leq e^{\gamma t} \left(m + Nt + \frac{M}{R^2}(|x|^2 + CRt) \right) \text{ στο } \bar{Q}_T,$$

Απο εδώ ευκολα προκύπτει το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 2.2 (μοναδικότητας για το πρόβλημα *Cauchy*). *Υπάρχει μονομία λύση του προβλήματος Cauchy.*

Το Θεώρημα 2.2 είναι αμεση συνέπεια των εκτιμήσεων (2.2), (2.3).

Παρατήρηση. 1. Το πρόβλημα (1.1) (στο $(0, T) \times \mathbf{R}^n$), (2.1) μπορεί να έχει και άλλες λύσεις οι οποίες όμως δεν είναι φραγμένες.

Πρόβλημα *Cauchy* για την εξίσωση θερμότητας.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $u(t, x)$ της εξίσωσης

$$(2.5) \quad u_t = \Delta u \quad \text{στο} \quad (0, T) \times \mathbf{R}^n$$

$\forall T > 0$, η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$(2.6) \quad u = \phi(x) \quad \text{για} \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Προφανώς υποθέτουμε ότι η $u(t, x)$ είναι μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς t και δυο φορές ως προς x ($u \in C_{t,x}^{1,2}$).

Για $t > \tau$ θεωρούμε την εξής συνάρτηση

$$\Gamma(t - \tau, x - \xi) = \frac{1}{2^n [\pi(t - \tau)]^{n/2}} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}}$$

εδω $x, \xi \in \mathbf{R}^n$, $|x - \xi|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2$.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται θεμελιώδης λύση της εξίσωσης θερμότητας (2.5) και είναι ευκολο να διαπιστώσει κανείς ότι για $t \neq \tau$ έχουμε ότι

$$\Gamma_t - \Delta_x \Gamma = 0 \quad \text{για σταθεροποιημένα} \quad \tau \quad \text{και} \quad \xi$$

και

$$\Gamma_\tau + \Delta_x \Gamma = 0 \quad \text{για σταθεροποιημένα} \quad t \quad \text{και} \quad x.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(t, x - \xi) d\xi = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Πράγματι, κάνοντας την αντικατάσταση $\xi - x = 2\sqrt{t}\sigma$ (δηλαδή $\xi_i - x_i = 2\sqrt{t}\sigma_i$, $i = 1, \dots, n$) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(t, x - \xi) d\xi &= \pi^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|\sigma|^2} d\sigma = \\ \pi^{-n/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_1^2} d\sigma_1 \right)^n &= 2^n \pi^{-n/2} \left(\int_0^{\infty} e^{-\sigma_1^2} d\sigma_1 \right)^n = \\ 2^n \pi^{-n/2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^n &= 1. \end{aligned}$$

Θεώρημα 2.5. Έστω ότι η $\phi(x)$ είναι συνεχής και φραγμένη στον \mathbf{R}^n , τότε η λύση του προβλήματος *Cauchy* (2.5), (2.6) δίνεται από τον τύπο

$$(2.7) \quad u(t, x) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(t, x - \xi) \phi(\xi) d\xi.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$|u(t, x)| \leq \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(t, x - \xi) |\phi(\xi)| d\xi \leq \max_{\mathbf{R}^n} |\phi(\xi)| = M < \infty.$$

αρα η $u(t, x)$ υπάρχει και είναι φραγμένη.

Οι άμεσοι υπολογισμοί δίνουν (για $\kappa = 2^{-n}\pi^{-n/2}$)

$$\Gamma_t(t, x - \xi) = \kappa e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} t^{-\frac{n-2}{2}} \left(-\frac{n}{2} + \frac{|x-\xi|^2}{4t} \right)$$

και

$$\Gamma_{x_i x_i}(t, x - \xi) = \kappa e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} t^{-\frac{n-2}{2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{(x_i - \xi_i)^2}{4t} \right).$$

Αντικαθιστώντας αυτούς τους τύπους στην σχέση (2.7) καταλήγουμε στο ότι

$$u_t - \Delta u = \int_{\mathbf{R}^n} \left[\Gamma_t(t, x - \xi) - \Delta_x \Gamma(t, x - \xi) \right] \phi(\xi) d\xi = 0, \quad \forall t > 0.$$

Έμεινε να αποδείξουμε την επαλήθευση της σχέσης (2.6). Θεωρούμε τη διαφορά $u(t, x) - \phi(x)$, προφανώς

$$u(t, x) - \phi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(t, x - \xi) [\phi(\xi) - \phi(x)] d\xi.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $\xi_i - x_i = 2\sqrt{t}\sigma_i$, $i = 1, \dots, n$ θα έχουμε

$$u(t, x) - \phi(x) = \pi^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|\sigma|^2} [\phi(x + 2\sqrt{t}\sigma) - \phi(x)] d\sigma.$$

Έστω

$$Q_R = \{|\sigma| < R\},$$

τότε

$$u(t, x) - \phi(x) = \pi^{-n/2} \int_{Q_R} e^{-|\sigma|^2} [\phi(x + 2\sqrt{t}\sigma) - \phi(x)] d\sigma +$$

$$(2.8) \quad \pi^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n \setminus Q_R} e^{-|\sigma|^2} [\phi(x + 2\sqrt{t}\sigma) - \phi(x)] d\sigma.$$

Απο τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $R > 0$ τ.ω.

$$\pi^{-n/2} \left| \int_{\mathbf{R}^n \setminus Q_R} e^{-|\sigma|^2} [\phi(x + 2\sqrt{t}\sigma) - \phi(x)] d\sigma \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επειδή η $\phi(x)$ είναι συνεχής για δεδομένο R υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. για $0 < t < \delta$ ισχύει

$$\pi^{-n/2} \int_{Q_R} e^{-|\sigma|^2} |\phi(x + 2\sqrt{t}\sigma) - \phi(x)| d\sigma \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνεπώς επιστρέφοντας στην (2.8) θα έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ε.ω.

$$|u(t, x) - \phi(x)| \leq \varepsilon$$

αν $0 < t < \delta$, δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \phi(x).$$

□

Ο τυπος (2.7) ονομάζεται τυπος *Poisson*.

Για το μη ομογενές πρόβλημα *Cauchy*

$$u_t - \Delta u = f(t, x) \quad \text{στο } (0, T) \times \mathbf{R}^n$$

$$u = \phi(x) \text{ για } x \in \mathbf{R}^n$$

η λύση δίνεται απο τον τύπο

$$(2.9) \quad u(t, x) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(t, x - \xi) \phi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau$$

αν η συνάρτηση f είναι *Hölder* συνεχής σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $(0, T) \times \mathbf{R}^n$ και φραγμένη στο $(0, T) \times \mathbf{R}^n$. Για $f \in C^1$ αυτο αποδεικνύεται παρομοίως με την αποδειξη του (5.2) στο πρώτο κεφάλαιο.

Η μοναδική φραγμένη λύση του προβλήματος (2.5), (2.6) δίνεται απο τον τυπο (2.9).

§3. Εκτιμήσεις *Schauder*, πρόβλημα *Cauchy – Dirichlet*

Έστω Ω φραγμένο χωρίο στον \mathbf{R}^n τ.ω. $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$. Θεωρούμε στο $Q_T = (0, T) \times \Omega$ το εξής πρόβλημα *Cauchy – Dirichlet* :

$$(3.1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t, x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_{x_i} + c(t, x) u - u_t = f(t, x),$$

$$(3.2) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{S_T} = \phi,$$

όπου $S_T = (0, T) \times \partial\Omega$.

