Λογισμός Μεταβολών

1.4.2023

1. Να βρεθεί το ελάχιστο $\tilde{y}(x)$ του συναρτησοειδούς

$$J(y) = \int_{-1}^{1} \big(y^2 + yy' + (y'+1)^2\big)dx$$

με περιορισμό $y(1) = y(-1) = 0$.

2. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $Euler - Lagrange$ για το συναρτησοειδές

$$J(y) = \int_{a}^{b} f(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx$$

έχει τη μορφή

$$f_y - f_x y' - \frac{fy''}{1+y'^2} = 0.$$

3. Έστω $f(x) \in C^0([a,b])$, αποδείξτε ότι αν

$$\int_{a}^{b} f(x)h(x)dx = 0$$

για κάθε $h(x) \in C^3([a,b])$ με $h(a) = h(b) = 0$, τότε

$$f(x) \equiv 0 \ \text{ στο } \ [a,b].$$

Διάρκεια της εξέτασης 60 λεπτά.