Υποθέτουμε οτι ισχύει η συνθήκη (1.2) και οτι

$$(3.3) \quad a_{ij}(t, x), b_i(t, x), c(t, x) f(t, x) \in C_{t,x}^{\alpha/2, \alpha}(\overline{Q_T}).$$

Επίσης θεωρούμε οτι

$$(3.4) \quad \phi \in C_{t,x}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(S_T), \quad u_0(x) \in C^{2+\alpha}(\Omega)$$

και

$$(3.5) \quad u_0(x) = \phi(0, x), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$(3.6) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(0, x) u_{0x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(0, x) u_{0x_i} + c(0, x) u_0 - \phi_t|_{\partial\Omega} = f(0, x)|_{\partial\Omega}.$$

Τότε λαμβάνει χώρα η ακόλουθη εκτίμηση της λύσης του προβλήματος (3.1), (3.2):

$$\|u\|_{C_{t,x}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\overline{Q_T})} \leq C (\|f\|_{C_{t,x}^{\alpha/2, \alpha}(\overline{Q_T})} + \|\phi\|_{C_{t,x}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(S_T)} + \|u_0\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}).$$

η οποια ονομάζεται *a priori* εκτίμηση *Schauder*. Η σταθερά C εξαρτάται απο τις νόρμες των a_{ij} , b_i , c στο $C_{t,x}^{\alpha/2, \alpha}$, απο το χωρίο Q_T και απο την σταθερά ελλειπτικότητας λ , δηλαδή απο τα δεδομένα του προβλήματος.

Παρομοίως με την ελλειπτική περίπτωση μπορούμε να αποδείξουμε το εξής

Θεώρημα 3.1. Υποθέτουμε οτι ισχύει η συνθήκη (1.2) και οι (3.3) - (3.6). Τότε υπάρχει μοναδική λύση $u \in C_{t,x}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\overline{Q_T})$ του προβλήματος (3.1), (3.2).

Αν η f είναι μόνο συνεχής συνάρτηση, τότε το πρόβλημα (3.1), (3.2) μπορεί να μην έχει κλασική λύση (το ίδιο ισχύει και για τους συντελεστές).

Ασκήσεις

1. Έστω $u(t, x)$ λύση της εξίσωσης θερμότητας ($u_t - \Delta u = 0$) στο $(0, +\infty) \times \mathbf{R}^n$. Αποδείξτε ότι $\forall \kappa \in \mathbf{R}$ η

$$u_\kappa \equiv u(\kappa^2 t, \kappa x)$$

είναι επίσης λύση της εξίσωσης θερμότητας στο $(0, +\infty) \times \mathbf{R}^n$.

2. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Cauchy*

$$u_t - \Delta u + c u = f(t, x) \quad \text{στο } (0, T) \times \mathbf{R}^n$$

$$u = \phi(x) \quad \text{για } t = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

όπου $c \in \mathbf{R}$ κάποια σταθερά. Να βρεθεί τυπος (αντίστοιχος στον (2.9)) που θα μας δώσει τη λύση σε "κλειστή μορφή".

3. Διαπιστώστε ότι αν οι

$$v_i(t, x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

είναι λύσεις των εξισώσεων

$$v_{ix_i x_i} - v_{it} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

αντιστοίχως, τότε η

$$v \equiv v_1 v_2 \dots v_n, \quad (v = v(t, x))$$

είναι λύση της

$$\Delta v - v_t = 0.$$

4. Για το πρόβλημα *Cauchy*

$$u_t = u_{xx} \quad \text{στο } (0, T) \times \mathbf{R},$$

$$u(0, x) = \phi(x) \quad \text{με } \phi(x) = -\phi(-x) \quad x \in \mathbf{R},$$

αποδείξτε ότι

$$u(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

5. Έστω $n = 1$ και $u(t, x) = v(x^2/t)$, αποδείξτε ότι

$$u_t = u_{xx}$$

αν και μόνο αν

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0, \quad z = x^2/t, \quad t > 0.$$

Στις ασκήσεις 6 - 10 προσδιορίστε τις σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε

$$c_1 \leq u(t, x) \leq c_2 \quad \text{στο } Q_T.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (1.2).

6. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_i b_i u_{x_i} - u - u_t = f(t, x) \text{ στο } Q_T,$$

$$u \Big|_{\Gamma_T} = 0.$$

Τι μπορούμε να πούμε για το πρόσημο της λύσης αν $f \leq 0$ ($f \geq 0$).

7. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_i b_i u_{x_i} + u - u_t = f \text{ στο } Q_T,$$

$$u \Big|_{\Gamma_T} = 0.$$

8. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_i b_i u_{x_i} + u - u_t = 0 \text{ στο } Q_T,$$

$$u \Big|_{\Gamma_T} = \phi(x).$$

9. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_i b_i u_{x_i} + c u - u_t = 0 \text{ στο } Q_T,$$

$$u(0, x) = \phi, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + u \Big|_{S_T} = \chi$$

για α.) $c = -1$, β.) $c = 0$, γ.) $c = 1$ (ν εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο $\partial\Omega$).

10. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_i b_i u_{x_i} - u_t = 0 \text{ στο } Q_T,$$

$$u(0, x) = \phi, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{S_T} = 0.$$

Βιβλιογραφία:

[1] *A.Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice – Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1964.*

[2] *L.C.Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19, AMS.*

[3] *V.P.Mikhailov, Partial Differential Equations, Mir, 1978.*

Κεφάλαιο III. Εξισώσεις υπερβολικού τύπου

§1. Προβλημα *Cauchy* για την κυματική εξίσωση

Η εξίσωση

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u - u_{tt} = f(t,x)$$

ονομάζεται υπερβολικού τύπου αν ισχύει η (1.2) απο το Κεφαλαιο II.

Θα περιοριστούμε με την κυματική εξίσωση.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Cauchy*

$$(1.1) \quad u_{tt} = \Delta u + f(t,x), \quad |t| < T, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad n > 1,$$

$$(1.2) \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Τη λύση την κατασκευάζουμε ως άθροισμα λύσεων των ακόλουθων τριών προβλημάτων *Cauchy*:

1.

$$(1.3) \quad u_{tt} = \Delta u, \quad |t| < T, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$$(1.4) \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

2.

$$(1.5) \quad u_{tt} = \Delta u, \quad |t| < T, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$$(1.6) \quad u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

3.

$$(1.7) \quad u_{tt} = \Delta u + f(t,x), \quad |t| < T, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$$(1.8) \quad u(0,x) = u_t(0,x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Θα συμβολίσουμε τη λύση του προβλήματος (1.3), (1.4) με \tilde{u} , τη λύση του προβλήματος (1.5), (1.6) με \tilde{v} και τη λύση του προβλήματος (1.7), (1.8) με \tilde{w} . Δηλαδή η λύση του αρχικού μας προβλήματος (1.1), (1.2) θα είναι

$$u = \tilde{u} + \tilde{v} + \tilde{w}.$$

Θεωρούμε την εξίσωση

$$(1.9) \quad L_k u \equiv u_{tt} + \frac{k}{t} u_t - \Delta u = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Πιο κάτω (Λήμμα 1.2) θα δούμε πως η λύση του προβλήματος (1.9), (1.4) σχετίζεται με την λύση του προβλήματος (1.3), (1.4).

Θα διατυπώσουμε καποιες ιδιότητες της (1.9). Έστω u_k λύση της

$$L_k u = 0$$

τότε

I) η $u = t^{k-1}u_k$ είναι λύση της

$$L_{2-k}u = 0,$$

και

II) η $u = t^{-1}u_{kt}$ είναι λύση της

$$L_{2+k}u = 0.$$

Πράγματι, η πρώτη ιδιότητα προκύπτει από το εξής:

$$(t^{k-1}u_k)_{tt} + \frac{2-k}{t}(t^{k-1}u_k)_t - \Delta(t^{k-1}u_k) = t^{k-1}\left(u_{ktt} + \frac{k}{t}u_{kt} - \Delta u_k\right) = 0.$$

Η δεύτερη από

$$\begin{aligned} (t^{-1}u_{kt})_{tt} + \frac{2+k}{t}(t^{-1}u_{kt})_t - \Delta(t^{-1}u_{kt}) = \\ t^{-1}\left(u_{kttt} + kt^{-1}u_{ktt} - kt^{-2}u_{kt} - \Delta u_{kt}\right) = t^{-1}\left(u_{ktt} + \frac{k}{t}u_{kt} - \Delta u_k\right)_t = 0. \end{aligned}$$

Πρώτο βήμα.

Ξεκινάμε με το πρόβλημα (1.3), (1.4).

Λήμμα 1.1. Έστω ότι η $h(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στον \mathbf{R}^n συνάρτηση. Τότε η μέση τιμή της $h(x)$ στη σφαίρα με ακτίνα t και κέντρο στο x , την οποία την συμβολίζουμε με $M(t, x, h)$, είναι λύση του προβλήματος

$$L_{n-1}M = 0, \quad M(0, x, h) = h(x), \quad M_t(0, x, h) = 0.$$

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη για $n = 2$. Παρατηρούμε ότι για $n = 2$

$$M(t, x, h) = \frac{1}{2\pi t} \int_{|x-\xi|=t} h(\xi) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x_1 + t \cos \beta, x_2 + t \sin \beta) d\beta$$

όπου

$$\xi_1 = x_1 + t \cos \beta, \quad \xi_2 = x_2 + t \sin \beta, \quad ds = t d\beta.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι λύση του προβλήματος:

$$M_{tt} + \frac{1}{t}M_t - \Delta M = 0, \quad M(0, x, h) = h, \quad M_t(0, x, h) = 0.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (h_{\xi_1} \cos \beta + h_{\xi_2} \sin \beta) d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla_{\xi} h \cdot (\cos \beta, \sin \beta) d\beta = \\ &= \frac{1}{2\pi t} \int_{|x-\xi|=t} \nabla_{\xi} h \cdot \nu ds = \frac{1}{2\pi t} \int_{|x-\xi|\leq t} \Delta_{\xi} h d\xi. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την παραγώγο δεύτερης τάξης ως προς t :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{-1}{2\pi t^2} \int_{|x-\xi|\leq t} \Delta_{\xi} h d\xi + \frac{1}{2\pi t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x-\xi|\leq t} \Delta_{\xi} h d\xi.$$

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο του ολοκληρώματος εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x-\xi| \leq t} \Delta_\xi h d\xi = \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t < |x-\xi| < t + \Delta t} \Delta_\xi h d\xi &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_{|x-\xi|=\tau} \Delta_\xi h ds d\tau = \\ & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|x-\xi|=\tau^*} \Delta_\xi h ds. \end{aligned}$$

για κάποιο $\tau^* \in [t, t + \Delta t]$. Συνεπώς

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{|x-\xi| \leq t} \Delta_\xi h d\xi = \int_{|x-\xi|=t} \Delta_\xi h ds$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} &= \frac{-1}{2\pi t^2} \int_{|x-\xi| \leq t} \Delta_\xi h d\xi + \frac{1}{2\pi t} \int_{|x-\xi|=t} \Delta_\xi h ds = \\ -\frac{1}{t} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2\pi t} \int_{|x-\xi|=t} \Delta_\xi h ds &= -\frac{1}{t} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2\pi t} \int_{|x-\xi|=t} \Delta_x h ds \end{aligned}$$

(αφού $h_{x_i x_i}(\xi) = h_{\xi_i \xi_i}(\xi)$).

Συνεπώς

$$M_{tt} + \frac{1}{t} M_t - \Delta M = 0 \quad (\Delta = \Delta_x).$$

Προφανώς

$$M(0, x, h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x_1, x_2) d\beta = h(x).$$

Επίσης

$$M_t(0, x, h) = 0.$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t}(t, x, h) &= \frac{1}{2\pi t} \int_{|x-\xi| \leq t} \Delta_\xi h d\xi \leq \\ \frac{1}{2\pi t} |\Delta_\xi h|_{\xi=\xi^*} \int_{|x-\xi| \leq t} d\xi &= \frac{1}{2\pi t} |\Delta_\xi h|_{\xi=\xi^*} |\pi t^2| = \frac{t}{2} |\Delta_\xi h|_{\xi=\xi^*} \end{aligned}$$

για κάποιο ξ^* τ.ω. $|x - \xi^*| \leq t$. Άρα

$$M_t(0, x, h) \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } t \rightarrow 0.$$

Για $n = 3$ έχουμε

$$M(t, x, h) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-\xi|=t} h(\xi) ds.$$

Χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + t \sin \beta \cos \theta, \\ \xi_2 &= x_2 + t \sin \beta \sin \theta, \\ \xi_3 &= x_3 + t \cos \beta, \end{aligned}$$

$$ds = t^2 \sin \beta d\beta d\theta, \quad \beta \in [0, \pi), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

παίρνουμε

$$M(t, x, h) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-\xi|=t} h(\xi) ds =$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} h(x_1 + t \sin \beta \cos \theta, x_2 + t \sin \beta \sin \theta, x_3 + t \cos \beta) \sin \beta d\theta d\beta.$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι λύση του προβλήματος:

$$M_{tt} + \frac{2}{t} M_t - \Delta M = 0, \quad M(0, x, h) = h, \quad M_t(0, x, h) = 0$$

(βλ. Ασκήση 3).

□

Θα δώσουμε τώρα τον τύπο που συνδέει τις λύσεις του προβλήματος (1.3), (1.4) και του προβλήματος (1.9), (1.4). Παρατηρούμε ότι τη λύση του προβλήματος (1.9), (1.4) την ξέρουμε από το Λήμμα 1.1 (παίρνουμε ϕ στη θέση της h).

Λήμμα 1.2. Αν η $\tilde{u}(t, x)$ είναι λύση του προβλήματος (1.3), (1.4), τότε η

$$u_{n-1}(t, x) = \gamma_{n-1} \int_0^1 \tilde{u}(\alpha t, x) (1 - \alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha$$

είναι λύση του προβλήματος (1.9), (1.4) με

$$\gamma_{n-1} = \left(\int_0^1 (1 - \alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha \right)^{-1}$$

Απόδειξη. Προφανώς

$$(1.10) \quad \Delta u_{n-1} = \gamma_{n-1} \int_0^1 \Delta \tilde{u}(\alpha t, x) (1 - \alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha, \quad (\Delta = \Delta_x).$$

Θα υπολογίσουμε την παράγωγο ως προς t :

$$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} = \gamma_{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \tilde{u}(\alpha t, x) (1 - \alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha.$$

Θέτουμε $\xi = \alpha t$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη:

$$(1.11) \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} = \gamma_{n-1} \int_0^1 \tilde{u}_\xi(\alpha t, x) \alpha (1 - \alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha =$$

$$\frac{\gamma_{n-1}}{2} \int_0^1 \tilde{u}_\xi(\alpha t, x) (1 - \alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha^2 = -\frac{\gamma_{n-1}}{n-1} \int_0^1 \tilde{u}_\xi(\alpha t, x) d(1 - \alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$-\frac{\gamma_{n-1}}{n-1} \tilde{u}_\xi(\alpha t, x) (1 - \alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=1} + \frac{\gamma_{n-1}}{n-1} t \int_0^1 \tilde{u}_{\xi\xi}(\alpha t, x) (1 - \alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} d\alpha =$$

$$\frac{\gamma_{n-1}}{n-1} \tilde{u}_t(0, x) + \frac{\gamma_{n-1}}{n-1} t \int_0^1 \tilde{u}_{\xi\xi}(\alpha t, x) (1 - \alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} d\alpha =$$

(λόγω αρχικών συνθηκών)

$$\frac{\gamma_{n-1}}{n-1} t \int_0^1 \tilde{u}_{\xi\xi}(\alpha t, x) (1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} d\alpha.$$

Δηλαδή

$$(1.12) \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} = \frac{\gamma_{n-1}}{n-1} t \int_0^1 \tilde{u}_{\xi\xi}(\alpha t, x) (1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} d\alpha$$

και (απο την εξίσωση $\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi, x) = \Delta_x \tilde{u}(\xi, x)$)

$$(1.13) \quad \frac{n-1}{t} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} = \frac{\gamma_{n-1}}{n-1} \int_0^1 \Delta \tilde{u}(\alpha t, x) (1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} d\alpha \quad (\Delta = \Delta_x).$$

Θα υπολογίσουμε την δευτερη παράγωγο ως προς t , παραγωγίζουμε την (1.11):

$$\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2} = \gamma_{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \tilde{u}_{\xi}(\alpha t, x) \alpha (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha =$$

$$\gamma_{n-1} \int_0^1 \tilde{u}_{\xi\xi}(\alpha t, x) \alpha^2 (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha = \gamma_{n-1} \int_0^1 \Delta \tilde{u}(\alpha t, x) \alpha^2 (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha.$$

Προφανώς ισχύει οτι

$$\alpha^2 (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} = (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} - (1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

άρα

$$\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2} =$$

$$(1.14) \quad \gamma_{n-1} \int_0^1 \Delta \tilde{u}(\alpha t, x) (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha - \gamma_{n-1} \int_0^1 \Delta \tilde{u}(\alpha t, x) (1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} d\alpha.$$

Από (1.10), (1.13), (1.14) έχουμε οτι

$$\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} - \Delta u_{n-1} = 0.$$

Έμεινε να διαπιστώσουμε οτι η u_{n-1} επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες (1.4). Η δευτερη επαληθευεται λόγω της (1.12) και η πρώτη επειδή

$$u_{n-1}(0, x) = \gamma_{n-1} \int_0^1 \varphi(x) (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha =$$

$$\varphi(x) \gamma_{n-1} \int_0^1 (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha = \varphi(x).$$

□

Συνοψίζοντας έχουμε το εξής: από την σχέση

$$u_{n-1}(t, x) = \gamma_{n-1} \int_0^1 \tilde{u}(\alpha t, x) (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha$$

όπου η u_{n-1} είναι γνωστή, θέλουμε να προσδιορίσουμε την \tilde{u} οποία είναι η ζητούμενη λύση του προβλήματος (1.3), (1.4). Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση $n = 3$ όπου τα πράγματα είναι απλά. Έχουμε (προφανώς $\gamma_2 = 1$)

$$u_2(t, x) = \int_0^1 \tilde{u}(\alpha t, x) d\alpha.$$

Κάνουμε την αντικατάσταση

$$\alpha = \frac{\tau}{t}, \quad d\alpha = \frac{1}{t} d\tau$$

και έχουμε

$$u_2(t, x) = \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{u}(\tau, x) d\tau.$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση αυτή για να πάρουμε

$$u_{2t}(t, x) = -\frac{1}{t^2} \int_0^t \tilde{u}(\tau, x) d\tau + \frac{1}{t} \tilde{u}(t, x) = -\frac{1}{t} u_2(t, x) + \frac{1}{t} \tilde{u}(t, x).$$

Συνοπώς για $n = 3$ έχουμε

$$(1.15) \quad \tilde{u}(t, x) = tM_t(t, x, \varphi) + M(t, x, \varphi).$$

Στη γενική περίπτωση κάνουμε την αντικατάσταση

$$\alpha = \frac{\sqrt{\tau}}{t}, \quad d\alpha = \frac{1}{2t} \tau^{-1/2} d\tau, \quad 1 - \alpha^2 = \frac{t^2 - \tau}{t^2}$$

και έχουμε

$$u_{n-1}(t, x) = \gamma_{n-1} \frac{1}{2t} \left(\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} \int_0^{t^2} \tilde{u}(\sqrt{\tau}, x) (t^2 - \tau)^{\frac{n-3}{2}} \tau^{-1/2} d\tau.$$

Συμβολίζοντας $t = \sqrt{y}$ παίρνουμε

$$(1.16) \quad \frac{2}{\gamma_{n-1}} y^{\frac{n-2}{2}} u_{n-1}(\sqrt{y}, x) = \int_0^y \tilde{u}(\sqrt{\tau}, x) (y - \tau)^{\frac{n-3}{2}} \tau^{-1/2} d\tau.$$

Από την σχέση (1.16) μπορούμε να προσδιορίσουμε την \tilde{u} για κάθε n . Θα περιοριστούμε με $n = 2$ (για $n = 3$ έχουμε ήδη τη λύση).

Για $n = 2$ $\gamma_1 = 2/\pi$ και η (1.16) γράφεται ως

$$u_1(\sqrt{y}, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\tilde{u}(\sqrt{\tau}, x)}{\sqrt{y - \tau} \sqrt{\tau}} d\tau.$$

Για σταθεροποιημένο x αυτή είναι η γνωστή ολοκληρωτική εξίσωση *Abel*

$$\int_0^y \frac{\Phi(\tau) d\tau}{\sqrt{y - \tau}} = \Psi(y)$$

η οποία έχει μοναδική λύση

$$\Phi(y) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{\Psi(\tau) d\tau}{\sqrt{y - \tau}}.$$

Στην περίπτωση μας

$$\Psi(y) = u_1(\sqrt{y}, x), \quad \Phi(\tau) = \tilde{u}(\sqrt{\tau}, x) \frac{1}{\pi\sqrt{\tau}}.$$

Από εδώ

$$\tilde{u}(\sqrt{y}, x) = \sqrt{y} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{u_1(\sqrt{\tau}, x) d\tau}{\sqrt{y-\tau}}.$$

Θέτοντας $\sqrt{y} = t$ και κάνοντας την αντικατάσταση $\zeta = \sqrt{\tau}$ θα πάρουμε

$$\int_0^y (y-\tau)^{-1/2} u_1(\sqrt{\tau}, x) d\tau = 2 \int_0^t (t^2 - \zeta^2)^{-1/2} \zeta u_1(\zeta, x) d\zeta.$$

Παρατηρούμε ότι αν $\sqrt{y} = t$ τότε

$$\frac{d}{dy} F(t) = \frac{1}{2t} \frac{d}{dt} F(t)$$

για κάθε παραγωγίσιμη F . Παίρνοντας

$$F(t) = 2 \int_0^t (t^2 - \zeta^2)^{-1/2} u_1(\zeta, x) d\zeta,$$

έχουμε

$$\sqrt{y} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y (y-\tau)^{-1/2} u_1(\sqrt{\tau}, x) d\tau = t \frac{1}{2t} \frac{\partial}{\partial t} 2 \int_0^t (t^2 - \zeta^2)^{-1/2} \zeta u_1(\zeta, x) d\zeta.$$

Συνεπώς

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t^2 - \zeta^2)^{-1/2} \zeta M(\zeta, x, \varphi) d\zeta.$$

Προφανώς

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t^2 - \zeta^2)^{-1/2} \zeta M(\zeta, x, \varphi) d\zeta = \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t \left(1 - \left(\frac{\zeta}{t}\right)^2\right)^{-1/2} \frac{\zeta}{t} M\left(t \frac{\zeta}{t}, x, \varphi\right) t d\frac{\zeta}{t} \right] = \end{aligned}$$

(κάνοντας την αντικατάσταση $\alpha = \zeta/t$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[t \int_0^1 (1 - \alpha^2)^{-1/2} \alpha M(t\alpha, x, \varphi) d\alpha \right].$$

Άρα για $n = 2$ η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$(1.17) \quad \tilde{u}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[t \int_0^1 \frac{\alpha M(t\alpha, x, \varphi)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} d\alpha \right].$$

Δευτερο βήμα.

Θα κατασκευάσουμε τώρα τη λύση του προβλήματος (1.5), (1.6) για $n = 3$ και για $n = 2$. Θυμίζουμε ότι ψ είναι η αρχική συνθήκη.

Έστω $n = 3$. Η συνάρτηση $M(t, x, \varphi)$ επαληθεύει την εξίσωση

$$L_k M = 0 \quad \text{για } k = n - 1 = 2$$

άρα (απο την ιδιότητα I.) η συνάρτηση $tM(t, x, \psi)$ επαληθεύει την εξίσωση

$$L_{2-k}[tM] = 0 \Leftrightarrow L_0[tM] = 0 \Leftrightarrow (tM)_{tt} = \Delta(tM).$$

Επίσης

$$\begin{aligned} tM(t, x, \psi) \Big|_{t=0} &= 0, \\ (tM(t, x, \psi))_t \Big|_{t=0} &= M(t, x, \psi) \Big|_{t=0} + tM_t(t, x, \psi) \Big|_{t=0} = \psi(x). \end{aligned}$$

Άρα για $n = 3$ η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$(1.18) \quad \tilde{v} = tM(t, x, \psi).$$

Έστω τώρα $n = 2$. Εδώ τα πραγματα είναι λίγο πιο πολύπλοκα. Μπορούμε να δείξουμε (με αντικατάσταση της στην εξίσωση) ότι η συνάρτηση

$$\int_0^1 M(ty, x, \psi)(1 - y^2)^{-1/2} y dy$$

είναι λύση της εξίσωσης (1.9) με $k = 2$, συνεπώς, όπως και στην περίπτωση $n = 3$, η

$$(1.19) \quad \tilde{v}(t, x) = t \int_0^1 M(ty, x, \psi)(1 - \alpha^2)^{-1/2} \alpha d\alpha$$

είναι λύση της εξίσωσης (1.5) για $n = 2$. Επίσης

$$\tilde{v}(0, x) = 0$$

και

$$\tilde{v}_t(0, x) = \psi(x) \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} + t \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 M(ty, x, \psi) \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} dy \Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Άρα για $n = 2$ η ζητούμενη συνάρτηση δίνεται από τον τύπο (1.19).

Περνάμε τώρα στο τελευταίο τρίτο βήμα.

Θα κατασκευάσουμε τη λύση του προβλήματος (1.7), (1.8).

Λήμμα 1.3 (η αρχή του *Duhamel*). Αν η συνάρτηση $V(t, x, \tau)$ με $\tau \in (0, T)$ είναι λύση της εξίσωσης (1.5) και επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες

$$(1.20) \quad V(0, x, \tau) = 0, \quad V_t(0, x, \tau) = f(\tau, x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \tau \in (0, T)$$

τότε η συνάρτηση

$$(1.21) \quad \tilde{\omega}(t, x) = \int_0^t V(t - \tau, x, \tau) d\tau$$

είναι λύση του προβλήματος (1.7), (1.8).

Απόδειξη. 1. Προφανώς

$$\tilde{\omega}(0, x) = 0.$$

2. Παραγωγίζουμε την (1.20) ως προς t :

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = V(0, x, t) + \int_0^t V_t(t - \tau, x, \tau) d\tau = \int_0^t V_t(t - \tau, x, \tau) d\tau,$$

και συνεπώς

$$\tilde{\omega}_t(0, x) = 0.$$

3. Για την δευτερη παράγωγο ως προς t έχουμε

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial t^2} = V_t(0, x, t) + \int_0^t V_{tt}(t - \tau, x, \tau) d\tau = f(t, x) + \int_0^t V_{tt}(t - \tau, x, \tau) d\tau.$$

4. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η V είναι λύση της (1.5) παίρνουμε

$$\Delta \tilde{\omega} = \int_0^t \Delta V(t - \tau, x, \tau) d\tau = \int_0^t V_{tt}(t - \tau, x, \tau) d\tau.$$

Από τα παραπάνω προφανώς προκύπτει ότι

$$\tilde{\omega}_{tt} = \Delta \tilde{\omega} + f(t, x).$$

□

Όπως γνωρίζουμε (από προπτυχιακό μάθημα) η λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) για $n = 1$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\phi(x+t) + \phi(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi \right) d\tau$$

και αν πάρουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες

$$u(t, x) (= \tilde{w}) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi \right) d\tau.$$

Άρα εδώ

$$V(t - \tau, x, \tau) = \frac{1}{2} \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi$$

Συνεπώς

$$(1.22) \quad V(t, x, \tau) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f(\tau, \xi) d\xi.$$

Ας διαπιστώσουμε ότι η (1.22) είναι λύση της εξίσωσης (1.5) με αρχικές συνθήκες (1.20). Προφανώς

$$V(0, x, \tau) = 0,$$

$$V_t(t, x, \tau) = \frac{1}{2} [f(\tau, x+t) + f(\tau, x-t)]$$

και συνεπώς

$$V_t(0, x, \tau) = f(\tau, x).$$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο ως προς t :

$$V_{tt}(t, x, \tau) = \frac{1}{2} [f_\xi(\tau, x+t) - f_\eta(\tau, x-t)], \quad \xi = x+t, \quad \eta = x-t,$$

και

$$V_{xx}(t, x, \tau) = \frac{1}{2} [f_{\xi}(\tau, x+t) - f_{\eta}(\tau, x-t)], \quad \xi = x+t, \quad \eta = x-t.$$

Δηλαδή

$$V_{tt} = V_{xx}.$$

Θα δώσουμε τη λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) για $n = 2$ και $n = 3$.

Αν το $n = 2$ η λύση έχει την εξής μορφή (βλ. (1.17), (1.19), (1.21))

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[t \int_0^1 M(t\alpha, x, \varphi) \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha \right] + \\ t \int_0^1 M(t\alpha, x, \psi) \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha + \int_0^t V(t-\tau, x, \tau) d\tau$$

ο τύπος αυτός ονομάζεται τύπος *Poisson*.

Για $n = 3$ η λύση έχει την μορφή (βλ. (1.15), (1.18), (1.21))

$$u(t, x) = M(t, x, \varphi) + t \frac{\partial}{\partial t} M(t, x, \varphi) + tM(t, x, \psi) + \int_0^t V(t-\tau, x, \tau) d\tau$$

ο τύπος αυτός ονομάζεται τύπος *Kirchhoff*.

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας τους τύπους *D'Alembert*, *Poisson* και *Kirchhoff* μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την αρχή του *Huygens*.

§2. Πρόβλημα *Cauchy* για την εξίσωση θερμότητας vs πρόβλημα *Cauchy* για την κυματική εξίσωση

Θα δώσουμε εδώ έναν τύπο που συνδέει την λύση του προβλήματος *Cauchy* για την κυματική εξίσωση με την λύση του προβλήματος *Cauchy* για την εξίσωση θερμότητας,

Λήμμα 2.1. Έστω $u(t, x)$ φραγμένη λύση του προβλήματος *Cauchy*

$$u_{tt} = \Delta u, \quad |t| < T, \quad x \in \mathbf{R}^n, \\ u(0, x) = \phi(x), \quad u_t(0, x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

τότε η $v(t, x)$

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} u(\tau, x) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau$$

είναι λύση του προβλήματος *Cauchy*

$$v_t = \Delta v, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbf{R}^n, \\ v(0, x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$v_{x_i x_i} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} u_{x_i x_i}(\tau, x) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau$$

και προφανώς

$$(2.1) \quad \Delta v = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} \Delta u(\tau, x) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau.$$

Θα υπολογίσουμε την παράγωγο v_t :

$$v_t = \int_{\mathbf{R}} u(\tau, x) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) d\tau.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \left(\frac{\tau^2}{2t} - 1 \right)$$

και

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \left(\frac{\tau^2}{2t} - 1 \right)$$

συνεπώς

$$v_t = \int_{\mathbf{R}} u(\tau, x) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} u(\tau, x) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) d\tau.$$

Εξ ορισμού

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau, x) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) d\tau = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \int_{-N_1}^{N_2} u(\tau, x) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) d\tau =$$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-N_1}^{N_2} u(\tau, x) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) d\tau.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \int_{-N_1}^{N_2} u(\tau, x) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) d\tau = \\ & u(\tau, x) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) \Big|_{\tau=-N_1}^{\tau=N_2} - \int_{-N_1}^{N_2} u_{\tau}(\tau, x) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) d\tau = \\ & u(\tau, x) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \right) \Big|_{\tau=-N_1}^{\tau=N_2} - u_{\tau}(\tau, x) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \Big|_{\tau=-N_1}^{\tau=N_2} + \int_{-N_1}^{N_2} u_{\tau\tau}(\tau, x) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau \rightarrow \\ & \int_{-\infty}^{\infty} u_{\tau\tau}(\tau, x) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau \quad \text{καθώς } N_1, N_2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε (βλ. (2.1))

$$v_t - \Delta v = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} [u_{\tau\tau}(\tau, x) - \Delta u(\tau, x)] e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = 0.$$

Μας έμεινε να αποδείξουμε ότι $v(0, x) = \phi(x)$. Κάνοντας την αντικατάσταση

$$\tau \rightarrow \sigma = \frac{\tau}{2\sqrt{t}}, \quad (d\tau = 2\sqrt{t}d\sigma)$$

παίρνουμε

$$v(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} u(\tau, x) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} u(2\sqrt{t}\sigma, x) e^{-\sigma^2} 2\sqrt{t} d\sigma =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} u(2\sqrt{t}\sigma, x) e^{-\sigma^2} d\sigma \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} \phi(x) e^{-\sigma^2} d\sigma \text{ καθώς } t \rightarrow 0.$$

Άρα

$$v(0, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} \phi(x) e^{-\sigma^2} d\sigma = \phi(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\sigma^2} d\sigma = \phi(x).$$

□

Όπως γνωρίζουμε για $n = 1$ η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad (t, x) \in \mathbf{R}^2, \quad u(0, x) = \phi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

δίνεται από τον τύπο *d'Alembert*:

$$u(t, x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi.$$

Στη δική μας την περίπτωση

$$u(t, x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2}.$$

Ας υπολογίσουμε την v έχουμε

$$v = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} \phi(x-\tau) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau + \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} \phi(x+\tau) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau =$$

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} \phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi + \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} \phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} \phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi$$

που είναι ο τύπος *Poisson* για $n = 1$ (βλ. (2.7) Κεφάλαιο II).

Σημειώνουμε (χωρίς απόδειξη) ότι η λύση του προβλήματος *Cauchy* (1.1), (1.2) είναι μοναδική.

§3. Πρόβλημα *Cauchy – Dirichlet* για κυματική εξίσωση

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Dirichlet (Cauchy – Dirichlet)*

$$(3.1) \quad u_{tt} = \Delta u + f(t, x), \quad |t| < T, \quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n, \quad n > 1,$$

$$(3.2) \quad u(0, x) = \phi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(3.3) \quad u \Big|_{S_T} = \chi(s), \quad S_T = [-T, T] \times \partial\Omega.$$

Υπάρχει μοναδική κλασική λύση του προβλήματος (3.1) - (3.3) υπο προϋποθέσεις σχετικά με την ομαλότητα των f, ϕ, ψ και χ , εμείς θα περιοριστούμε με την απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης.

Εστω u_1 λύση του προβλήματος (3.1) - (3.3) και έστω υπάρχει μια άλλη λύση u_2 του ίδιου προβλήματος. Για

$$v \equiv u_1 - u_2$$

έχουμε

$$(3.4) \quad v_{tt} = \Delta v, \quad |t| < T, \quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n, \quad n > 1,$$

$$(3.5) \quad v(0, x) = v_t(0, x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$(3.6) \quad v \Big|_{S_T} = 0, \quad S_T = [-T, T] \times \partial\Omega.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $v \equiv 0$. Εισάγουμε την συνάρτηση

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [v_t^2 + |\nabla v|^2] dx.$$

Προφανώς

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} [v_t v_{tt} + \nabla v \cdot \nabla v_t] dx.$$

με παραγοντική ολοκλήρωση (βλ. (1.4) από το πρώτο κεφάλαιο με v στη θέση του u και v_t στη θέση του v)

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\partial\Omega} v_t v ds + \int_{\Omega} [v_t v_{tt} - v_t \Delta v] dx.$$

Λόγω συνοριακής συνθήκης (3.6) και εξίσωσης (3.4) έχουμε

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $E(0) = 0$ καταλήγουμε στο

$$E(t) = 0, \quad \forall t.$$

Συνεπώς

$$v_t = |\nabla v| = 0 \Rightarrow v \equiv const$$

και από (3.5) $v \equiv 0$.

Παρομοίως αποδεικνύουμε την μοναδικότητα του προβλήματος *Neumann* (*Cauchy - Neumann*).

Όπως γνωρίζετε για $n = 1$ η ύπαρξη αποδεικνύεται με την μέθοδο *Fourier*. Μπορούμε να επεκτείνουμε την μέθοδο αυτή και για $n > 1$. Η σειρά *Fourier* θα είναι ως προς τις ιδιοσηναρτήσεις της Λαπλασιανής, ήτοι ως προς $u_k(x)$ μη μηδενικές λύσεις του προβλήματος

$$\Delta u = \lambda_k \text{ στο } \Omega, \quad u \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

όπου λ_k είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος.

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι αν η $u(t, x)$ είναι φραγμένη λύση του προβλήματος *Cauchy*

$$u_{tt} = \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u, \quad |t| < \infty, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$$u(0, x) = \phi(x), \quad u_t(0, x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

τότε η

$$v(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau, x) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau$$

είναι λύση του προβλήματος *Cauchy* :

$$v_t = \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)v_{x_i} + c(x)v, \quad 0 < t < \infty, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$$v(0, x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

2. Ποιές προϋποθέσεις σχετικά με την ομαλότητα πρέπει να ικανοποιούν οι συναρτήσεις $\phi(x)$, $\psi(x)$, $f(t, x)$ για να είναι νόμιμες οι διαδικασίες που μας οδήγησαν στον τύπο *Kirchhoff* και *Poisson*.

3. Αποδείξτε το Λήμμα 1.1 για $n = 3$.

4. Χρησιμοποιώντας τον τύπο *Poisson* προσδιορίστε τη λύση $u(t, x)$, $x = (x_1, x_2)$ του προβλήματος *Cauchy*:

I)

$$u_{tt} = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + t \quad \text{στο } (-T, T) \times \mathbf{R}^2,$$

$$u(0, x) = x_1 - x_2, \quad u_t(0, x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^2.$$

II)

$$u_{tt} = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + t^2 x_2 \quad \text{στο } (-T, T) \times \mathbf{R}^2,$$

$$u(0, x) = 1, \quad u_t(0, x) = x_1 x_2, \quad x \in \mathbf{R}^2.$$

5. Χρησιμοποιώντας τον τύπο *Kirchhoff* προσδιορίστε τη λύση $u(t, x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ του προβλήματος *Cauchy*:

I)

$$u_{tt} = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} + x_3 \quad \text{στο } (-T, T) \times \mathbf{R}^3,$$

$$u(0, x) = x_1 + x_2 + x_3, \quad u_t(0, x) = x_1 x_2, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

II)

$$u_{tt} = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} + t^2 x_1 \quad \text{στο } (-T, T) \times \mathbf{R}^3,$$

$$u(0, x) = x_3, \quad u_t(0, x) = x_2, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

Βιβλιογραφία:

[1] *L.C.Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19, AMS.*

[2] *V.P.Mikhailov, Partial Differential Equations, Mir, 1978.*

Κεφάλαιο IV. Μη γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης

§1. Πρόβλημα *Cauchy* για την εξίσωση *Hopf*

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Cauchy*:
να βρεθεί η λύση $u(t, x)$ της εξίσωσης

$$(1.1) \quad u_t + u u_x = 0 \quad \text{στον } \mathbf{R}^2,$$

η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$(1.2) \quad u(0, x) = \phi(x) \quad \text{για } x \in \mathbf{R}.$$

Μας ενδιαφέρουν οι κλασικές λύσεις δηλαδή η λύση πρέπει να είναι C^1 συνάρτηση τ.ω.

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \phi(x).$$

Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των χαρακτηριστικών.

Στο επίπεδο (t, x) θεωρούμε μια οικογένεια καμπυλών $t(s), x(s)$ που ορίζεται ως

$$(1.3) \quad \frac{dt(s)}{ds} = 1, \quad \frac{dx(s)}{ds} = u(t(s), x(s))$$

όπου s είναι μια παράμετρος. Αυτές οι καμπύλες ονομάζονται χαρακτηριστικές καμπύλες ή σκετο χαρακτηριστικές. Θεωρούμε την συνάρτηση u πάνω στην χαρακτηριστική, δηλαδή $u(s) = u(t(s), x(s))$. Προφανώς η παράγωγος της u κατά μήκος της χαρακτηριστικής ισούται με

$$\frac{du(s)}{ds} \equiv \frac{du(t(s), x(s))}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} = u_t + u u_x.$$

Άρα κατά μήκος των χαρακτηριστικών η εξίσωση (1.1) παίρνει την μορφή

$$\frac{du(s)}{ds} = 0.$$

Δηλαδή κατά μήκος των χαρακτηριστικών η $u(t, x)$ παραμένει αμετάβλητη τουτέστιν

$$u(t(s), x(s)) = \text{Constant}.$$

Αν θα υποθέσουμε ότι $t(0) = 1$, δηλαδή οι χαρακτηριστικές ξεκινάνε από τον άξονα $t = 0$ (προς τα πάνω ($t > 0$) ή προς τα κάτω ($t < 0$)), τότε το σύστημα (1.3) παίρνει τη μορφή

$$(1.4) \quad t = s, \quad \frac{dx(t)}{dt} = u(t, x(t))$$

και το πρόβλημα (1.1), (1.2) ανάγεται στο

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= u(t), & x(0) &= x_0 \\ \frac{du(t)}{dt} &= 0, & u(0) &= \phi(x_0). \end{aligned}$$

Η “ u πάνω στην χαρακτηριστική” πλέον σημαίνει $u(t, x(t))$ ($u(t) \equiv u(t, x(t))$). Η αρχική συνθήκη για u είναι $\phi(x_0)$ και όχι $\phi(x)$ διότι είμαστε πάνω στην χαρακτηριστική και

$$u(t, x(t)) \Big|_{t=0} = u(0, x(0)) = \phi(x_0).$$

Πάμε να λύσουμε τώρα το πρόβλημα *Cauchy* (1.5). Από την δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$(1.6) \quad u(t) = \phi(x_0)$$

δηλαδή η u κατά μήκος της χαρακτηριστικής ($u(t) = u(t, x(t))$) παραμένει σταθερή και αναγκαστικά ισούται με την τιμή της στο $t = 0$. Αντικαθιστώντας την u στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$\frac{dx(t)}{dt} = \phi(x_0), \quad x(0) = x_0$$

δηλαδή

$$(1.7) \quad x(t) = t\phi(x_0) + x_0.$$

Αυτές είναι οι χαρακτηριστικές της εξίσωσης *Hopf*, παρατηρούμε ότι είναι οικογένεια ευθειών. Συνεπώς βρήκαμε τη λύση σε παραμετρική μορφή (1.6), (1.7). Από (1.7), (1.6) έχουμε $x = tu + x_0$ δηλαδή $x_0 = x - tu$ και από (1.6) καταλήγουμε στην σχέση

$$(1.8) \quad u = \phi(x - tu).$$

Προφανώς

$$u_t = \phi'(\xi)(-u - tu_t), \quad u_x = \phi'(\xi)(1 - tu_x)$$

εδω $\xi = x - tu$. Συνεπώς

$$u_t + u u_x = -t\phi'(\xi)(u_t + u u_x),$$

δηλαδή

$$(u_t + u u_x)(1 + t\phi'(\xi)) = 0.$$

Άρα για να είναι η (1.8) λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) πρέπει να ισχύει

$$(1.9) \quad 1 + t\phi'(x - tu) \neq 0.$$

Στην ίδια συνθήκη καταλήγουμε αν θα προσπαθήσουμε να λύσουμε την (1.8) ως προς u . Δηλαδή έχουμε μια συνάρτηση δοσμένη σε πεπλεγμένη μορφή:

$$F(t, x, u) = 0 \quad \text{με} \quad F(t, x, u) \equiv u - \phi(x - tu)$$

και θέλουμε να την λύσουμε ως προς u (να την γράψουμε σε μορφή $u = u(t, x)$). Σύμφωνα με το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης αυτό είναι εφικτό αν

$$F_u(t, x, u) \neq 0$$

δηλαδή αν ισχύει η (1.9).

Αυτή η “παράξενη συμπεριφορά” του προβλήματος οφείλεται στο γεγονός ότι σε αντίθεση με τις γραμμικές εξισώσεις η χαρακτηριστικές εδω εξαρτώνται

απο την λύση και μπορούν να τέμνονται φέρνοντας διαφορετικές τιμές. Ας δούμε τρία κατατοπιστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Cauchy*:

$$\begin{aligned}u_t + u u_x &= 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2, \\u(0, x) &= x \text{ για } x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Το σύστημα (1.5) γραφεται ως

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= u(t), \quad x(0) = x_0 \\ \frac{du(t)}{dt} &= 0, \quad u(0) = x_0.\end{aligned}$$

Άρα $u(t) = x_0$ και

$$\frac{dx(t)}{dt} = x_0, \quad x(0) = x_0 \Leftrightarrow x(t) = t x_0 + x_0.$$

Συνεπώς $u = x - t u$ και

$$u(t, x) = \frac{x}{t+1}.$$

Η (κλασική) λύση αυτή ορίζεται για $t > -1$, δηλαδή ξεκινώντας από το $t = 0$ η λύση υπάρχει για όλους τους θετικούς χρόνους και για αρνητικούς μέχρι -1 .

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνθήκη (1.9) έχει τη μορφή $1 + t \neq 0$.

Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι χαρακτηριστικές $x = t x_0 + x_0$ τέμνονται στο σημείο $t = -1, x = 0$.

Προφανώς κατά μήκος της $x = t x_0 + x_0$ η u είναι σταθερή. Πράγματι

$$u(t, x(t)) = u(t, t x_0 + x_0) = \frac{t x_0 + x_0}{t+1} = x_0 = u(0, x(0)).$$

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Cauchy*:

$$\begin{aligned}u_t + u u_x &= 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2, \\u(0, x) &= -x \text{ για } x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Το σύστημα (1.5) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= u(t), \quad x(0) = x_0 \\ \frac{du(t)}{dt} &= 0, \quad u(0) = -x_0.\end{aligned}$$

Άρα $u(t) = -x_0$ και

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x_0, \quad x(0) = x_0 \Leftrightarrow x(t) = -t x_0 + x_0.$$

Συνεπώς

$$u = -x + t u$$

και

$$u = \frac{x}{t-1}.$$

Η (κλασική) λύση αυτή ορίζεται για $t < 1$, δηλαδή ξεκινώντας από το $t = 0$ η λύση υπάρχει για τους θετικούς χρόνους μέχρι $t = 1$ και για όλους τους αρνητικούς.

Η συνθήκη (1.9) έχει τη μορφή $1 - t \neq 0$.

Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι χαρακτηριστικές τέμνονται στο σημείο $t = 1, x = 0$.

Παράδειγμα 3. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Cauchy*:

$$u_t + u u_x = 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$

$$u(0, x) = x^2 \text{ για } x \in \mathbf{R}.$$

Το σύστημα (1.5) γραφεται ως

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{du(t)}{dt} = 0, \quad u(0) = x_0^2.$$

Άρα $u(t) = x_0^2$ και

$$\frac{dx(t)}{dt} = x_0^2, \quad x(0) = x_0 \Leftrightarrow x(t) = t x_0^2 + x_0.$$

Από $x = tu + x_0$ παίρνουμε $x_0 = x - tu$ και

$$u = (x - tu)^2.$$

Δηλαδή

$$t^2 u^2 - (2xt + 1)u + x^2 = 0.$$

Λύνοντας το τριώνυμο ως προς u παίρνουμε

$$u_{\pm} = \frac{1 + 2xt \pm \sqrt{4xt + 1}}{2t^2}.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι το χωρίο όπου "ζει" η πιθανή λύση είναι $4xt + 1 \geq 0$.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν $4xt + 1 > 0$ τότε

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_- = x^2$$

ενώ

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_+ = +\infty,$$

άρα η λύση του προβλήματος είναι η

$$(1.10) \quad u(t, x) = \frac{1 + 2xt - \sqrt{4xt + 1}}{2t^2} = \frac{2x^2}{1 + 2xt + \sqrt{4xt + 1}}$$

και ορίζεται στο χωρίο

$$4xt + 1 > 0.$$

Προφανώς εδώ

$$1 + \phi' t = 1 + 2(x - ut)t = 1 + 2xt - 2ut^2,$$

συνεπώς η σχέση (1.9) παίρνει τη μορφή

$$u \neq \frac{1 + 2xt}{2t^2}$$

η οποία ισοδυναμεί (βλ. (1.10)) με $4xt + 1 \neq 0$, δηλαδή $4xt + 1 > 0$ ή $4xt + 1 < 0$, επιλέγουμε το χωρίο

$$(1.11) \quad 4xt + 1 > 0$$

αφού θέλουμε να περιέχει τον άξονα $t = 0$.

Οι χαρακτηριστικές εδώ είναι

$$x(t) = x_0^2 t + x_0.$$

Κατα μήκος των χαρακτηριστικών η λύση πρέπει να είναι σταθερή. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} u(t, x(t)) &= \frac{1 + 2(x_0^2 t + x_0)t - \sqrt{4(x_0^2 t + x_0)t + 1}}{2t^2} = \\ &= \frac{1 + 2(x_0^2 t + x_0)t - \sqrt{(2x_0 t + 1)^2}}{2t^2} = x_0^2 = u(0, x(0)). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αυτό ισχύει μόνο αν

$$(1.12) \quad 2x_0 t + 1 > 0.$$

Γιατί αυτό συμβαίνει; Ας πάρουμε το ημιεπίπεδο $t > 0$. Οι χαρακτηριστικές που βγαίνουν από το $x_0 \geq 0$ δεν έχουμε κανένα πρόβλημα διότι η (1.12) ισχύει. Για να ισχύει η (1.12) για τις χαρακτηριστικές που βγαίνουν από το $x_0 < 0$ πρέπει

$$t < \frac{-1}{2x_0}.$$

Τι συμβαίνει στο σημείο $t_0 = -1/2x_0$; Πάνω στη χαρακτηριστική έχουμε

$$x(t_0) = -\frac{x_0}{2} + x_0 = \frac{x_0}{2}$$

δηλαδή το σημείο που βρίσκεται πάνω στην χαρακτηριστική έχει συντεταγμένες $(-x_0/2, x_0/2)$ σε αυτό το σημείο όμως παραβιάζεται η (1.11), πράγματι

$$4x_0 t_0 + 1 = 0.$$

Δηλαδή οι χαρακτηριστικές που ξεκινάνε από το $x_0 < 0$ (προς τα πάνω) σταματάνε πριν φτάσουν στο σημείο $2x_0 t_0 + 1 = 0$ (άρα δεν τέμνουν αυτές που ξεκινάνε από το $x_0 \geq 0$).

Έτσι η λύση ορίζεται μονοσήμαντα στο χωρίο $4xt + 1 > 0$.

Παρατηρούμε ότι

$$u_x(t, x) = \frac{\sqrt{4xt + 1} - 1}{t\sqrt{4xt + 1}}$$

και για $4xt + 1 = 0$ η u_x απειρίζεται.

§2. Μη ομογενείς εξισώσεις πρώτης τάξης

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Cauchy*:

να βρεθεί η λύση $u(t, x)$ της εξίσωσης

$$(2.1) \quad u_t + a(t, x, u)u_x = f(t, x, u) \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$

η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$(2.2) \quad u(0, x) = \phi(x) \text{ για } x \in \mathbf{R}.$$

Παρομοίως με το πρόβλημα (1.1), (1.2) καταλήγουμε στο σύστημα

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \\ \frac{du(t)}{dt} &= f(t, x(t), u(t)), \quad u(0) = \phi(x_0). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Cauchy*:

$$u_t + u u_x = 1 \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$

$$u(0, x) = \phi(x) \text{ για } x \in \mathbf{R}.$$

Το σύστημα (2.3) γραφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= u(t), \quad x(0) = x_0 \\ \frac{du(t)}{dt} &= 1, \quad u(0) = \phi(x_0). \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}t^2 + t\phi(x_0) + x_0, \\ u(t) &= t + \phi(x_0). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}t^2 + t(u - t) + x_0, \\ u(t) &= t + \phi(x - tu + \frac{1}{2}t^2). \end{aligned}$$

Π.χ. για $\phi(x) = x$ έχουμε

$$u(t, x) = \frac{2x + 2t + t^2}{2 + 2t}$$

Παρατηρούμε ότι η λύση υπάρχει για $t > -1$. Αυτό συμβαίνει διότι οι χαρακτηριστικές

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + tx_0 + x_0,$$

τέμνονται για $t = -1$ (στο σημείο $(-1, 1/2)$).

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Cauchy*:

$$u_t + u u_x = u \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$

$$u(0, x) = \phi(x) \text{ για } x \in \mathbf{R}.$$

Το σύστημα (2.3) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= u(t), \quad x(0) = x_0 \\ \frac{du(t)}{dt} &= u(t), \quad u(0) = \phi(x_0).\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}u(t) &= e^t \phi(x_0), \\ x(t) &= e^t \phi(x_0) + x_0 - \phi(x_0).\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$u = e^t \phi(x - u + ue^{-t}).$$

Π.χ. για $\phi(x) = -x$ έχουμε

$$u(t, x) = \frac{xe^t}{e^t - 2}.$$

Τέλος θα πούμε δυο λόγια για τις εξισώσεις *Hamilton – Jacobi* της μορφής:

$$S_t + H(t, x, S_x) = 0.$$

Εδώ $S(t, x)$ προσδιοριζόμαστε συνάρτηση, $H(t, x, p)$ δοσμένη C^1 συνάρτηση. Παραγωγίζοντας την εξίσωση αυτή ως προς x για

$$u(t, x) = S_x(t, x)$$

παίρνουμε

$$u_t + H_u(t, x, u)u_x = -H_x(t, x, u)$$

η οποία είναι η εξίσωση (2.1).

Ασκήσεις

Προσδιορίστε τη λύση $u(t, x)$ του προβλήματος *Cauchy*:

1.

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= f''(t) \text{ στον } \mathbf{R}^2, \\ u(0, x) &= x, \quad x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= -x \text{ στον } \mathbf{R}^2, \\ u(0, x) &= 0, \quad x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}u_t + u^2 u_x &= 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2, \\ u(0, x) &= \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}u_t + u_x^2 &= 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2, \\ u(0, x) &= x^2, \quad x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

5.

$$u_t + uu_x = 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$

$$u(0, x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

όπου

$$\phi(x) = \begin{cases} -x, & \text{για } x \in [-1, 1] \\ 1, & \text{για } x < -1 \\ -1, & \text{για } x > 1 \end{cases}.$$

Εξετάστε τη συμπεριφορά της λύσης καθώς $t \rightarrow 1$.

6. α.

$$u_t + uu_x = 1 \quad \text{στον } \mathbf{R}^2, \\ \phi(x) = |x|$$

β. Έστω ότι η αρχική συνθήκη είναι δοσμένες μόνο στο $[-\infty, 0]$. Βρείτε το χωρίο όπου η λύση ορίζεται από αυτή τη συνθήκη.

γ. Έστω ότι οι αρχική συνθήκη είναι δοσμένες μόνο στο $[1, 2]$. Βρείτε το χωρίο όπου η λύση ορίζεται από αυτή τη συνθήκη.

Βιβλιογραφία:

[1] Γ. Ακρίβης, Ν. Αλικάκος, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αθήνα, 2012 Συγχρονη Εκδοτική ΕΠΕ.

[2] *L.C.Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19, AMS. § 2.2.*